01.01.01
Д 328

Контрольный экземпляр

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

АДУКОВ Виктор Михайлович

ФАКТОРИЗАЦИЯ ВИНЕРА – ХОПФА И АППРОКСИМАЦИИ ПАДЕ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Екатеринбург – 2006

Работа выполнена в Южно-Уральском государственном университете.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор В.Ю. Новокшенов;

доктор физико-математических наук,
профессор К.М. Расулов;

доктор физико-математических наук,
С.П. Суетин.

Ведущая организация:

Ростовский-на-Дону государственный университет.

Защита состоится 23 ноября 2006 года в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 004.006.02 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук при Институте математики и механики Уральского отделения РАН по адресу: 620219, г. Екатеринбург, ГСП-384, ул. С. Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Института математики и механики Уральского отделения РАН.

Автореферат разослан "____"_____ 2006 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 004.006.02
кандидат физ.-мат. наук Н.Ю. Антонов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена явному решению задачи факторизации Винера – Хопфа для матриц-функций и исследованию равномерной сходимости скалярных и матричных аппроксимаций Паде.

Задача факторизации Винера – Хопфа (краевая задача Римана) – одна из важнейших задач анализа. Она находит многочисленные приложения в различных разделах математики, механики и математической физики. Широко известна определяющая роль, которую играет эта задача при решении систем сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши и систем уравнений Винера – Хопфа[1]. Она является одним из существенных этапов при интегрировании нелинейных эволюционных уравнений методом обратной задачи рассеяния[2] и составляет основу для решения обратной задачи рассеяния для матричного дифференциального оператора. В топологии голоморфные векторные расслоения на сфере Римана классифицируются с помощью инвариантов краевой задачи Римана – частных индексов[3]. Уже традиционным является приложение краевой задачи Римана к проблемам механики сплошной среды[1]. В последнее время краевая задача Римана стала использоваться при исследовании асимптотики ортогональных многочленов и знаменателей диагональных аппроксимаций Паде[4].

Применение задачи факторизации Винера – Хопфа сдерживается отсутствием в матричном случае явных формул для факторизационных множителей и для важных целочисленных инвариантов задачи – частных индексов. Поэтому актуальной задачей для аналитиков, работающих в данной области, является отыскание случаев явного решения задачи факторизации Винера – Хопфа. Различным аспектам этой проблемы были посвящены работы Дж. Биркгофа, Н.П Векуа, Ф.Д. Гахова, И.Ц. Гохберга, Э.И. Зверовича, В.Е. Круглова, А. Лебрэ, Л. Лерера, Н.Г. Моисеева, А.М. Николайчука, В.Ю. Новокшенова, З. Прёсдорфа, Л.П. Примачука, К.М. Расулова, Л. Родмана, И.М. Спитковского, П.М. Тишина, И.Т. Хабибуллина, А.А. Храпкова, Г.Н. Чеботарева, Г.П. Черепанова, С.Л. Штина, Ю.Л. Шмульяна и др. математиков. Однако в большинстве работ по этой теме речь идет об эффективном решении задачи факторизации. Принято говорить, что задача реша-

[1]Векуа Н.П. // *Системы сингулярных интегральных уравнений.*– М.: Наука, 1970.

[2]Захаров В.Е., Шабат А.Б. Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II // *Функц. анализ и его прил.*– 1979.– Т. 13, вып. 3.– С. 13–22.

[3]Лайтерер Ю. Голоморфные векторные расслоения и принцип Ока – Грауэрта // *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.*– М.:ВИНИТИ, 1986, 75–121.

[4]Суетин С.П. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда // *Успехи мат. наук.*– 2002.– Т. 57, вып. 1.– 45–142.

Обяз. экз.
н/бал
Южно-Уральский гос. университет
НАУЧНАЯ

ется *эффективно*, если существует алгоритм ее решения за конечное число шагов (заранее неизвестное, а определяемое в процессе вычислений). Под решением *в замкнутой форме* или *в квадратурах* понимается решение в виде формулы типа формулы Гахова в скалярном случае. Впрочем, термин "решение в замкнутой форме" часто используется как синоним явного в какомнибудь смысле решения. В данной работе под *явным решением* мы понимаем сведение задачи факторизации к решению конечного числа конечных систем линейных алгебраических уравнений, матрицы которых выписываются в замкнутой форме (в квадратурах). Число таких систем также должно быть определено заранее.

Перечислим основные классы матриц-функций, для которых удается построить эффективно, а иногда и явно, факторизацию Винера – Хопфа или вычислить частные индексы: *функционально-коммутативные матрицы-функции*; *матрицы-функции, близкие к единичной матрице*; *положительно определенные матрицы-функции* или, более общо, матрицы-функции со знакоопределенной действительной или мнимой частью (доказано, что они имеют относительно единичной окружности нулевые частные индексы); *треугольные матрицы-функции второго порядка*; *матричные многочлены*.

Практически единственный до работ автора диссертации класс матриц-функций, для которого решение задачи факторизации построено в явной форме, был класс матричных многочленов[5].

Для мероморфных в области матриц-функций один из факторизационных множителей матрицы-функции является рациональным, то есть определяется конечным числом параметров. Это позволяет высказать предположение, что для данного класса матриц-функций возможно явное решение задачи факторизации Винера – Хопфа средствами линейной алгебры. Кроме того, существуют классы матриц-функций, для которых факторизация Винера – Хопфа явно может быть сведена к мероморфному случаю. Такие матрицы-функции достаточно часто встречаются в приложениях, и потому актуальность разработки методов явного решения для этих классов матриц-функций не вызывает сомнений.

Одной из главных задач теории линейных конечномерных динамических систем является задача представления переходной функции системы в виде "отношения" матричных многочленов (*дробная факторизация рациональных матриц-функций*)[6]. Дробная факторизация позволяет решить важную в этой теории проблему минимальной реализации (или минимальной частичной реа-

[5]Gohberg I.C., Lerer L., Rodman L. Factorization indices for matrix polynomials // *Bull. Amer. Math. Soc.*– 1978.– Vol. 84.– 275–277.

[6]Kailath T. // *Linear Systems.*– New York: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1980.

лизации) конечномерной динамической системы. Известно, что задача минимальной частичной реализации эквивалентна *задаче построения аппроксимации Паде*. Есть основания предполагать, что задачи факторизации Винера – Хопфа, дробной факторизации и аппроксимации Паде тесно связаны между собой. Подтверждение этого предположения позволило бы внести новые методы в теорию каждой из этих задач. Таким образом, выявление связей между задачей факторизации Винера – Хопфа, дробной факторизацией и задачей аппроксимации Паде является актуальной проблемой.

В теории сходимости аппроксимаций Паде весьма актуальной является задача разработки общих методов построения полной теории равномерной сходимости строк таблицы Паде для мероморфной функции. Мы говорим, что для данной строки существует *полная теория равномерной сходимости*, если для нее найдены пределы всех сходящихся подпоследовательностей знаменателей аппроксимаций Паде (то есть найдены все предельные точки множества полюсов этих аппроксимаций) и описаны области, внутри которых имеется равномерная сходимость данной строки. Известны многочисленные примеры, показывающие, что множество предельных точек полюсов может состоять не только из полюсов аппроксимируемой функции. "Лишние" предельные точки являются препятствием для равномерной сходимости всей строки, и потому при построении областей равномерной сходимости для данной строки требуется их предварительно найти. Для строки таблицы Паде с номером, равным числу полюсов аппроксимируемой функции, имеется полный результат – это классическая теорема Монтессу де Болора[7]. В этом случае осуществляется идеальная ситуация – лишних предельных точек нет. Для так называемых промежуточных строк таблицы Паде известны достаточные условия, при выполнении которых также осуществляется идеальная ситуация[8]. Промежуточные строки (терминология, введенная А. Сиди, Э. Саффом и Х. Лю) – это строки таблицы Паде с номерами, лежащими между номерами двух последовательных строк, для которых выполняется теорема Монтессу де Болора.

Ни для одной строки таблицы Паде произвольной мероморфной функции множество лишних предельных точек не было найдено. Поэтому актуальным является вопрос, возможно ли это сделать хотя бы для одной строки таблицы Паде?

Теория сходимости матричных аппроксимаций Паде, которые широко применяются в теоретической физике и математической теории систем, вообще не является разработанной. В частности, в ней отсутствует матричный

[7]Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П. // *Аппроксимации Паде.*– М.: Мир, 1986.

[8]Sidi A. Quantitative and constructive aspects of the generalized Koenig's and de Montessus's theorems for Padé approximants // *J. Comput. Appl. Math.*– 1990.– Vol. 29.– 257–291.

аналог теоремы Монтессу де Болора. Любые исследования в этой области являются весьма актуальными.

Отметим то общее, что имеется в вышеуказанных, казалось бы, далеких друг от друга, задачах. В них регулярно появляются конечные (блочные) теплицевы матрицы и возникает необходимость изучения их ядер. Данный факт и является основой для создания нового метода исследования всех этих задач.

Цели работы. Исходя из сказанного, сформулируем основные цели диссертационной работы:

- на основе анализа структуры ядер блочных теплицевых матриц создать алгебраический аппарат нового метода (метода существенных многочленов), пригодного для явного решения факторизационных задач для матриц-функций и изучения сходимости скалярных и матричных аппроксимаций Паде;
- построить явно в терминах существенных многочленов дробную факторизацию рациональных матриц-функций, установить связь дробной факторизации с факторизацией Винера – Хопфа;
- получить явные формулы для частных индексов и факторизационных множителей в факторизации Винера – Хопфа различных классов матриц-функций;
- для скалярных аппроксимаций Паде установить связь с задачей факторизации Винера – Хопфа, исследовать асимптотику знаменателей аппроксимаций Паде для последней промежуточной строки таблицы Паде мероморфной функции и построить для этой строки полную теорию равномерной сходимости;
- установить связь между задачей факторизации Винера – Хопфа матриц-функций и матричной задачей аппроксимации Паде, доказать матричные аналоги теоремы Монтессу де Болора.

Решению каждой из этих задач будет посвящена одна из глав диссертации.

Методы исследования. В работе применяются методы линейной алгебры и функционального анализа, комплексного анализа, элементы математической теории систем и теории топологических групп. Основным методом диссертации, с помощью которого получены все основные результаты, является разработанный автором метод существенных многочленов.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты:

1) найдено явное решение задачи факторизации Винера – Хопфа для аналитических и мероморфных матриц-функций; указаны классы матриц-функций, для которых факторизация явно приводится к аналитическому случаю;

2) построена полная теория равномерной сходимости для последней промежуточной строки таблицы Паде мероморфной функции;

3) получены аналоги классической теоремы Монтессу де Болора для матричных аппроксимаций Паде;

4) разработан новый метод для исследования задач факторизации Винера – Хопфа, дробной факторизации и аппроксимации Паде матриц-функций; установлена связь между факторизацией Винера – Хопфа и дробной факторизацией; показано, что задача аппроксимации Паде является частным случаем задачи факторизации Винера – Хопфа.

