

Министерство образования Российской Федерации  
Южно-Уральский государственный университет  
Кафедра “Конструирование и производство радиоаппаратуры”

621.396.6(07)  
В656

Н.И. Войтович, А.В. Ершов, А.Н. Соколов

## **УКВ ВИБРАТОРНЫЕ АНТЕННЫ**

Учебное пособие

Челябинск  
Издательство ЮУрГУ  
2002

УДК 621.396.67(075.8) + 621.397.6(075.8)

Войтович Н.И., Ершов А.В., Соколов А.Н. УКВ вибраторные антенны: Учебное пособие. — Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2002.— 85 с.

Учебное пособие предназначено для студентов специальностей 2008 — “Проектирование и технология радиоэлектронных средств”, 2302 — “Сервис бытовой радиоэлектронной аппаратуры” а также 2016 — “Радиоэлектронные системы” и 2007 — “Радиотехника”, выполняющих курсовые работы и проекты по дисциплинам: “Техническая электродинамика”, “Электродинамика и распространение радиоволн”, “Антенно-фидерные устройства в кабельном и спутниковом телевидении”, “Антенны и устройства СВЧ”.

Пособие состоит из двух частей. В части I излагаются основные понятия и расчётные методы теории УКВ вибраторных антенн. Главное внимание уделяется рассмотрению структуры электромагнитных полей в дальней, ближней и промежуточной зонах дипольных антенн и антенн конечных размеров, рассмотрению входного сопротивления и диаграмм направленности антенн. Важнейшие выкладки и преобразования проводятся достаточно подробно и сопровождаются необходимыми пояснениями. В части II рассмотрены конкретные вибраторные антенны УКВ и СВЧ-диапазона.

Ил. 57, табл. 4, список лит. — 26 назв.

Рекомендовано УМО по образованию в области радиотехники, электроники, биомедицинской техники и автоматизации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 200800 “Проектирование и технология радиоэлектронных средств” направления подготовки дипломированных специалистов 654300 “Проектирование и технология электронных средств”.

Одобрено учебно-методической комиссией Приборостроительного факультета.

Рецензенты: Тамбовцев В.И., Слепак Л.С.

© Издательство ЮУрГУ, 2002.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ ОСНОВНЫХ ВЕЛИЧИН</b> .....	5
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	7
<b>ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ РАДИОВОЛН ВИБРАТОРНЫМИ АНТЕННАМИ</b> .....	9
<b>Глава 1. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ АНТЕНН</b> .....	9
1.1. Уравнения Максвелла.....	9
1.2. Излучение электромагнитных волн элементарным электрическим вибратором.....	12
1.2.1. Элементарный электрический вибратор.....	12
1.2.2. Анализ структуры электромагнитного поля элементарного электрического вибратора.....	15
1.2.3. Диаграммы направленности элементарного электрического вибратора.....	22
1.2.4. Мощность и сопротивление излучения элементарного электрического вибратора.....	24
<b>Глава 2. ТЕОРИЯ ВИБРАТОРНЫХ АНТЕНН</b> .....	25
2.1. Электрический вибратор.....	25
2.2. Интегральное уравнение Галлена для вибратора.....	26
2.3. Распределение тока и заряда вдоль вибратора.....	29
2.4. Диаграмма направленности вибратора.....	34
2.5. Сопротивление излучения вибратора.....	37
2.6. Коэффициент направленного действия вибратора.....	39
2.7. Электромагнитное поле вблизи вибратора.....	39
2.8. Расчет мощности излучения и входного импеданса вибратора методом наводимых ЭДС.....	43
2.9. Приближённый расчёт входного импеданса вибратора методом эквивалентных схем.....	47
<b>ЧАСТЬ ВТОРАЯ. АНТЕННЫ ВИБРАТОРНОГО ТИПА</b> .....	51
<b>Глава 3. ВИБРАТОРНЫЕ АНТЕННЫ СВЧ</b> .....	51
3.1. Вибраторы, питаемые двухпроводными линиями.....	51
3.1.1. Петлевой вибратор.....	52
3.1.2. Шунтовой вибратор.....	54
3.1.3. Комбинированный вибратор.....	54
3.1.4. Биконический вибратор.....	55
3.2. Вибраторы, питаемые коаксиальным кабелем.....	55
3.2.1. Симметрирующее устройство типа U-колена.....	57
3.2.2. Мостиковое симметрирующее устройство.....	57
3.2.3. Симметрирующие устройства сантиметрового диапазона волн.....	59
3.3. Несимметричные вибраторы и способы их питания.....	60
3.4. Турникетные вибраторы.....	62
3.5. Кольцевая антенная решетка.....	64