Все основные результаты работы и метод их получения являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Ее метод и результаты могут быть использованы в научно-исследовательской работе специалистов по теории аппроксимаций Паде, по теории краевой задачи Римана, по интегральным уравнениям и их приложениям к механике в следующих научных центрах: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Московский государственный университет, Казанский государственный университет, Башкирский государственный университет, Белорусский государственный университет, Ростовский-на-Дону государственный университет, Одесский государственный университет, Кишиневский государственный университет, Тбилисский государственный университет, Ереванский государственный университет, Южно-Уральский государственный университет. Диссертационная работа может быть также использована при чтении спецкурсов на математических факультетах вышеуказанных университетов.

Аппробация результатов диссертации. Результаты работы докладывались и обсуждались в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН на семинаре отдела комплексного анализа под руководством академика РАН Гончара А.А. и проф. Аптекарева А.И., на семинаре отдела теории приближения функций Института математики и механики УРО РАН под руководством члена-корреспондента РАН Субботина Ю.Н. и проф. Черных Н.И., на семинаре Института математики с ВЦ УНЦ РАН под руководством члена-корреспондента РАН Напалкова В.В., на семинаре Башкир-

ского университета (руководитель проф. Шабат А.Б.), на Одесском городском семинаре по краевым задачам и сингулярным интегральным уравнениям (руководитель проф. Литвинчук Г.С.), на семинаре по функциональному анализу Института математики с ВЦ АН МССР (руководитель проф. Маркус А.С.), на семинаре Казанского университета (руководитель проф. Аксентьев Л.А.), на семинаре по краевым задачам им. Ф.Д. Гахова (руководитель проф. Зверович Э.И.), а также на XI Всесоюзной школе по теории операторов в функциональных пространствах (Челябинск, 1986), Уральской региональной конференции "Функционально-дифференциальные уравнения" (Уфа, 1986), на VI конференции ILAS (Chemnitz, Germany, 1996), на Второй международной конференции "Компьютерная алгебра в фундаментальных и прикладных исследованиях и образовании" (Минск, 1999), на Воронежской зимней математической школе "Современный анализ и его приложения" (Воронеж, 2000), на международной конференции "Теория приближения функций и операторов" (Екатеринбург, 2000), на международной конференции "Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы"(Уфа, 2000), на шестой Казанской международной летней школе-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (Казань, 2003) и на ежегодных научно-технических конференциях Южно-Уральского университета (бывший Челябинский политехнический институт) (Челябинск, 1985–2006).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [31].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, одной вспомогательной главы, содержащей обзор литературы, пяти основных глав, включающих тридцать разделов, заключения, списка использованных источников, содержащего 152 наименования, и двух приложений.

Полный объем диссертации – 314 страниц (из них 14 страниц занимают приложения). Диссертация содержит 6 рисунков и 3 таблицы.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ РАБОТЫ

Глава 0 диссертации является вспомогательной. В ней дан обзор литературы по теме диссертации, приведены факторизационные и аппроксимационные задачи, изучаемые в работе, и сформулированы нерешенные задачи. Объектами исследования в диссертации являются следующие задачи.

1. Задача факторизации Винера – Хопфа (см. раздел 0.1.) Это, фактически, задача построения канонической матрицы решений краевой задачи Римана для вектора.

Пусть Γ – простой гладкий замкнутый контур в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограничивающий область D_+. Дополнение $D_+ \cup \Gamma$ в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ обозначим через D_-. Можно считать, что $0 \in D_+$, $\infty \in D_-$. Пусть $a(t)$ – непрерывная и обратимая на контуре Γ матрица-функция порядка p. Для матрицы-функции $a(t)$ требуется отыскать ее представление в виде

$$a(t) = l_+(t) d_l(t) l_-(t), \ t \in \Gamma,$$

где $l_\pm(t)$ – непрерывные на Γ матрицы-функции, аналитически продолжаемые в область $D_\pm$ и обратимые там, $d_l(t) = \operatorname{diag}[t^{\lambda_1}, \ldots, t^{\lambda_p}]$. Это представление называется *левой факторизацией Винера – Хопфа* матрицы-функции $a(t)$. Здесь $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ – целые числа, называемые *левыми факторизационными индексами* (или левыми частными индексами) $a(t)$, причем их можно считать упорядоченными по убыванию: $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_p$. Аналогично определяется *правая факторизация* $a(t) = r_-(t) d_r(t) r_+(t), \quad t \in \Gamma$.

2. Задача дробной факторизации (см. раздел 0.2). Дробная факторизация $r(z)$ – это естественное обобщение на матричный случай представления рациональной дроби в виде отношения двух многочленов.

Левой взаимно простой дробной факторизацией правильной рациональной матрицы-функции $r(z)$ называется ее представление в виде

$$r(z) = D_L^{-1}(z) N_L(z).$$

Здесь $D_L(z), N_L(z)$ – взаимно простые слева матричные многочлены от z и $D_L(z)$ – несингулярный (то есть $\det D_L(z) \not\equiv 0$) матричный многочлен. Взаимная простота слева матричных многочленов $D_L(z), N_L(z)$ означает, что эти многочлены имеют в качестве общих левых полиномиальных делителей только матричные многочлены с постоянным ненулевым определителем (унимодулярные матричные многочлены). *Правая взаимно простая дробная факторизация* определяется аналогично.

Обычно на знаменатели дробных факторизаций помимо несингулярности налагаются дополнительные условия. Всегда можно добиться, чтобы знаменатель $D_L(z)$ имел *правильную по строкам* форму. Это означает, что постоянная матрица, составленная из коэффициентов при старшей степени каждой его строки, является обратимой матрицей. Аналогичным образом знаменатель $D_R(z)$ правой дробной факторизации $r(z)$ может быть приведен в *правильную по столбцам* форму. Отметим, что знаменатели $D_L(z)$, $D_R(z)$ могут быть приведены к форме, которая является одновременно правильной и по строкам, и по столбцам. Это форма знаменателей называется *формой Попова*.

3. Задача аппроксимации Паде (см. раздел 0.3). Это задача построения рациональной дроби, которая имеет заданные степени числителя и знаменателя и максимально возможный порядок касания в точке $z = 0$ с аппроксимируемой функцией.

Пусть $a(z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, $a_i \in \mathbb{C}$, – (формальный) степенной ряд. *Классической аппроксимацией Паде* типа (n, m) для $a(z)$ называется рациональная функция $\pi_{n,m}(z) = P_{n,m}(z)Q_{n,m}^{-1}(z)$ такая, что многочлены $P_{n,m}(z)$ и $Q_{n,m}(z)$ удовлетворяют условиям: $Q_{n,m}(z) \not\equiv 0$, $\deg Q_{n,m}(z) \le m$, $\deg P_{n,m}(z) \le n$ и

$$a(z)Q_{n,m}(z) - P_{n,m}(z) = \mathcal{O}(z^{n+m+1}),\ z \to 0.$$

Аппроксимация Паде типа (n, m) всегда существует и данными условиями определяется однозначно. Рациональные дроби $\pi_{n,m}(z)$ принято располагать в виде таблицы $\{\pi_{n,m}(z)\}_{n,m=0,1,\ldots}$, которая называется *таблицей Паде* ряда $a(z)$. Аппроксимации Паде $\pi_{n,m}(z)$ при фиксированном m образуют *m-ю строку* таблицы Паде. Аппроксимации Паде можно определить и для матричных степенных рядов.

Нерешенные задачи, являющиеся целью нашего исследования, сформулированы в разделе 0.5.

В **главе 1** мы развиваем математический аппарат, необходимый для решения факторизационных и аппроксимационных задач для матриц-функций. Основой нашего подхода является метод индексов и существенных многочленов. Понятия индексов и существенных многочленов, являющиеся базой для всей дальнейшей теории, вводятся в разделе 1.1.

Пусть $a_M, a_{M+1}, \ldots, a_N$ – произвольная конечная последовательность комплексных матриц размером $p \times q$. Эту последовательность мы будем обозначать a_M^N. Составим из элементов последовательности семейство блочных теплицевых матриц $T_k(a_M^N) = \|a_{i-j}\|_{\substack{i=k,k+1,\ldots,N \\ j=0,1,\ldots,k-M}}$, $M \le k \le N$. Для краткости $T_k(a_M^N)$ часто будем обозначать через T_k. Индексы и существенные многочлены последовательности a_M^N определяются на основе тщательного анализа структуры правых и левых ядер T_k. Удобнее иметь дело не с самими пространствами $\ker_R T_k$, $\ker_L T_k$, а с изоморфными им пространствами производящих векторных многочленов от z или от z^{-1}. Для этого вводятся операторы σ_R на пространстве рациональных матричных функций вида $R(z) = \sum\limits_{j=-N}^{-M} r_j z^j$, $r_j \in \mathbb{C}^{q\times 1}$, по формуле $\sigma_R\{R(z)\} = \sum\limits_{j=-N}^{-M} a_{-j} r_j$ и, аналогичным образом, σ_L. При $p = q = 1$ оператор $\sigma_R = \sigma_L$ является функционалом Стилтьеса, используемым в теории ортогональных многочленов.

Легко видеть, что $\sigma_R\{z^{-j}R(z)\}$ совпадает с коэффициентом при z^j в ряде $a_M^N(z)R(z)$, где $a_M^N(z)$ – производящий многочлен для последовательности a_M^N. Поэтому пространство $\mathcal{N}_k^R$ $(M \le k \le N)$ векторных многочленов вида $R(z) = \sum_{j=0}^{k-M} r_j z^j$, $r_j \in \mathbb{C}^{q\times 1}$, удовлетворяющих условиям ортогональности:

$$\sigma_R\{z^{-i}R(z)\} = 0,\ i = k, k+1, \ldots, N,$$

естественно изоморфно $\ker_R T_k$. Аналогично определяется пространство $\mathcal{N}_k^L$. Удобно доопределить эти пространства. Положим $\mathcal{N}_{M-1}^R = 0$, $\mathcal{N}_{N+1}^L = 0$ и обозначим $(N-M+2)q$-мерное пространство всех векторных многочленов от z формальной степени $N-M+1$ через $\mathcal{N}_{N+1}^R$, а $(N-M+2)p$-мерное пространство всех векторных многочленов от z^{-1} формальной степени $N-M+1$ через $\mathcal{N}_{M-1}^L$. Важными характеристиками последовательности являются числа $\alpha = \dim \mathcal{N}_M^R$ и $\omega = \dim \mathcal{N}_N^L$. Будем говорить, что последовательность a_M^N *регулярна слева (справа)*, если $\alpha = 0$ $(\omega = 0)$. В противном случае будем называть последовательность *вырожденной слева (справа)*, а число $\alpha(\omega)$ назовем *левым (правым) дефектом* последовательности. Последовательность *регулярна*, если $\alpha = \omega = 0$. Ясно, что для ненулевой последовательности $\alpha < q$ и $\omega < p$. В скалярном случае $(p = q = 1)$ регулярность последовательности означает, что это ненулевая последовательность.

Обозначим через d_k^R (d_k^L) размерность пространства $\mathcal{N}_k^R$ $(\mathcal{N}_k^L)$ и найдем разности $\Delta_k^R = d_k^R - d_{k-1}^R$ $(M \le k \le N+1)$, $\Delta_k^L = d_k^L - d_{k+1}^L$ $(M-1 \le k \le N)$. Определяющим фактором для всего дальнейшего изложения является то, что последовательности Δ_k^R, Δ_k^L являются монотонными. Ключом к доказательству монотонности Δ_k^R являются вложения $\mathcal{N}_k^R$ и $z\mathcal{N}_k^R$ в $\mathcal{N}_{k+1}^R$ $(M-1 \le k \le N)$. Из формулы Грассмана теперь получаем

$$\alpha = \Delta_M^R \le \Delta_{M+1}^R \le \ldots \le \Delta_N^R \le \Delta_{N+1}^R = p + q - \omega.$$

Из этих неравенств следует, что существует $p + q - \alpha - \omega$ целых чисел $\mu_{\alpha+1} \le \ldots \le \mu_{p+q-\omega}$ таких, что

$$\begin{array}{rcccl} \Delta_M^R & = & \ldots & = & \Delta_{\mu_{\alpha+1}}^R = \alpha, \\ & & \ldots & & \\ \Delta_{\mu_i+1}^R & = & \ldots & = & \Delta_{\mu_{i+1}}^R = i, \\ & & \ldots & & \\ \Delta_{\mu_{p+q-\omega}+1}^R & = & \ldots & = & \Delta_{N+1}^R = p+q-\omega. \end{array} \tag{1}$$

Если i-я строка в этих соотношениях отсутствует, то считаем, что $\mu_i = \mu_{i+1}$. По определению положим $\mu_1 = \ldots = \mu_\alpha = M-1$, если $\alpha \ne 0$ и $\mu_{p+q-\omega+1} = \ldots = \mu_{p+q} = N+1$, если $\omega \ne 0$.

Аналогично образом показывается, что последовательность Δ_k^L является невозрастающей, причем оказывается, что точки убывания этой последовательности совпадают с числами μ_i. Кроме того, $\sum\limits_{j=1}^{p+q} \mu_j = (N+1)p + (M-1)q$.

Определение 1. *Целые числа $\mu_1, \ldots, \mu_{p+q}$, которые определяются соотношениями (1), будем называть существенными индексами (или короче – индексами) последовательности a_M^N.*

Можно указать способ явного вычисления индексов последовательности через ранги матриц T_k.

Легко видеть, что размерность h_{k+1}^R дополнения $\mathcal{H}_{k+1}^R$ подпространства $\mathcal{N}_k^R + z\mathcal{N}_k^R$ до всего пространства $\mathcal{N}_{k+1}^R$ равна $\Delta_{k+1}^R - \Delta_k^R$. Поэтому из соотношений (1) следует, что $h_{k+1}^R \neq 0$ только, если $k = \mu_j$ $(j = \alpha+1, \ldots, p+q-\omega)$. В этом случае h_{k+1}^R совпадает с кратностью κ_j индекса μ_j. Следовательно, для $k \neq \mu_j$

$$\mathcal{N}_{k+1}^R = \mathcal{N}_k^R + z\mathcal{N}_k^R,$$

а для $k = \mu_j$

$$\mathcal{N}_{k+1}^R = (\mathcal{N}_k^R + z\mathcal{N}_k^R) \dot{+} \mathcal{H}_{k+1}^R.$$

Определение 2. *Если $\alpha \neq 0$, то любые векторные многочлены нулевой степени $R_1(z), \ldots, R_\alpha(z)$, образующие базис пространства $\mathcal{N}_M^R$, будем называть правыми существенными многочленами последовательности a_M^N, соответствующими индексу $\mu_1 = M-1$ кратности α.*

Любые векторные многочлены $R_j(z), R_{j+1}(z), \ldots, R_{j+\kappa_j-1}(z)$, образующие базис дополнения $\mathcal{H}_{\mu_j+1}^R$, будем называть правыми существенными многочленами последовательности, соответствующими индексу μ_j кратности κ_j для $j = \alpha+1, \ldots, p+q-\omega$.

Аналогичным образом изучается структура левых ядер матриц T_k и вводится понятие левых существенных многочленов.

Итак, для произвольной ненулевой последовательности $a_M, a_{M+1}, \ldots, a_N$ матриц размером $p \times q$ мы определили $p+q$ индексов $\mu_1, \ldots, \mu_{p+q}$, $p+q-\omega$ правых $R_1(z), \ldots, R_{p+q-\omega}(z)$ и $p+q-\alpha$ левых $L_{\alpha+1}(z), \ldots, L_{p+q}(z)$ существенных многочленов этой последовательности. В терминах индексов и существенных многочленов описываются правые и левые ядра матриц T_k. Это описание постоянно используется в диссертации.

В разделе 1.2 дается важный для дальнейшего критерий существенности (теорема 1.2 в диссертации), который позволяет проверять, что заданные числа являются индексами, а заданные векторные многочлены – существенными многочленами данной последовательности матриц.

Теорема 1. *Пусть a_M^N – произвольная последовательность матриц размером $p \times q$ и $\omega = \dim \ker_L T_N$. Пусть $\kappa_1, \ldots, \kappa_{p+q-\omega}$ – целые числа такие, что $M-1 \le \kappa_1 \le \kappa_2 \le \ldots \le \kappa_{p+q-\omega} \le N$, причем*

$$\sum_{j=1}^{p+q-\omega} \kappa_j = (N+1)(p-\omega) + (M-1)q.$$

Если $\omega \neq 0$, то положим $\kappa_{p+q-\omega+1} = \ldots = \kappa_{p+q} = N+1$. Пусть $U_1(z), \ldots, U_{p+q-\omega}(z)$ – векторные многочлены такие, что

$$U_j(z) \in \mathcal{N}_{\kappa_j+1}^R, \quad 1 \le j \le p+q-\omega.$$

Тогда числа $\kappa_1, \ldots, \kappa_{p+q}$ являются индексами, а многочлены $U_1(z), \ldots, U_{p+q-\omega}(z)$ – правыми существенными многочленами последовательности a_M^N тогда и только тогда, когда матрица

$$\Lambda_R = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_R\{z^{-\kappa_1}U_1(z)\} & \ldots & \tilde{\sigma}_R\{z^{-\kappa_{p+q-\omega}}U_{p+q-\omega}(z)\} \\ U_{1,\kappa_1-M+1} & \ldots & U_{p+q-\omega,\kappa_{p+q-\omega}-M+1} \end{pmatrix}$$

размером $(p+q)\times(p+q-\omega)$ имеет полный ранг, т.е. обратима слева. Здесь $\tilde{\sigma}_R$ – оператор Стилтьеса для последовательности a_M^N, продолженной произвольной матрицей $\tilde{a}_{M-1}$ и U_{j,κ_j-M+1} – (формальный) старший коэффициент векторного многочлена $U_j(z)$.

Этот критерий – наиболее часто используемая теорема данной работы. Всякий раз, когда мы будем находить индексы и существенные многочлены какой-либо последовательности, мы будем действовать одним и тем же способом: для естественных кандидатов на роль индексов и существенных многочленов мы составим *тестовую матрицу* Λ_R и проверим ее (одностороннюю) обратимость.

Наличие дефектов α, ω последовательности значительно усложняет теорию. В частности, при $\omega \neq 0$ не определены правые существенные многочлены $R_{p+q-\omega+1}(z), \ldots, R_{p+q}(z)$, соответствующие индексу $N+1$, а при $\alpha \neq 0$ – левые существенные многочлены $L_1(z), \ldots, L_\alpha(z)$, соответствующие индексу $M-1$. В разделе 1.3 с помощью критерия существенности дается процедура пополнения системы правых (при $\omega \neq 0$ и $p \le q$) или левых (при $\alpha \neq 0$ и $p \ge q$) существенных многочленов до полной системы, состоящей из $p+q$ многочленов.

Полная система существенных многочленов используется в следующем разделе 1.4 для изучения связи между индексами и существенными многочленами и задачей факторизации Винера – Хопфа блочно-треугольной матрицы-

функции специального вида. Сформулируем теорему о построении факторизации этой матрицы-функции в терминах индексов и существенных многочленов, ограничившись только случаем полной системы правых существенных многочленов.

Теорема 2. *Пусть последовательность a_M^N регулярна справа или $p \leq q$. Пусть $a(z)$ – производящая функция a_M^N, $\mu_1, \ldots, \mu_{p+q}$ – существенные индексы, $\mathcal{R}(z)$ – матрица, составленная из правых существенных многочленов этой последовательности. Произведем разложение матрицы-функции $a(z)\mathcal{R}(z)$ в виде*

$$a(z)\mathcal{R}(z) = \alpha_-(z)d(z) - z^{N+1}\beta_+(z),$$

где $d(z) = \operatorname{diag}[z^{\mu_1}, \ldots, z^{\mu_{p+q}}]$, а $\alpha_-(z)$ и $\beta_+(z)$ – матричные многочлены от z^{-1} и z, соответственно. Тогда индексы последовательности a_M^N являются правыми факторизационными индексами матрицы-функции

$$A(t) = \begin{pmatrix} t^{M-1}I_q & 0 \\ a(t) & t^{N+1}I_p \end{pmatrix},$$

а правая факторизация Винера – Хопфа $A(t)$ относительно любого простого замкнутого контура Γ, окружающего $z = 0$, строится по формуле:

$$A(t) = A_-(t)d(t)B_+^{-1}(t),$$

где $A_-(t) = \begin{pmatrix} t^{M-1}\mathcal{R}(t)d^{-1}(t) \\ \alpha_-(t) \end{pmatrix}$, $B_+(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}(t) \\ \beta_+(t) \end{pmatrix}$.

Имеется теорема, являющаяся обратной к теореме 2. В ней показано, что по факторизации $A(t)$ можно восстановить индексы и существенные многочлены последовательности. Таким образом, метод существенных многочленов полностью равносилен данной специальной задаче факторизации Винера – Хопфа, а эффективность метода обусловлена тем, что все рассматриваемые в диссертации факторизационные и аппроксимационные задачи сводятся к этой специальной задаче факторизации.