<b>Глава 4. КОНСТРУКЦИЯ СИММЕТРИЧНОЙ ВИБРАТОРНОЙ</b>	
<b>АНТЕННЫ</b> .....	<b>70</b>
4.1. Устройство вибраторной антенны .....	70
4.2. Пример описания конструкции антенны .....	75
4.3. Расчет механической прочности вибраторной антенны.....	75
<b>ЛИТЕРАТУРА</b> .....	<b>80</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ</b> .....	<b>82</b>
П1. Значения относительной диэлектрической проницаемости некоторых веществ при $t = 20^{\circ}\text{C}$ .....	82
П2. Значения удельной проводимости некоторых веществ при $t = 20^{\circ}\text{C}$ .....	82
П3. Значения относительной магнитной проницаемости некоторых веществ при $t = 20^{\circ}\text{C}$ .....	83
П4. Формулы векторного анализа .....	83
Определение операций.....	83
Операции в декартовых координатах .....	84
Операции в цилиндрических координатах .....	84
Операции в сферических координатах .....	84
Основные теоремы.....	85
Некоторые тождества .....	85

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ ОСНОВНЫХ ВЕЛИЧИН

$t$  – время, секунда (с)

$\vec{E}$  – напряжённость электрического поля (В/м)

$\vec{H}$  – напряжённость магнитного поля (А/м)

$\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость (Ф/м)

$\varepsilon_0$  – электрическая постоянная ( $10^{-9}/(36\pi)$  Ф/м)

$\varepsilon_r$  – относительная диэлектрическая проницаемость

$\mu$  – магнитная проницаемость среды (Гн/м)

$\mu_0$  – магнитная постоянная ( $4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м)

$\mu_r$  – относительная магнитная проницаемость

$\sigma$  – проводимость среды (Сим/м)

$\vec{j}^э$  – плотность электрического тока (А/м<sup>2</sup>)

$\vec{j}^м$  – плотность магнитного тока (В/м<sup>2</sup>)

$f$  – частота (Гц)

$\omega$  – круговая частота (1/с)

$\psi_0$  – начальная фаза стороннего тока элементарного электрического вибратора

$\lambda$  – длина волны (м)

$\lambda_0$  – длина волны в свободном пространстве (м)

$\rho$  – объёмная плотность электрических зарядов (Кл/м<sup>3</sup>)

$m$  – объёмная плотность магнитных зарядов (Вб/м<sup>3</sup>)

$\vec{p}$  – момент электрического диполя (Кл·м)

$\gamma$  – постоянная распространения

$\alpha$  – коэффициент затухания

$\beta$  – фазовая постоянная

$\vec{A}^p$  – векторный запаздывающий электрический потенциал

$\vec{A}_\infty^p$  – векторный запаздывающий электрический потенциал в дальней зоне

$\vec{A}^m$  – векторный запаздывающий магнитный потенциал

$I$  – электрический ток (А)

$I^{CT}$  – сторонний электрический ток (А)

$q$  – электрический заряд (Кл)

$Q(z)$  – линейная плотность заряда (Кл/м)

$\vec{\Pi}$  – вектор Пойнтинга (Вт/м<sup>2</sup>)

$\vec{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности

$k$  – волновое число (1/м)

$k_0$  – волновое число в свободном пространстве (1/м)

$l$  – длина (м)

$R_\Sigma$  – сопротивление излучения (Ом)

$R_{\Sigma n}$  – сопротивление излучения, отнесённое к пучности тока (Ом)

$W_B$  – волновое сопротивление линии передачи (Ом)

$W_0$  – волновое сопротивление в свободном пространстве (Ом)

$c$  – скорость света в вакууме ( $3 \cdot 10^8$ )