Цель раздела 1.5 главы – показать, что по правым (левым) существенным многочленам мы всегда можем восстановить левые (правые) существенные многочлены. Важную роль при этом играет процедура согласования наборов правых и левых существенных многочленов. Согласованные наборы существенных многочленов используются для окончательного пополнения системы существенных многочленов, а также будут необходимы во всех последующих главах.

Далее мы даем первые алгебраические применения метода существенных многочленов. В разделе 1.6 мы вначале получаем формулу обобщенного обращения конечной блочной теплицевой матрицы в терминах факторизации Винера – Хопфа блочно-треугольной матрицы-функции $A(t)$. Поскольку факторизация строится явно в терминах индексов и существенных многочленов, то отсюда получается явный вид обобщенной обратной $T_a^\dagger$ для блочной теплицевой матрицы T_a в этих же терминах:

$$T_a^\dagger = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathcal{R}_1 & \mathcal{R}_0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathcal{R}_m & \mathcal{R}_{m-1} & \dots & \mathcal{R}_0 \end{pmatrix} \Pi \begin{pmatrix} \mathcal{L}_0 & \mathcal{L}_{-1} & \dots & \mathcal{L}_{-n} \\ 0 & \mathcal{L}_0 & \dots & \mathcal{L}_{-n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \mathcal{L}_0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Здесь $\mathcal{R}(z)$, $\mathcal{L}(z)$ – матрицы согласованных правых и левых существенных многочленов последовательности, порождающей данную блочную теплицеву матрицу T_a, а $\mathcal{R}_j \in \mathbb{C}^{q\times(p+q)}$, $\mathcal{L}_j \in \mathbb{C}^{(p+q)\times p}$ – коэффициенты этих матричных многочленов. Матрица Π является субпермутатором, который строится *по индексам последовательности*. Формула (2) будет использована в главе 4 при построении полной теории сходимости последней промежуточной строки таблицы Паде, а также в главе 5 при доказательстве теоремы Монтессу де Болора для матричных аппроксимаций Паде.

Раздел 1.7 посвящен обращению конечных блочных теплицевых матриц. Формула обобщенного обращения (2) дает в этом случае целое семейство формул обращения блочных теплицевых матриц. Выбирая разные базисы в пространствах $\mathcal{N}_1^R$, $\mathcal{N}_{-1}^L$, мы получаем хорошо известные формулы обращения такие, как формулы Ли-Гюн-Ы, Сахновича, Гохберга – Хайнига и др.

Глава 2 посвящена задаче дробной факторизации рациональных матриц-функций. Мы применяем метод существенных многочленов к явному построению такой факторизации. Предварительно мы изучаем очень важные для дальнейшего (особенно в теории аппроксимаций Паде) минимальные решения уравнений Безу. *Правыми (левыми) уравнениями Безу k-го порядка* мы называем уравнения вида:

$$\begin{gathered} U_R^k(z)D_R(z) + V_R^k(z)N_R(z) = z^k I_q \\ \left(D_L(z)U_L^k(z) + N_L(z)V_L^k(z) = z^k I_p\right) \end{gathered} \tag{3}$$

для целого $k \geq 0$. В дальнейшем мы должны будем рассматривать их одновременно и будем считать, что $D_R(z), N_R(z)$, $D_L(z), N_L(z)$ определяются из взаимно простых дробных факторизаций заданной рациональной матрицы-функции $r(z)$: $r(z) = N_R(z)D_R^{-1}(z) = D_L^{-1}(z)N_L(z)$. Здесь знаменатели $D_R(z)$,

$D_L(z)$ выбраны в форме Попова. Обозначим λ_j – строчные степени знаменателя $D_L(z)$, ρ_j – столбцовые степени $D_R(z)$ (*левые и правые минимальные индексы* $r(z)$). Сумма левых (и правых) минимальных индексов называется *степенью МакМиллана* $r(z)$. Она совпадает со степенью определителя $D_L(z)$ (и $D_R(z)$). Для матрицы A мы используем обозначение $[A]^j$ ($[A]_j$) для ее j-го столбца (j-й строки).

Определение 3. *Решение уравнения (3), такое что* $\deg[V_R^k(z)]^j < \lambda_j$, *если* $\lambda_j > 0$ *и* $[V_R^k(z)]^j \equiv 0$, *если* $\lambda_j = 0$, $j = 1, \ldots, p$, *будем называть минимальным решением этого уравнения.*

Подобным образом определяется минимальное решение левого уравнения Безу.

Минимальное решение всегда существует и единственно. В разделе 2.1 изучены свойства минимальных решений, получены для них рекуррентные соотношения, доказана их согласованность, показано, что они являются решениями разностных уравнений, исследовано асимптотическое поведение коэффициентов многочленов $V_{R,L}^k$.

Дробные факторизации используются в диссертации в разных ситуациях. С одной стороны, для изучения сходимости аппроксимаций Паде нам понадобятся индексы и существенные многочлены последовательности, составленной из коэффициентов Тейлора рациональной матрицы-функции. В разделе 2.2 мы находим их в терминах дробных факторизаций и минимальных решений уравнений Безу. С другой стороны, для явного построения факторизации Винера – Хопфа аналитических матриц-функций нам потребуется явное построение дробных факторизаций. Мы получаем их в разделе 2.3 в терминах индексов и существенных многочленов последовательности, составленной из лорановских коэффициентов рациональной матрицы-функции в бесконечно удаленной точке. Главный результат этого раздела – следующая

Теорема 3. *Пусть* $r(z)$ *– правильная рациональная матрица-функция и* δ *– ее степень МакМиллана. Составим из коэффициентов Лорана этой функции последовательность* $r_M, r_{M+1}, \ldots, r_{-1}$ *для произвольного* $M \leq -2\delta + 1$.

Тогда данная последовательность имеет факторизационные существенные многочлены. Последнее означает, что старшие коэффициенты многочленов $R_{q+1}(z), \ldots, R_{p+q}(z)$ *и свободные члены многочленов* $L_1(z), \ldots, L_q(z)$ *равны нулю.*

Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_{p+q}$ *– индексы последовательности, а* $R_1(z), \ldots, R_{p+q}(z)$ *и* $L_1(z), \ldots, L_{p+q}(z)$ *– соответственно ее произвольные правые и левые существенные многочлены.*

Тогда числа $M+\mu_1+1,\dots,M+\mu_q+1$ являются правыми минимальными индексами $r(z)$, а $-\mu_{q+1},\dots,-\mu_{p+q}$ – ее левыми минимальными индексами.

Определим матричные многочлены

$$D_R(z)=\mathcal{R}_1(z),\quad D_L(z)=d_2^{-1}(z)\mathcal{L}_2(z),$$

где $\mathcal{R}_1(z)$ ($\mathcal{L}_2(z)$) – матрица первых q (последних p) правых (левых) существенных многочленов и $d_2(z)=\operatorname{diag}\left[z^{\mu_{q+1}},\dots,z^{\mu_{p+q}}\right]$. Пусть

$$N_R(z)=r(z)D_R(z),\quad N_L(z)=D_L(z)r(z).$$

Тогда $\det D_R(z)\not\equiv 0, \det D_L(z)\not\equiv 0$ и

$$r(z)=N_R(z)D_R^{-1}(z),\quad r(z)=D_L^{-1}(z)N_L(z)$$

– соответственно правая и левая взаимно простая дробная факторизация $r(z)$. Если существенные многочлены выбрать факторизационными, то знаменатели дробной факторизации имеют правильную форму.

Хотя основная причина нашего изучения дробной факторизации в том, что она будет использована для явного построения факторизации Винера – Хопфа аналитических матриц-функций (глава 3) и для исследования равномерной сходимости скалярных (глава 4) и матричных (глава 5) аппроксимаций Паде, можно указать и другие приложения полученных результатов. В разделе 2.4 в терминах индексов и существенных многочленов получена формула для обобщенного обращения ганкелевых операторов конечного ранга с рациональным матричным символом.

В **главе 3** мы применяем результаты, полученные в предыдущих главах, к задаче явного построения факторизации Винера – Хопфа матриц-функций в терминах индексов и существенных многочленов некоторой конечной последовательности, построенной по факторизуемой функции. Метод существенных многочленов позволяет это сделать для достаточно широкого класса матриц-функций, а именно, для аналитических и приводящихся к ним матриц-функций.

В разделе 3.1 мы устанавливаем связь между дробной факторизацией и факторизацией Винера – Хопфа, которая объясняет те аналогии, что отмечались ранее в этих задачах. Для того, чтобы установить эту связь мы представляем мероморфную в области D_+ матрицу-функцию $a(t)$ в виде суммы аналитической в D_+ и непрерывной на $\mathrm{D}_+\cup\Gamma$ матрицы-функции $a_+(t)$ и правильной рациональной матрицы-функции $r(t)$, являющейся суммой главных частей рядов Лорана $a(t)$ в окрестности полюсов: $a(t)=r(t)+a_+(t)$. Для

мероморфной матрицы-функции $a(t)$ можно ввести понятие дробной факторизации, скопировав его с определения дробной факторизации рациональной матрицы-функции. После этого оказывается, что задача дробной факторизации для $a(t)$ равносильна той же задаче для ее рациональной части $r(z)$ (см. предложение 3.1 в тексте диссертации). Если при этом мероморфная матрица-функция $a(t)$ такова, что $a^{-1}(t)$ является аналитической в D_+, то факторизация Винера – Хопфа $a^{-1}(t)$ легко получается из дробной факторизации $a(t)$, и наоборот (теорема 3.1). Поскольку мы умеем строить в явном виде дробную факторизацию $r(t)$, то отсюда мы получаем следующий способ явного построения факторизации Винера – Хопфа для аналитической матрицы-функции.

Теорема 4. *Пусть $a(t)$ матрица-функция порядка p аналитическая в D_+, непрерывная на $\mathrm{D}_+ \cup \Gamma$ и обратимая на Γ;*

$$c_j = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} t^{-j-1} a^{-1}(t) dt$$

– моменты матрицы-функции $a^{-1}(t)$. Для произвольного $m \geq 2\kappa$ составим последовательность $c_{-m}, c_{-m+1}, \ldots, c_{-1}$. Здесь κ – индекс Коши $\det a(t)$ относительно контура Γ.