$S_R$  – плотность потока мощности в дальней зоне

$(x, y, z)$  или  $(\zeta, \eta, \zeta)$  – декартовы координаты

$(\rho, \varphi, z)$  или  $(r, \varphi, z)$  – цилиндрические координаты

$(r, \varphi, \theta)$  – сферические координаты

## ВВЕДЕНИЕ

Для излучения и приема электромагнитных волн с давних пор находят широкое применение антенные системы, вибраторы которых являются отрезками тонких проводов. Теоретический вывод о существовании электромагнитных волн вместе с гипотезой об электромагнитной природе света, принадлежит Джемсу Клерку Максвеллу (1831 – 1879 гг.). В современной физике уравнения Максвелла являются фундаментальными законами теории электромагнетизма. Возбуждение электромагнитных волн в лаборатории и их экспериментальное исследование было осуществлено позднее Генрихом Герцем (1857 – 1894 гг.). Герц использовал возбуждаемый в центре провод длиной 60 см, имеющий на каждом конце металлическую пластину площадью  $40 \text{ см}^2$  [1]. В этой антенне затухающие колебания возбуждались искровым промежутком и имели основную частоту 53,5 МГц или длину волны 5,6 м. Для приема волн использовалась медная изолированная проволока толщиной 2 мм. На концах проволоки были укреплены два изолированных шара диаметром 10 см, в середину её был введен искровой микрометр. Провода были натянуты на расстоянии 60 см параллельно друг другу. Возбуждение промежутка первого провода потоком искр сопровождалось потоком искр во вторичном проводе. Герц предвосхитил многое из того, что теперь относится к радиотехнической электродинамике. Тем не менее, он не ставил вопрос о техническом применении электромагнитных волн.

Самая первая проволочная антенна в виде заземленного провода была изобретена и применена основоположником радиотехники А.С. Поповым в 1895 г. Источником электромагнитных колебаний в его опытах служил передающий вибратор Герца, однако в передатчике Попова искровой разрядник включался между проводом и землёй.

В начале прошлого века, когда радиосвязь приобрела уже практическое значение, использовались главным образом длинные волны (длиной порядка километра). Антенны для этих систем представляли собой объёмную систему, размеры которой были очень большие, но малы по сравнению с длиной волны. Эти антенны рассматривались как системы с сосредоточенными постоянными. Объёмная система в виде ёмкости настраивалась в резонанс катушкой индуктивности.

Но, начиная с двадцатых годов, в радиотехнической практике осваиваются волны все более короткие. Антенны стали рассматриваться как системы с распределенными постоянными, и для их анализа и синтеза была применена теория длинных линий. В какой-то мере в этот период процессы распространения электромагнитных волн вдоль проводников и процессы излучения рассматривались отдельно. Для расчета основных характеристик проволочной антенны, таких как, например, характеристики излучения, требуется знать распределение тока по длине вибратора. Ясно, что строгое электродинамическое решение этой задачи представляет серьезные трудности. Поэтому в течение долгого времени из-за отсутствия электродинамической теории данную задачу трактовали с помощью телеграфных уравнений. Конечно, этот подход ни

физически, ни математически обосновать невозможно. Фактически рассматривалось излучение заданных источников, а в действительности распределение токов надо ещё найти. Однако ввиду практической важности данной задачи нужно было получить хотя бы самое грубое её решение.

Впоследствии “двойственность” в подходе к проблеме работы проволочной антенны в связи с развитием антенн УКВ и особенно антенн СВЧ диапазона исчезла.

Электродинамическая теория вибраторов была построена в работах Халлена [2], М.А. Леонтовича и М.Л. Левина [3, 4] и других авторов. В этой теории вибратор предполагается достаточно тонким: его радиус  $a$  не только удовлетворяет условию  $ka \ll 1$ , где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\lambda$  — длина волны, но и  $\ln(1/ka)$  является большим числом.

В дальнейшем Л.А. Вайштейном [5] вариационными методами исследованы приемные и передающие вибраторы с импедансными граничными условиями. П.Я. Уфимцев [6] методом физической теории дифракции получил выражение для поля, рассеянного вибратором. Для расчета “толстых” вибраторов, как правило, необходимо использовать вычислительные методы, в частности методы интегральных уравнений для плотности тока на вибраторах. Для цилиндрических вибраторов эти методы разработаны Е.Н. Васильевым [7] и Н.Н. Говоруном [8].