Тогда данная последовательность имеет факторизационные существенные многочлены. Если $\mu_1, \ldots, \mu_{2p}$ – ее индексы, а $R_1(t), \ldots, R_{2p}(t); L_1(t), \ldots, L_{2p}(t)$ – произвольные факторизационные существенные многочлены, то

$$\rho_j = m + \mu_j + 1, \quad \lambda_j = -\mu_{p+j}, \quad j = 1, \ldots, p,$$

являются соответственно правыми и левыми факторизационными индексами $a(t)$, а полиномиальные множители $l_-(t), r_-(t)$ из факторизаций Винера – Хопфа строятся по формулам:

$$l_-(t) = \mathcal{L}_2(t), \quad r_-(t) = \mathcal{R}_1(t) d_r^{-1}(t).$$

Здесь $d_r(t) = \mathrm{diag}[t^{\rho_1}, \ldots, t^{\rho_p}]$.

В условиях точных вычислений знание полиномиальных факторов $l_-(t)$, $r_-(t)$ позволяет, конечно, находить и аналитические множители $l_+(t)$, $r_+(t)$. Однако это нельзя сделать в реальных вычислительных условиях. В этом недостаток результата теоремы 4. Чтобы избавиться от него, в разделе 3.2 предлагается другой метод явного построения факторизации Винера – Хопфа, который использует вместо последовательности c_{-m}^{-1} $(m \geq 2\kappa)$ центрированную относительно $-\kappa$ последовательность $c_{-n-\kappa}^{n-\kappa}$, где $n \geq \kappa$. Этот метод

позволяет находить не только полиномиальные факторы $l_-(t), r_-(t)$, но и точно вычислять первые $n-\kappa+1$ коэффициентов Тейлора аналитических множителей $l_+(t), r_+(t)$. Таким образом, если число требующихся коэффициентов Тейлора для $l_+(t), r_+(t)$ задано, то мы можем заранее выбрать длину последовательности, необходимую для их вычисления. Однако, поскольку факторизационные множители находятся неединственным образом, то для получения бóльшего числа коэффициентов Тейлора при нерациональном выборе существенных многочленов придется всю работу повторить заново. В разделе 3.3, посвященном приближенному построению факторизации, мы выясняем, каким образом выбирать существенные многочлены, чтобы построить ту же самую факторизацию Винера – Хопфа, что и на предыдущем шаге. Тогда уже найденные коэффициенты Тейлора не понадобится вычислять заново. На основе этих результатов в диссертации предложен алгоритм приближенного решения задачи факторизации аналитических матриц-функций (см. приложение 1 в диссертации).

Предыдущие результаты показывают, что факторизация Винера-Хопфа аналитической матрицы-функции $a(t)$ вполне определяется конечным числом моментов $a^{-1}(t)$, причем можно использовать различные наборы моментов. Возникает естественное желание для построения факторизации использовать как можно более простую матрицу-функцию. (Нахождение обратной матрицы является достаточно трудоемкой с вычислительной точки зрения задачей.) Оказывается, что можно предложить метод, основанный на тех же идеях, что и метод, изложенный в разделе 3.2, но использующий моменты не $a^{-1}(t)$, а более простой матрицы-функции $\Delta_-^{-1}(t)a(t)$. Здесь $\Delta_-(t)$ – скалярный многочлен от t^{-1}, являющийся множителем в факторизации Винера – Хопфа $\Delta(t) = \Delta_-(t)t^{-\kappa}\Delta_+(t)$ определителя $\Delta(t) = \det a(t)$.

Раздел 3.4 посвящен факторизации мероморфных матриц-функций. Их факторизация строится сведением к аналитическому случаю. В разделе получены легко проверяемые критерии знакопостоянства, равенства нулю и устойчивости индексов мероморфной матрицы-функции, явно вычислены размерности ядра и коядра матричного оператора Винера – Хопфа с таким символом.

Классы матриц-функций, факторизация которых явным образом приводится к факторизации аналитических матриц-функций, рассмотрены в разделе 3.5. К этим классам относятся треугольные матрицы-функции, блочно-треугольные матрицы-функции специального вида, матрицы-функции второго порядка с одной мероморфной строкой и строго невырожденные матрицы-функции, все строки которых, кроме последней, являются мероморфными.

В **главе 4** результаты глав 1, 2 применяются для построения полной теории равномерной сходимости для последней промежуточной строки.

Дадим необходимые для дальнейшего определения. Пусть $a(z)$ – функция, мероморфная в круге $\mathcal{D}_R = \left\{z \in \mathbb{C} \middle| |z| < R\right\}$ и аналитическая в начале координат. Без ограничения общности мы можем считать, что $R > 1$ и все полюсы $a(z)$ лежат в единичном круге $|z| < 1$. Пусть $r(z)$ – сумма главных частей рядов Лорана $a(z)$ в окрестностях полюсов. Тогда $a(z) = r(z) + b(z)$, где $b(z)$ является аналитической в $|z| < R$ функцией.

Обозначим через $z_1, \ldots, z_\ell$ различные полюсы $a(z)$ кратностей $s_1, \ldots, s_\ell$, соответственно, и $\lambda = s_1 + \ldots + s_\ell$ – число ее полюсов в круге $\mathcal{D}_R$. Предположим, что $\rho := |z_1| = \ldots = |z_\mu| > |z_{\mu+1}| \geq \ldots \geq |z_\ell|$. Если $m = \sum_{j=1}^{\ell} s_j$ или $m = \sum_{j=\mu+1}^{\ell} s_j$, то по теореме Монтессу де Болора аппроксимации Паде $\pi_{n,m}(z)$ сходятся при $n \to \infty$ к $a(z)$ равномерно на компактных подмножествах области $\mathcal{D}_R \setminus \{z_1, \ldots, z_\ell\}$ или $\mathcal{D}_\rho \setminus \{z_{\mu+1}, \ldots, z_\ell\}$, соответственно. Строка таблицы Паде с номером m, удовлетворяющим неравенствам $\sum_{j=\mu+1}^{\ell} s_j < m < \sum_{j=1}^{\ell} s_j$, называется *промежуточной строкой*. Глава 4 посвящена в основном изучению сходимости строки с номером $m = \lambda - 1$ (*последней промежуточной строки*). Полюсы $z_1, \ldots, z_\mu$ максимального модуля упорядочим таким образом, что $s_1 \geq \ldots \geq s_\mu$. Среди полюсов $z_1, \ldots, z_\mu$ выберем полюсы $z_1, \ldots, z_\nu$, имеющие максимальную кратность: $s_1 = \ldots = s_\nu > s_{\nu+1} \geq \ldots \geq s_\mu$. Полюсы $z_1, \ldots, z_\nu$ назовем *доминирующими полюсами* функции $a(z)$.

Опишем теперь содержание этой главы. В разделе 4.1 показано, что существенные многочлены естественным образом возникают при внимательном рассмотрении классического определения аппроксимаций Паде. Чтобы установить связь аппроксимаций Паде с существенными многочленами, мы изучаем структуру множества знаменателей $Q_{n,m}(z)$ классической аппроксимации Паде типа (n, m) и получаем параметризацию этого множества. Параметризация выглядит следующим образом: $Q_{n,m}(z) = q(z)Q_1(z)$, где $q(z)$ – произвольный многочлен степени не выше $n - \mu_1$, μ_1 – первый индекс, а $Q_1(z)$ – первый существенный многочлен последовательности a_{n-m+1}^{n+m}. Отсюда видно, что $Q_1(z)$ является знаменателем аппроксимации Паде типа (n, m) с минимальной степенью. Поэтому для того, чтобы знаменатель аппроксимации Паде находился единственным образом (с точностью до ненулевого числового множителя), к классическому определению необходимо добавить еще одно условие: *многочлен $Q_{n,m}(z)$ имеет наименьшую возможную степень.*

В дальнейшем мы всегда считаем, что в определение аппроксимации Паде входит это дополнительное условие. Тогда знаменатель $Q_{n,m}(z)$ будет являться первым существенным многочленом последовательности a_{n-m+1}^{n+m}.

Важной особенностью нашего подхода является использование в теории аппроксимаций Паде индексов и второго существенного многочлена – понятий, отсутствующих в классической теории. Они будут использованы при построении теории сходимости.

В разделе 4.2 мы выясняем причину того, что один и тот же метод – метод существенных многочленов – может быть эффективно применен в довольно далеких друг от друга разделах анализа: в задаче факторизации Винера – Хопфа и в теории аппроксимаций Паде. Мы установим, что на самом деле задача нахождения аппроксимаций Паде является частным случаем задачи факторизации Винера – Хопфа. Для установления равносильности этих задач также требуются понятия индексов и существенных многочленов.

После этих предварительных результатов мы приступаем непосредственно к исследованию сходимости последней промежуточной строки. Мы рассматриваем мероморфную функцию $a(z)$ как результат возмущения ее рациональной части $r(z)$ аналитической функцией $b(z)$. Поэтому, чтобы понять асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде для $a(z)$, вначале мы решим более простую задачу – изучим асимптотику знаменателя аппроксимаций Паде для $r(z)$. Для этого, учитывая результаты раздела 4.1, нам необходимо явно найти индексы и существенные многочлены последовательности $r_{n-m+1}^{n+m} = \{r_{n-m+1}, r_{n-m+2}, \ldots, r_{n+m}\}$, составленной из коэффициентов Тейлора рациональной дроби $r(z)$, при $m = \lambda - 1$.

В разделе 4.3 мы делаем это в терминах дробной факторизации рациональной функции $r(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$, $D(z) = (z - z_1)^{s_1} \cdots (z - z_\ell)^{s_\ell}$ и минимальных решений $V_k(z)$ уравнений Безу (см. определение 3). Оказалось, что при $n \geq \lambda$ последовательность $r_{n-\lambda+2}^{n+\lambda-1}$, соответствующая аппроксимации Паде типа $(n, \lambda - 1)$ для $r(z)$, имеет устойчивые индексы $n, n+1$ и существенные многочлены $Q_1(z) = V_{n+\lambda}(z)$, $Q_2(z) = D(z)$.