К настоящему времени разработаны методы, позволяющие получать решения задач о возбуждении и излучении вибраторными антеннами при помощи вычислительных процессов, потенциально бесконечных, но редуцируемых таким образом, что за конечное число операций требуемые величины могут быть вычислены с желаемой точностью. Электродинамическая задача сводится к системе алгебраических уравнений, порядок которой в принципе не ограничен, а для реализации достаточной точности модели должен быть сделан настолько большим, что принципиально важно применение ЭВМ [9, 10].

История развития антенной техники, а вибраторных антенн в особенности, представляет собой одну из наиболее интересных и поучительных сторон истории радиотехники. Процессы, связанные с работой антенн, излучением и приемом электромагнитных волн, являются наиболее сложными, с которыми имеет дело радиотехника. Антенные системы в наибольшей мере концентрируют в себе комплекс чисто физических явлений, многообразных радиотехнических и радиофизических аспектов, конструкторских и технологических проблем.

Пособие разбито на две части. В первую часть выделены теоретические разделы. Вторая часть посвящена конкретным типам вибраторных антенн. Этот материал необходим при выполнении курсовых и дипломных проектов.



## ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

# ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ РАДИОВОЛН ВИБРАТОРНЫМИ АНТЕННАМИ

## Глава 1. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ АНТЕНН

### 1.1. Уравнения Максвелла

Современная теория антенн базируется на основных уравнениях электродинамики — уравнениях Максвелла. Эти уравнения являются обобщением данных опыта, и их справедливость подтверждается практикой.

Электромагнитное поле в каждой точке в каждый момент времени определяется четырьмя величинами: векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ , характеризующими электрическое поле, и векторами  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$ , характеризующими магнитное поле.

В дальнейшем изложении будут иметься в виду электромагнитные процессы, гармонические во времени, т.е. изменяющиеся во времени по закону  $\vec{E}(t) = \vec{E}_m \cos(\omega t + \varphi)$  или в комплексной форме по закону  $\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_m \exp(i\omega t)$ , где  $\dot{\vec{E}}_m = \vec{E}_m \exp(i\varphi)$  — вектор комплексной амплитуды напряженности электрического поля,  $\vec{E}_m$  — амплитуда напряженности электрического поля,  $\varphi$  — начальная фаза колебаний. При этом вектор мгновенного значения напряженности электрического поля записывается в виде  $\vec{E}(t) = \text{Re}[\dot{\vec{E}}_m \exp(i\omega t)]$ .

Всюду в дальнейшем будет использоваться международная система единиц измерения СИ. Будет иметься также в виду однородная, изотропная и непроводящая среда, в некоторых областях которой задано распределение возбуждающих электрических и магнитных токов (излучающая система антенны). При указанных условиях уравнения Максвелла в дифференциальной форме записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \dot{\vec{H}}_m &= i\omega\varepsilon\dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_m^{\text{э}}, \\ \text{rot } \dot{\vec{E}}_m &= -i\omega\mu\dot{\vec{H}}_m - \dot{\vec{j}}_m^{\text{м}}, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

где  $\dot{\vec{E}}_m$  — вектор комплексной амплитуды напряженности электрического поля, В/м;  $\dot{\vec{H}}_m$  — вектор комплексной амплитуды напряженности магнитного поля, А/м;  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды, Ф/м (для вакуума:  $\varepsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi)$  Ф/м);  $\mu$  — магнитная проницаемость среды, Гн/м (для вакуума:  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$  Гн/м);  $\dot{\vec{j}}_m^{\text{э}}$  — вектор комплексной амплитуды объемной плотности стороннего электрического тока, А/м<sup>2</sup>;  $\dot{\vec{j}}_m^{\text{м}}$  — вектор комплексной амплитуды объемной плотности стороннего магнитного тока, В/м<sup>2</sup>.

Сторонний магнитный ток является фиктивной величиной, поскольку магнитных зарядов в природе не существует. Однако введение этого понятия

позволяет значительно упростить целый ряд расчетов. К уравнениям (1.1) обычно еще добавляются уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \dot{\vec{E}}_m &= \dot{\rho}_m / \varepsilon, \\ \operatorname{div} \dot{\vec{H}}_m &= \dot{m}_m / \mu, \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

где  $\dot{\rho}_m$  и  $\dot{m}_m$  — комплексные амплитуды объемных плотностей электрических и магнитных зарядов, соответственно.

Уравнения (1.2) являются следствием уравнений (1.1), так как имеют место уравнения непрерывности электрических и магнитных токов:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \dot{\vec{j}}_m + i\omega\dot{\rho}_m &= 0, \\ \operatorname{div} \dot{\vec{j}}_m^M + i\omega\dot{m}_m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Для свободного пространства величина  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 3 \cdot 10^8$  м/с представляет собой скорость распространения света в вакууме. Параметр  $W_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi$  Ом носит название волнового сопротивления свободного пространства. Также заметим, что  $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \omega/c = 2\pi/\lambda_0$  есть волновое число (коэффициент фазы) и  $\lambda_0$  — длина волны колебаний, распространяющихся в свободном пространстве.

Из уравнений (1.3) следует, что при определении полей можно исходить только из наличия токов, поскольку заряды сразу определяются, как только задано распределение токов в излучающих системах.

Так как измерение любого поля сводится, в сущности, к извлечению некоторой энергии из поля, следует указать, как связана энергия поля с величинами, характеризующими поле. Следующее утверждение относится к числу основных положений теории электромагнитного поля: *в пространстве, в котором распространяется электромагнитное поле, энергия этого поля распределена с объемной плотностью  $(\varepsilon E^2 + \mu H^2)/2$  и выражается в виде объемного интеграла:*

$$W = \int_V \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{2} dV.$$

В этом выражении используются мгновенные значения  $E$  и  $H$ .

Для решения уравнений Максвелла (1.1) обычно вводят два вспомогательных векторных поля: векторный запаздывающий потенциал электрических токов  $\dot{\vec{A}}^e$  и векторный запаздывающий потенциал магнитных токов  $\dot{\vec{A}}^M$ . Векторы электромагнитного поля  $\dot{\vec{E}}$  и  $\dot{\vec{H}}$  определяются через эти вспомогательные векторы следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{E}} &= -\frac{i}{\omega\varepsilon\mu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{A}}^e - i\omega\dot{\vec{A}}^e - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \dot{\vec{A}}^M, \\ \dot{\vec{H}} &= -\frac{i}{\omega\varepsilon\mu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{A}}^M - i\omega\dot{\vec{A}}^M + \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \dot{\vec{A}}^e. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Векторы  $\dot{\vec{A}}^e$  и  $\dot{\vec{A}}^m$  удовлетворяют следующим векторным неоднородным уравнениям Гельмгольца:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \dot{\vec{A}}^e + k^2 \dot{\vec{A}}^e &= -\mu \dot{\vec{j}}^e, \\ \nabla^2 \dot{\vec{A}}^m + k^2 \dot{\vec{A}}^m &= -\varepsilon \dot{\vec{j}}^m. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Таким образом, интегрирование уравнений Максвелла сводится к нахождению решений векторных неоднородных уравнений (1.5). Решение задачи об излучении заданного распределения токов приводит к следующему результату:

$$\dot{\vec{A}}^e = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\vec{j}}^e(\xi, \eta, \zeta)}{R} \exp(-ikR) dV, \quad \dot{\vec{A}}^m = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\vec{j}}^m(\xi, \eta, \zeta)}{R} \exp(-ikR) dV,$$

где  $R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$ ;  $x, y, z$  — декартовы координаты точки наблюдения;  $\xi, \eta, \zeta$  — декартовы координаты точки интегрирования;  $dV = d\xi d\eta d\zeta$  — элемент объема.

Напомним, что решения уравнений Максвелла являются единственными, если эти решения: 1) удовлетворяют соответствующим граничным условиям на поверхностях раздела сред; 2) удовлетворяют условиям излучения на бесконечности (принципу излучения на бесконечности); 3) являются конечными во всех областях, не содержащих  $\delta$ -образных источников. При возбуждении электромагнитного поля линейным распределением токов решения уравнений Максвелла должны обладать дипольной особенностью, т.е. при приближении точки наблюдения к излучающей нити тока поле должно стремиться к бесконечности.