Таким образом, для рациональной функции $r(z)$ знаменателем $Q_n(z)$ аппроксимации Паде типа $(n, \lambda - 1)$ является многочлен $V_{n+\lambda}(z)$ из минимального решения. Далее мы явно его вычисляем. Оказывается (теорема 4.9 в диссертации), что многочлены $V_k(z)$ удовлетворяют разностному уравнению

$$V_{k+\lambda}(z) + d_{\lambda-1}V_{k+\lambda-1}(z) + \ldots + d_0 V_k(z) = 0, \quad k \geq 0, \tag{4}$$

где $D(z) = z^\lambda + d_{\lambda-1}z^{\lambda-1} + \ldots + d_0$, откуда получаем

$$V_k(z) = \sum_{j=1}^{\lambda} \sum_{i=1}^{j} d_{\lambda-i+1} v_{k+j-i} z^{\lambda-j}, \quad k \geq 0, \tag{5}$$

где v_k – коэффициент при старшей степени $z^{\lambda-1}$ многочлена $V_k(z)$. Этот коэффициент, очевидно, также удовлетворяет разностному уравнению (4). По

теореме о структуре общего решения линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами имеем

$$v_k = p_1(k)z_1^k + \ldots + p_\ell(k)z_\ell^k, \quad k \geq 0. \tag{6}$$

Здесь $p_j(k) = C_j^0 + C_j^1 k + \ldots + C_j k^{s_j - 1}$ – многочлен от k степени $s_j - 1$ и старший коэффициент C_j находится по формуле:

$$C_j = \frac{1}{(s_j - 1)! z_j^{s_j - 1} D_j^2(z_j) A_j},$$

где $D_j(z) = \frac{D(z)}{(z - z_j)^{s_j}}$, $1 \leq j \leq \ell$, A_j – коэффициент при $(z - z_j)^{-s_j}$ в разложении $a(z)$ в ряд Лорана в окрестности полюса $z = z_j$ (см. теорему 4.10 в диссертации).

В силу формулы (5) для изучения асимптотики минимальных решений $V_k(z)$ при $k \to \infty$ нам нужно исследовать асимптотику коэффициентов v_k. Из формулы (6) следует, что асимптотическое поведение v_k будет определяться доминирующими полюсами $z_1 = \rho e^{2\pi i \Theta_1}, \ldots, z_\nu = \rho e^{2\pi i \Theta_\nu}$. Введем вектор $\xi = \left(e^{2\pi i \Theta_1}, \ldots, e^{2\pi i \Theta_\nu}\right) \in \mathbb{T}^\nu$. Асимптотика v_k при $k \to \infty$ зависит от предельного поведения ξ^k. Поэтому нам потребуется замыкание в $\mathbb{T}^\nu$ полугруппы $\left\{\xi^k\right\}_{k \geq 0}$. Оказывается, что это множество $\mathbb{F}$ совпадает с замыканием циклической группы $\left\{\xi^k\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$, то есть является монотетической подгруппой тора $\mathbb{T}^\nu$. Раздел 4.4 посвящен вычислению $\mathbb{F}$ методами теории топологических групп. Основной результат раздела (теорема 4.11 в диссертации) позволяет явно найти $\mathbb{F}$, если известна матрица линейных зависимостей между аргументами $\Theta_0 = 1, \Theta_1, \ldots, \Theta_\nu$.

Теорема 5. *Пусть $z_1 = \rho e^{2\pi i \Theta_1}, \ldots, z_\nu = \rho e^{2\pi i \Theta_\nu}$ – доминирующие полюсы функции $a(z)$. Пусть $r + 1$ – ранг над полем $\mathbb{Q}$ системы действительных чисел $\Theta_0 = 1, \Theta_1, \ldots, \Theta_\nu$.*

Если $r = \nu$, то $\mathbb{F} = \mathbb{T}^\nu$.

Пусть $0 \leq r < \nu$ и полюсы $z_1, \ldots, z_\nu$ пронумерованы таким образом, что $\Theta_0 = 1, \Theta_1, \ldots, \Theta_r$ – максимальная линейно независимая над $\mathbb{Q}$ подсистема системы $\Theta_0, \Theta_1, \ldots, \Theta_\nu$ и

$$\Theta_j = \sum_{k=0}^{r} q_{kj} \Theta_k, \quad q_{kj} \in \mathbb{Q}, \quad j = r + 1, \ldots, \nu.$$

Пусть α_{kk} – наименьший общий знаменатель чисел q_{kj} и $\alpha_{kj} = \alpha_{kk} q_{kj}$ для $k = 0, \ldots, r$; $j = r + 1, \ldots, \nu$. Составим целочисленную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \ldots & 0 & \alpha_{0,r+1} & \ldots & \alpha_{0\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \alpha_{rr} & \alpha_{r,r+1} & \ldots & \alpha_{r\nu} \end{pmatrix}$$

и приведем ее к диагональной форме Смита над кольцом $\mathbb{Z}$:

$$A = S_1 \Delta S_2^{-1}.$$

Здесь S_1, S_2 – обратимые над кольцом $\mathbb{Z}$ матрицы. Обозначим через S матрицу, полученную из S_2 вычеркиванием первой строки и первых $r+1$ столбцов. Приведем теперь S к канонической форме Смита:

$$S = T_1 \Delta_0 T_2^{-1}.$$

Тогда инвариантные факторы матрицы S, определяющие вид множителя Δ_0, имеют вид $1, \ldots, 1, \sigma$, где σ – наибольший общий делитель миноров порядка $\nu - r$ матрицы S.

Обозначим через Q_j строку матрицы T_1^{-1} с номером $\nu - r + j$ для $j = 0, \ldots, r$. Тогда группа $\mathbb{F}$ изоморфна группе $\mathbb{Z}_\sigma \times \mathbb{T}^r$, где $\mathbb{Z}_\sigma$ – конечная циклическая группа порядка σ, и состоит из точек $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_\nu)$ тора $\mathbb{T}^\nu$, имеющих вид $\tau = \xi_n^{Q_0} t_1^{Q_1} \ldots t_r^{Q_r}$. Здесь $\xi_n = e^{\frac{2\pi i n}{\sigma}}$, $n = 0, \ldots, \sigma - 1$, и $(t_1, \ldots, t_r)$ – произвольная точка тора $\mathbb{T}^r$.

Важность группы $\mathbb{F}$ в нашей задаче заключается в том, что она параметризует семейство многочленов, являющихся пределами всех сходящихся подпоследовательностей последовательности $V_k(z)$. После ее вычисления мы можем изучить асимптотику знаменателей $Q_n(z) = V_{n+\lambda}(z)$ аппроксимаций Паде типа $(n, \lambda - 1)$ для рациональной функции $r(z)$. Это сделано в разделе 4.5 (теорема 4.13 в диссертации). Далее оказалось, что асимптототическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде для мероморфной функции $a(z)$ в точности такое же, как для ее рациональной части $r(z)$. Чтобы доказать это, мы используем соображения устойчивости и предварительно устанавливаем в разделе 4.6 подготовительную теорему 4.14. Она основана на непрерывности специальным образом построенных проекторов на ядра некоторых теплицевых матриц. При ее доказательстве используется формула для обобщенного обращения теплицевых матриц. Это еще раз подчеркивает необходимость введения второго существенного многочлена для изучения сходимости аппроксимаций Паде.

Для формулировки основного результата раздела 4.7 введем обозначение $S_j(\tau) = C_1 z_1^j \tau_1 + \ldots + C_\nu z_\nu^j \tau_\nu$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_\nu) \in \mathbb{F}$, и дадим следующее

Определение 4. *Целое неотрицательное число $\delta_+(\tau)$ $(\delta_-(\tau))$ назовем плюс (минус)-дефектом точки $\tau \in \mathbb{F}$, если $\delta_+(\tau)$ $(\delta_-(\tau))$ – наименьшее число такое, что $S_{\delta_+(\tau)}(\tau) \neq 0$ $(S_{-\delta_-(\tau)-1}(\tau) \neq 0)$.*

При фиксированном τ мы будем использовать более короткие обозначения δ_+, δ_-, S_j. Будем говорить, что многочлен $X(z) = x_0 + x_1 z + \ldots + x_n z^n$ является *d-нормированным*, если $x_d = 1$ для некоторого d, $0 \le d \le n$.

Теорема 6. *Пусть τ – произвольная точка группы $\mathbb{F}$ и Λ_τ – соответствующая ей последовательность номеров такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \left(e^{2\pi i n \Theta_1}, \ldots, e^{2\pi i n \Theta_\nu}\right) = \tau, \quad n \in \Lambda_\tau.$$

Пусть $\delta_+(\delta_-)$ – плюс(минус)-дефект точки τ.

Тогда для всех достаточно больших $n \in \Lambda_\tau$ знаменатель $Q_n(z)$ аппроксимации Паде типа $(n, \lambda - 1)$ для мероморфной функции $a(z)$ можно $(\lambda - \delta_+ - 1)$-нормировать и для последовательности нормированных многочленов $Q_n(z)$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(z) = W(z,\tau), \quad n + \lambda \in \Lambda_\tau, \quad \tau \in \mathbb{F}.$$

Здесь $W(z,\tau)$ – многочлен степени $\lambda - \delta_+ - 1$, имеющий $z = 0$ нулем кратности δ_- и вычисляющийся по формуле:

$$W(z,\tau) = S_{\delta_+}^{-1}(\tau)\omega(z,\tau)(z - z_1)^{s_1 - 1} \ldots (z - z_\nu)^{s_\nu - 1}(z - z_{\nu+1})^{s_{\nu+1}} \ldots (z - z_\ell)^{s_\ell},$$

$$\omega(z,\tau) = \sum_{j=1}^{\nu} C_j \Delta_j(z)\tau_j, \quad S_{\delta_+} = \sum_{j=1}^{\nu} C_j z_j^{\delta_+}\tau_j,$$

$$\Delta_j = \frac{\Delta(z)}{z - z_j}, \quad \Delta(z) = (z - z_1)\ldots(z - z_\nu).$$

Многочленами $W(z,\tau)$ исчерпываются все возможные пределы сходящихся подпоследовательностей каким-либо образом нормированных знаменателей $Q_n(z)$.

Из этой теоремы, в силу непрерывности корней многочленов, получается следствие об асимптотическом поведении нулей знаменателей аппроксимаций Паде $a(z)$ для строки с номером $m = \lambda - 1$.

Итак, множество предельных точек множества полюсов аппроксимаций Паде типа $(n, \lambda - 1)$ мероморфной функции $a(z)$ найдено. Оно состоит из полюсов $a(z)$, причем кратность каждого доминирующего полюса уменьшается на 1, а кратность остальных полюсов остается без изменения, и нулей семейства многочленов $\omega(z,\tau) = \sum_{j=1}^{\nu} C_j \Delta_j(z)\tau_j$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_\nu) \in \mathbb{F}$. Множество $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ нулей этого семейства многочленов мы называем *множеством дополнительных предельных точек*. Вместе с точками $z_1, \ldots, z_\ell$ оно образует множество всех предельных точек нулей знаменателей $Q_n(z)$ аппроксимаций Паде типа

$(n, \lambda - 1)$ при $n \to \infty$. В разделе 4.8 изучается геометрия этого множества предельных точек. Отметим, в частности, два крайних случая. В следующей теореме выясняется, когда множество дополнительных предельных точек $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ пусто.