Граничные условия на поверхности раздела двух сред сводятся к непрерывности касательных составляющих векторов напряженности электрического и магнитного полей при переходе из среды 1 в среду 2:

$$E_{t1} = E_{t2}; H_{t1} = H_{t2}. \quad (1.6)$$

На поверхности идеального электрического проводника граничные условия принимают несколько другую форму. Касательная составляющая вектора напряженности электрического поля на поверхности идеального проводника равна нулю, а нормальная составляющая равна отношению поверхностной плотности электрического заряда к диэлектрической проницаемости среды, окружающей проводник:

$$E_t = 0; E_n = q/\varepsilon. \quad (1.7)$$

Что касается вектора напряженности магнитного поля, то его нормальная составляющая на поверхности идеального проводника равна нулю, а касательная составляющая численно совпадает с поверхностной плотностью электрического тока

$$H_n = 0; H_t = j^e, \text{ причем } \vec{H} \perp \vec{j}^e. \quad (1.8)$$

Условия на бесконечности сводятся к тому, что электромагнитное возмущение от возбуждающих источников должно удаляться на бесконечность в виде бегущих волн, при этом не может существовать волн, бегущих из бесконечности к возбуждающим источникам.

При расчете энергетических характеристик антенн важное значение имеет теорема Умова — Пойнтинга. В комплексной форме эта теорема сводится к соотношению

$$\frac{1}{2} \int_A [\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m^*]_n dA + i\omega \int_V \left( \frac{\mu |\dot{\vec{H}}_m|^2}{2} - \frac{\varepsilon |\dot{\vec{E}}_m|^2}{2} \right) dV + \int_V \frac{\sigma |\dot{\vec{E}}_m|^2}{2} dV = \frac{1}{2} \int_V \left( -\dot{\vec{j}}_m \dot{\vec{H}}_m^* - \dot{\vec{j}}_m^* \dot{\vec{E}}_m \right) dV, \quad (1.9)$$

где  $n$  — внешняя нормаль к поверхности  $A$ , охватывающей объем  $V$ , содержащий возбуждающие источники.

Правая часть этого уравнения определяет комплексную мощность, отбираемую от генераторов. Первый член в левой части уравнения равен комплексной мощности, выходящей из объема  $V$ , второй член определяет реактивную мощность в объеме  $V$ , и третий член характеризует мощность, выделяемую в объеме  $V$  в виде тепла. Плотность потока мощности, выходящей из объема  $V$ , определяется комплексным вектором Пойнтинга

$$\dot{\vec{S}} = \frac{1}{2} [\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m^*]. \quad (1.10)$$

## 1.2. Излучение электромагнитных волн элементарным электрическим вибратором

Генрих Герц и исследователи, продолжавшие его работы в течение 40 лет, главным образом, интересовались свойствами электромагнитных волн на сравнительно больших расстояниях от источника. Для таких целей структура антенны оказывается несущественной и её удобно заменить некоторой моделью, а именно осциллирующим диполем или диполем Герца, представляющим собой короткую нить тока, колеблющегося с постоянной амплитудой и частотой  $f$  между точечными периодически изменяющимися концентрациями зарядов  $q$ , имеющими противоположные знаки (рис.1.1). То есть  $I(z) = I(0) = i\omega q(h)$  и  $R \approx r$  — расстояние от центра.

Электромагнитное поле такого диполя было определено Герцем в 1888 г. Представление о диполе Герца имеет отнюдь не только историческое значение, оно играет существенную роль в теории антенн. В антенной практике подобно диполю Герца ведут себя металлические стержни, отрезки провода и даже целые сооружения в виде башен и мачт, если их длина мала в сравнении с длиной волны.



Рис.1.1.  
Вибратор Герца

### 1.2.1. Элементарный электрический вибратор

Элементарным электрическим вибратором (ЭЭВ) называют короткий по сравнению с длиной волны провод, обтекаемый

электрическим током, амплитуда и фаза которого не изменяются вдоль провода. Этот вибратор является по существу идеализированной, удобной для анализа излучающей системой, так как практически создание вибратора с неизменными по всей длине амплитудой и фазой тока невозможно. Однако вибратор Герца (см. рис.1.1) оказывается весьма близким по своим свойствам к ЭЭВ. Благодаря имеющимся на его концах металлическим шарам, которые обладают значительной емкостью, амплитуда тока слабо изменяется вдоль вибратора. Неизменность фазы обеспечивается малыми по сравнению с длиной волны размерами вибратора.

Изучение поля ЭЭВ крайне важно для понимания процесса излучения электромагнитных волн антеннами. Любое проводящее тело, обтекаемое токами, можно считать как бы состоящим из множества элементарных электрических вибраторов, а при определении поля, создаваемого этими токами, можно воспользоваться принципом суперпозиции, т.е. рассматривать его как сумму полей элементарных вибраторов.

Перейдем к анализу поля ЭЭВ, расположенного в безграничной однородной изотропной среде, характеризуемой параметрами  $\varepsilon$ ,  $\mu$ . Ток в вибраторе будем считать известным, т.е. сторонним током, изменяющимся по закону  $I^{ct} = I_m^{ct} \cos(\omega t + \psi_0)$ , где  $I_m^{ct}$  — его амплитуда, а  $\psi_0$  — начальная фаза (фаза в момент времени  $t = 0$ ). Так как поле, создаваемое вибратором, в рассматриваемом случае является монохроматическим, удобно воспользоваться методом комплексных амплитуд. Вместо тока  $I^{ct}$  введем комплексную величину  $\dot{I}^{ct} = \dot{I}_m^{ct} \exp(i\omega t)$ , где  $\dot{I}_m^{ct} = I_m^{ct} \exp(i\psi_0)$  — комплексная амплитуда стороннего тока. Ток  $I^{ct}$  связан с  $\dot{I}_m^{ct}$  обычным соотношением  $I^{ct} = \text{Re}[\dot{I}_m^{ct} \exp(i\omega t)]$ .

Таким образом, задача сводится к нахождению поля по заданному распределению тока. Сначала найдем векторный потенциал  $\dot{A}^3$ . С целью упрощения записи индекс “э” в обозначении  $\dot{A}^3$  далее будем опускать. Введем сферическую систему координат  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , полярная ось которой (ось Z) совпадает с осью вибратора, а начало координат находится в его центре (рис.1.2).

Комплексная амплитуда векторного электрического потенциала в случае монохроматического поля при произвольном распределении токов в объеме  $V$  определяется формулой:

$$\dot{A}_m = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\dot{j}_m^{ct}(\xi, \eta, \zeta) \exp(-ikR)}{R} dV.$$

Разобьем интегрирование по объему, занимаемому ЭЭВ, на интегрирование по площади его поперечного сечения  $\Delta S$  и по длине вибратора  $l$ . Для упрощения преобразований будем считать поперечный размер вибратора (диаметр) малым по сравнению с его длиной  $l$ . Учитывая, что

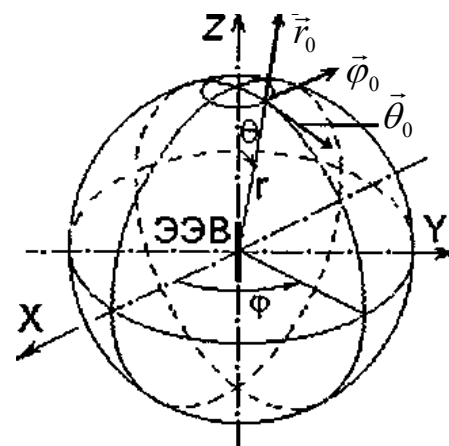


Рис.1.2. Система координат

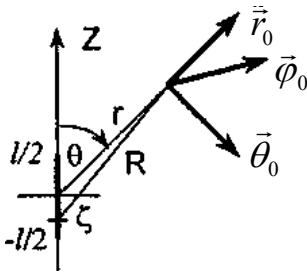


Рис.1.3. К вычислению векторного потенциала

$\int_{\Delta S} \dot{\vec{j}}_m^{\text{ct}} dS = \vec{z}_0 \dot{I}_m^{\text{ct}}$ , представим эту формулу в виде:

$$\dot{\vec{A}}_m = \vec{z}_0 \frac{\mu \dot{I}_m^{\text{ct}}}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\exp(-ikR)}{R} d\zeta, \quad (1.11)$$

где  $R = \sqrt{r^2 + \zeta^2 - 2r\zeta \cos\theta}$ , а  $\zeta$  — значение координаты точки интегрирования (рис.1.3).