Теорема 7. *Последовательность знаменателей $Q_n(z)$ аппроксимаций Паде типа $(n, \lambda - 1)$ имеет предел при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда имеется один доминирующий полюс.*

Второй результат относится к случаю общего положения, когда $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ является максимально обширным множеством. Обозначим через $\mathcal{N}_j$ множество точек комплексной плоскости $\mathbb{C}$, удовлетворяющих неравенству

$$2|C_j\Delta_j(z)| \le \sum_{k=1}^{\nu} |C_k\Delta_k(z)|, \quad j = 1, \dots, \nu,$$

и положим $\mathcal{N} = \bigcap\limits_{j=1}^{\nu} \mathcal{N}_j$.

Теорема 8. *Если $\Theta_0 = 1, \Theta_1, \dots, \Theta_\nu$ – линейно независимы над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то $\mathcal{N}_{\mathbb{F}} = \mathcal{N}$.*

В общем случае можно лишь утверждать, что $\mathcal{N}_{\mathbb{F}} \subseteq \mathcal{N}$.

Знание множества предельных точек полюсов позволяет найти области, внутри которых вся строчная последовательность $\pi_{n,\lambda-1}(z)$ равномерно сходится к $a(z)$ (раздел 4.9). Прежде всего, мы находим равномерные пределы $\pi_{n,\lambda-1}(z)$ по всем последовательностям $\Lambda_\tau - \lambda$, $\tau \in \mathbb{F}$.

Теорема 9. *Пусть τ – произвольная точка группы параметров $\mathbb{F}$ и Λ_τ – соответствующая ей последовательность номеров. Пусть K – любой компакт, лежащий в круге $|z| < \rho$ и не содержащий нулей многочлена $W(z, \tau)$. Здесь ρ – модуль доминирующих полюсов. Если $\pi_n(z)$ – аппроксимация Паде $a(z)$ типа $(n, \lambda - 1)$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \|\pi_n(z) - a(z)\|_{C(K)} = 0, \quad n + \lambda \in \Lambda_\tau.$$

Обозначим через $\mathbb{U}_{\mathbb{F}}$ ($\mathbb{U}$) открытое множество, которое получено из круга $\mathcal{D}_\rho = \{z \big| |z| < \rho\}$ удалением полюсов функции $a(z)$ и той части множества $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ ($\mathcal{N}$), которая лежит в этом круге. Ясно, что всегда $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{U}_{\mathbb{F}}$, а в случаях, указанных в разделе 4.8 (см., в частности, теорему 8), может быть и совпадение этих множеств. Напомним, что для явного нахождения множества $\mathbb{U}$ необходимы только старшие лорановские коэффициенты разложений $a(z)$ в

окрестностях полюсов, а для построения $\mathbb{U}_{\mathbb{F}}$ требуется также информация об арифметической природе этих полюсов. Теорема 9 вместе с упрощенным вариантом теоремы Витали позволяет доказать основной результат главы 4.

Теорема 10. *Последовательность аппроксимаций Паде $\pi_{n,\lambda-1}(z)$ сходится равномерно к $a(z)$ внутри $\mathbb{U}_{\mathbb{F}}$*

В случае, когда неизвестна информация об арифметической природе доминирующих полюсов, можно утверждать равномерную сходимость внутри меньшего множества $\mathbb{U}$.

В разделе 4.10 получены новые классы мероморфных функций, для которых справедлива гипотеза Бейкера и Грейвс-Морриса. Кроме того, дана процедура получения контрпримеров к этой гипотезе. Это позволяет провести оценку константы c_m из теоремы Буслаева – Гончара – Суетина[9].

Предложенный метод может быть эффективен и для других промежуточных строк. Изучена также асимптотика знаменателей аппроксимаций Паде для предпоследней промежуточной строки в случае одного доминирующего полюса.

В **главе 5** метод существенных многочленов применяется к изучению матричных аппроксимаций Паде. Мы хотим, чтобы существенные многочлены появились в теории матричных аппроксимаций Паде так же, как и в скалярном случае, естественным образом. Поэтому в разделе 5.1 мы даем определение матричных аппроксимаций Паде, мотивированное формальной аналогией задачи аппроксимации Паде с краевой задачей Римана для вектора. Основой этого определения является следующая векторная задача аппроксимации.

Определение 5. *Пусть $a(z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, $a_i \in \mathbb{C}^{p\times q}$, матричный степенной ряд и n, m – произвольные неотрицательные целые числа. Задачей правой векторной аппроксимации типа (n,m) для $a(z)$ назовем задачу отыскания пары векторных многочленов $P_{n,m}(z) \in \mathbb{C}^{p\times 1}[z]$ и $Q_{n,m}(z) \in \mathbb{C}^{q\times 1}[z]$, $Q_{n,m}(z) \not\equiv 0$, для которых для некоторого целого числа k, удовлетворяющего неравенствам $n-m \le k \le n+m$, справедливы ограничения на степени $\deg P_{n,m}(z) \le k$, $\deg Q_{n,m}(z) \le k-n+m$ и выполняется условие*

$$a(z)Q_{n,m}(z) - P_{n,m}(z) = \mathcal{O}(z^{n+m+1}), \quad z \to 0.$$

Число k будем называть порядком решения $(P_{n,m}(z), Q_{n,m}(z))$ этой задачи.

[9]Буслаев В.И., Гончар А.А., Суетин С.П. О сходимости подпоследовательностей m-й строки таблицы Паде // *Мат. сб.*– 1983.– Т. 120.– 540–545.

Ясно, что классической аппроксимации Паде соответствует решение порядка n. Порядок решения этой аппроксимационной задачи является аналогом порядка на бесконечности решения однородной краевой задачи Римана. Отметим, однако, что, в отличие от последней задачи, порядок не определяется однозначно: любое решение порядка k является также решением любого бо́льшего, чем k, порядка.

Далее по аналогии со скалярным случаем мы строим для задачи типа (n, m) систему решений минимально возможных порядков. Эту систему мы называем *правой канонической системой решений типа* (n, m) для матричного степенного ряда $a(z)$. Порядки решений, входящих в каноническую систему, назовем *правыми минимальными порядками* этой системы. Процесс определения правой канонической системы для задачи векторной аппроксимации мы проводим по аналогии с построением канонической системы в теории векторной краевой задачи Римана. Каноническая система решений строится не единственным образом. Оказывается, однако, любые две канонические системы имеют один и тот же набор минимальных порядков $\kappa_1, \ldots, \kappa_r$, которые совпадают с индексами $\mu_1, \ldots, \mu_{p+q-\omega}$, а каноническая система состоит из правых существенных многочленов последовательности $a_{n-m+1}, \ldots, a_{n+m}$ (теорема 5.1). Таким образом, условие минимальности так же, как и в скалярном случае, приводит естественным образом к появлению индексов и существенных многочленов. Определение правых матричных аппроксимаций Паде выглядит теперь следующим образом.

Определение 5. *Пусть* $(P_1(z), Q_1(z)), \ldots, (P_q(z), Q_q(z))$ *– первые* q *решений из произвольной правой канонической системы типа* (n, m) *для* $a(z)$. *Составим матричные многочлены*

$$P^R_{n,m}(z) = (P_1(z) \ldots P_q(z)), \quad Q^R_{n,m}(z) = (Q_1(z) \ldots Q_q(z)).$$

Если $\det Q^R_{n,m}(z) \not\equiv 0$, *то рациональная матрица-функция*

$$\pi^R_{n,m}(z) = P^R_{n,m}(z) Q^R_{n,m}(z)^{-1}$$

называется правой аппроксимацией Паде типа (n, m) *для* $a(z)$.

Знаменатель $Q^R_{n,m}(z)$ правой аппроксимации Паде выражается через первые q правых существенных многочленов, то есть правая аппроксимация Паде типа (n, m) существует тогда и только тогда, когда для последовательности a^{n+m}_{n-m+1} найдутся правые существенные многочлены, для которых $\det \mathcal{R}_1(z) \not\equiv 0$. В тех случаях, которые мы будем далее рассматривать в теории сходимости матричных аппроксимаций Паде, это условие выполняется.

Аналогичным образом с использованием *левой канонической системы* определяется левая матричная аппроксимация Паде.

Отметим, что в классическом определении матричных аппроксимаций Паде эти аппроксимации могли не существовать или могли существовать только правые (левые) аппроксимации. Кроме того, знаменатель мог быть не единственным. Преимуществом нашего определения является то, что (по крайней мере, для случая $\mu_q < \mu_{q+1}$) правые и левые аппроксимации Паде типа (n, m) существуют или не существуют одновременно, а знаменатели определяются единственным образом с точностью до умножения на унимодулярный матричный многочлен.

Аналогия с краевой задачей Римана не является случайной. В разделе 5.2 мы показываем, что задача построения канонической системы типа (n, m) для $a(z)$ (то есть задача построения аппроксимации Паде) равносильна задаче факторизации Винера – Хопфа для некоторой блочно-треугольной матрицы-функции порядка $p + q$. Таким образом, имеет место важный факт: *проблема нахождения канонической системы решений для задачи аппроксимации Паде является частным случаем задачи факторизации Винера – Хопфа (краевой задачи Римана)*. В диссертационной работе этот факт непосредственно не используется. Вместо указанной задачи факторизации Винера – Хопфа мы будем применять равносильный ей метод существенных многочленов. Мы продемонстрируем, что преимущества нашего подхода не ограничиваются только формальной теорией матричных аппроксимаций Паде. В разделах 5.3 – 5.4 мы доказываем матричные аналоги теоремы Монтессу де Болора – центральной теоремы в теории сходимости строк скалярных аппроксимаций Паде.

Пусть $a(z)$ – матрица-функция размером $p \times q$, аналитическая в $z = 0$, мероморфная в круге $|z| < R$ и имеющая там конечное число полюсов. Без ограничения общности мы можем считать, что $R > 1$ и все полюсы $a(z)$ лежат в единичном круге $|z| < 1$. Пусть $r(z)$ – сумма главных частей рядов Лорана $a(z)$ в окрестностях полюсов. Тогда $a(z) = r(z) + b(z)$, где $p \times q$ матрица-функция $b(z)$ является аналитической в $|z| < R$. Чтобы найти знаменатель аппроксимации Паде типа (n, m) для $a(z)$, нам необходима последовательность $a_{n-m+1}^{n+m} = \{a_{n-m+1}, a_{n-m+2}, \ldots, a_{n+m}\}$, состоящая из коэффициентов Тейлора $a(z)$. Мы будем рассматривать эту последовательность как возмущение последовательности $r_{n-m+1}^{n+m} = \{r_{n-m+1}, r_{n-m+2}, \ldots, r_{n+m}\}$ последовательностью $b_{n-m+1}^{n+m} = \{b_{n-m+1}, b_{n-m+2}, \ldots, b_{n+m}\}$ тейлоровских коэффициентов матрицы-функции $b(z)$. Наш подход к исследованию сходимости позволяет исследовать те случаи, когда индексы последовательности r_{n-m+1}^{n+m} устойчивы при малом

возмущении. Оказывается, что для последовательности r_{n-m+1}^{n+m} существует четыре случая устойчивости.

В разделе 5.3 мы изучаем первый случай устойчивости, когда для $a(z)$ выполняются следующие условия: знаменатели $D_R(z)$, $D_L(z)$ взаимно простой дробной факторизации рациональной части $r(z)$ мероморфной матрицы-функции $a(z)$ имеют обратимые старшие коэффициенты и $\lambda+\rho$ – четно. Здесь $\rho = \deg D_R(z)$, $\lambda = \deg D_L(z)$ и рассматривается строка таблицы Паде с номером $m = \frac{\lambda+\rho}{2}$. Индексы и существенные многочлены последовательности r_{n-m+1}^{n+m} нам известны благодаря теории, развитой в главе 2. Далее мы показываем, что первые q (последние p) правых (левых) существенных многочленов последовательности r_{n-m+1}^{n+m} и возмущенной последовательности a_{n-m+1}^{n+m} неограниченно сближаются при $n \to \infty$. Чтобы доказать это, мы строим специальным образом проекторы на ядра блочных теплицевых матриц (здесь используются результаты главы 1) и применяем лемму о непрерывности проекторов на ядра нетеровых операторов. В результате получается следующий результат, являющийся основной частью матричного аналога теоремы Монтессу де Болора.

Теорема 11. *Пусть имеет место первый случай устойчивости, $m = \frac{\lambda+\rho}{2}$ и $Q_n^R(z)$ $(Q_n^L(z))$ – знаменатель правой (левой) аппроксимации Паде типа (n,m) для $a(z)$.*

Тогда для всех достаточно больших n эти знаменатели можно пронормировать так, что $Q_n^R(0) = I_q$ $(Q_n^L(0) = I_p)$ и

$$\lim_{n\to\infty} Q_n^R(z) = D_R^0(z) \quad \left(\lim_{n\to\infty} Q_n^L(z) = D_L^0(z)\right),$$

где $D_R^0(z) = D_R(z)D_R^{-1}(0)$ $\left(D_L^0(z) = D_L^{-1}(0)D_L(z)\right)$.

Получение матричного аналога теоремы Монтессу де Болора теперь не представляет труда.

Теорема 12. *Пусть имеет место первый случай устойчивости, $m = \frac{\lambda+\rho}{2}$ и K – любое компактное подмножество круга $|z| < R$, в котором $a(z)$ не имеет полюсов. Пусть $\pi_n^R(z)$ $(\pi_n^L(z))$ – правая (левая) аппроксимация Паде типа (n,m) для $a(z)$.*

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \|a(z) - \pi_n^R(z)\|_{C(K)} = 0 \quad \left(\lim_{n\to\infty} \|a(z) - \pi_n^L(z)\|_{C(K)} = 0\right).$$

Если $p = q = 1$, то осуществляется только I случай устойчивости, и мы получаем классическую теорему Монтессу де Болора. Однако в матричном случае существует, по крайней мере, еще один случай, когда справедлив аналог теоремы Монтессу де Болора. Это показано в разделе 5.4, где рассматривается второй случай устойчивости, в котором $\lambda + \rho$ – нечетно и строка имеет номер $m = \frac{\lambda+\rho-1}{2}$.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Адуков, В.М. Об индексах и существенных многочленах / В.М. Адуков // *Изв. вузов. Математика.*– 1986.– №6.– С. 47–49.

2. Адуков, В.М. Структура ядра и обращение теплицевых и ганкелевых матриц / В.М. Адуков // *Изв. вузов. Математика.*– 1986.– №7.– С. 3–8.

3. Adukov, V.M. On Wiener – Hopf factorization of meromorphic matrix functions / V.M. Adukov // *Integral Equations and Operator Theory.*– 1991.– Vol.14, №6.– P. 767–774.

4. Адуков, В.М. Факторизация Винера – Хопфа мероморфных матриц-функций / В.М. Адуков // *Алгебра и анализ.*– 1992.– Т.4, вып. 1.– С. 54–74.

5. Adukov, V.M. On factorization indices of strictly nonsingular 2×2 matrix function / V.M. Adukov // *Integral Equations and Operator Theory.*– 1995.– Vol.21, №1.– P. 1–11.

6. Adukov, V.M. Generalized inversion of block Toeplitz matrices / V.M. Adukov // *Linear Algebra Appl.*– 1998.– Vol.274.– P. 85–124.

7. Адуков, В.М. О факторизации аналитических матриц-функций / В.М. Адуков // *Теор. и матем. физика.*– 1999.– Т. 118, №3.– С. 324–336.

8. Adukov, V.M. Generalized inversion of finite rank Hankel and Toeplitz operators with rational matrix symbols / V.M. Adukov // *Linear Algebra Appl.*– 1999.– Vol. 290.– P. 119–134.

9. Adukov, V.M. The essential polynomial approach to convergence of matrix Padé approximants / V.M. Adukov // *Contemporary Math.*– 2001.– Vol.280.– P. 71–87.

10. Adukov, V.M. Fractional and Wiener – Hopf factorizations / V.M. Adukov // *Linear Algebra Appl.*– 2002.– Vol.340.– P. 199–213.

11. Adukov, V.M. The uniform convergence of subsequences of the last intermediate row of the Padé table / V.M. Adukov // *J. Approx. Theory.*– 2003.– Vol.122, №2.– P. 160–207.

12. Адуков, В.М. Матричная задача аппроксимации Паде как краевая задача Римана / В.М. Адуков // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Математика, физика, химия.*– 2003.– Вып. 3, №6(22).– С. 20–35.

13. Адуков, В.М. Задача аппроксимации Паде как краевая задача Римана / В.М. Адуков // *Весці НАН Беларусі. Сер. Фізіка-матэм. навук.*– 2004.– №4.– С. 55–61.

14. Adukov, V.M. On the set of uniform convergence for the last intermediate row of the Padé table / V.M. Adukov // *East J. on Approx.*– 2005.– Vol.11, №4.– P. 375–380.

15. Адуков, В.М. Об асимтотическом поведении знаменателей аппроксимаций Паде для предпоследней промежуточной строки / В.М. Адуков // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Математика, физика, химия.*– 2005.– Вып. 5, №2(42).– С. 3–8.

16. Адуков, В.М. Об оценке константы в теореме Буслаева – Гончара – Суетина / В.М. Адуков // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Математика, физика, химия.*– 2005.– Вып. 6, №6(46).– С. 4–10.

17. Адуков, В.М. Факторизация треугольных матриц-функций второго порядка / В.М. Адуков; Челябинский политехн. ин-т.– Челябинск, 1982.– 14 с.– Библиогр.: 6 назв. Деп. в ВИНИТИ 01.12.1982, №5930-82.

18. Адуков, В.М. Структура ядра и обращение блочных теплицевых матриц / В.М. Адуков; Ред. Сиб. мат. журн.– Новосибирск, 1985.– 20 с.– Библиогр.: 7 назв. Деп. в ВИНИТИ 29.12.85, №9030-В.

19. Адуков, В.М. Факторизация Винера – Хопфа матричных многочленов / В.М. Адуков // *Прикладные задачи математического анализа:* сб. науч. тр.– Челябинск: ЧПИ, 1986.– С. 4–8.

20. Адуков, В.М. Обобщенная обратимость теплицевых матриц / В.М. Адуков // *Вестник Челябинского университета. Сер. Математика. Механика.*– 1994.– №1.– С. 3–12.

21. Адуков, В.М. О факторизации Винера – Хопфа матричных многочленов / В.М. Адуков // *Вестник Челябинского университета. Сер. Математика. Механика.* – 1996.– №1. – С. 3–14.

22. Adukov, V.M. On connection between fractional factorizations and Wiener – Hopf factorizations / V.M. Adukov // *Известия Челябинского научного центра.*– 2000. – Вып. 3(8).– С. 3–7.

23. Адуков, В.М. О равномерной сходимости подпоследовательностей $(\lambda - 1)$-й строки таблицы Паде / В.М. Адуков // *Известия Челябинского научного центра.*– 2001.– Вып. 1.– С. 3–7.

24. Адуков, В.М. О геометрии множества предельных точек полюсов $(\lambda - 1)$-й строки таблицы Паде / В.М. Адуков// *Известия Челябинского научного центра.*– 2001.– Вып. 1.– С. 8–11.

25. Адуков, В.М. О существовании сходящихся подпоследовательностей строки таблицы Паде для мероморфной функции / В.М. Адуков // *Известия Челябинского научного центра.*– 2002.– Вып. 3.– С. 3–7.

26. Adukov, V.M. On an approximate solution of a Wiener – Hopf factorization problem for meromorphic matrix functions / V.M. Adukov // *Proc. of Second Intern. Sci. Conf.* "Computer Algebra in Fundamental and Applied Research and Education", Minsk, September 20–24 1999.– Minsk, 1999.– C. 6–9.

27. Adukov, V.M. On the row convergence of matrix Padé approximants / V.M. Adukov // *Тр. междунар. конф.* "Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы. I. Комплексный анализ", Уфа, 2000.– Уфа, 2000.– С. 210–214.

28. Адуков, В.М. Факторизация Винера – Хопфа матричных многочленов / В.М. Адуков // *Тезисы докладов XI Всесоюзной школы по теории операторов в функциональных пространствах,* Челябинск, 26–30 мая 1986.– Челябинск, 1986.– С. 9.

29. Adukov, V.M. Generalized inversion of block Toeplitz matrices / V.M. Adukov // *The 6th Conference of ILAS,* Chemnitz, 1996: abstr.– Chemnitz, 1996.– P. 1.

30. Адуков, В.М. О приближенном решении задачи факторизации Винера – Хопфа мероморфных матриц-функций / В.М. Адуков // *Тезисы докладов второй междунар. конф.* "Компьютерная алгебра в фундаментальных и прикладных исследованиях и образовании", Минск, 20–24 сент. 1999.– Минск, 1999.– С. 11–12.

31. Адуков, В.М. О теореме Монтессу для матричных аппроксимаций Паде / В.М. Адуков // *Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы* "Современный анализ и его применения", Воронеж, 28 янв.–4 февр. 2000.– Воронеж, 2000.– С. 38–39.

Адуков Виктор Михайлович

ФАКТОРИЗАЦИЯ ВИНЕРА – ХОПФА
И АППРОКСИМАЦИИ ПАДЕ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

01.01.01 – математический анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Издательство Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 26.09.2006. Формат 60 × 84 1/16. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 1,86. Уч.-изд.л. 1,52. Тираж 100 экз. Заказ 308/328.

Отпечатано в типографии Издательства ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск,
пр. им. В.И. Ленина, 76.