При вычислении интеграла (1.11) ограничимся случаем, когда расстояние от вибратора до точек, в которых определяется поле, велико по сравнению с длиной вибратора ( $r \gg l$ ). Тогда в знаменателе подынтегрального выражения величину  $R$  можно считать равной  $r$  и вынести за знак интеграла. Так как  $|R - r| \leq l/2$ , то *наибольшая относительная погрешность*, возникающая при замене  $R$  на  $r$ , имеет порядок  $l/(2r) \ll 1$ . Кроме того, по предположению вибратор мал в волновом масштабе  $l \ll \lambda$ , а  $k = \omega \sqrt{\epsilon\mu} = \omega/c = 2\pi f/c = 2\pi/\lambda$ , и в (1.11) можно заменить  $\exp(-ikR)$  на  $\exp(-ikr)$ . При такой замене погрешность определения фазы подынтегрального выражения равна  $k|R - r| \leq \pi l/\lambda \ll 1$ . С учетом изложенного формула (1.11) принимает вид:

$$\dot{\vec{A}}_m = \vec{z}_0 \dot{A}_{zm}, \quad \dot{A}_{zm} = \frac{\mu \dot{I}_m^{\text{ct}} l \exp(-ikr)}{4\pi r}.$$

Вектор  $\dot{\vec{H}}_m$  связан с  $\dot{\vec{A}}_m$  соотношением  $\dot{\vec{H}}_m = (1/\mu) \text{rot } \dot{\vec{A}}_m$ . Найдя  $\dot{\vec{H}}_m$ , определим  $\dot{\vec{E}}_m$  из первого уравнения Максвелла:

$$\dot{\vec{E}}_m = -\frac{i}{\omega\epsilon} \text{rot } \dot{\vec{H}}_m \quad (1.12)$$

В сферической системе координат  $\text{rot } \dot{\vec{A}}_m$  вычисляется по формуле (П.17). В рассматриваемом случае вектор  $\dot{\vec{A}}_m$  параллелен оси  $Z$ . Чтобы воспользоваться равенством (П.17), нужно найти проекции вектора  $\dot{\vec{A}}_m$  на орты  $\vec{r}_0$ ,  $\vec{\theta}_0$  и  $\vec{\varphi}_0$  (см. рис.1.3). Так как орт  $\vec{\varphi}_0$  лежит в плоскости, перпендикулярной оси  $Z$ , а углы между осью  $Z$  и ортами  $\vec{r}_0$  и  $\vec{\theta}_0$  равны, соответственно,  $\theta$  и  $\theta + \pi/2$ , то  $\dot{A}_{rm} = \dot{A}_{zm} \cos\theta$ ;  $\dot{A}_{\theta m} = -\dot{A}_{zm} \sin\theta$ ;  $\dot{A}_{\varphi m} = 0$ . Применяя формулу (П.17) и учитывая, что все составляющие вектора  $\dot{\vec{A}}_m$  не зависят от переменной  $\varphi$ , получаем, что вектор  $\dot{\vec{H}}_m$  имеет только азимутальную составляющую:

$$\dot{\vec{H}}_m = \vec{\varphi}_0 \dot{H}_{\varphi m}; \quad \dot{H}_{\varphi m} = \frac{1}{\mu r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{A}_{\theta m}) - \frac{\partial \dot{A}_{rm}}{\partial \theta} \right\}.$$

Этот результат можно было предвидеть из физических соображений, так как прямолинейный ток вибратора может создать только кольцевые магнитные силовые линии, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси вибратора.

Произведя дифференцирование, получим

$$\dot{H}_{\varphi m} = \frac{iI_m^{\text{ct}}lk^2}{4\pi} \left[ \frac{1}{kr} - i \left( \frac{1}{kr} \right)^2 \right] \sin \theta e^{-ikr}, \quad \dot{H}_{rm} = \dot{H}_{\theta m} = 0. \quad (1.13)$$

Для определения вектора  $\dot{\vec{E}}_m$  подставим найденный вектор  $\dot{\vec{H}}_m$  в (1.12). Учитывая, что  $\dot{H}_{rm} = \dot{H}_{\theta m} = 0$  и  $\partial \dot{H}_{\varphi m} / \partial \varphi = 0$ , приходим к выражению

$$\dot{\vec{E}}_m = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \left\{ \frac{\vec{r}_0}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \dot{H}_{\varphi m}) - \frac{\vec{\theta}_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{H}_{\varphi m}) \right\}.$$

После дифференцирования имеем  $\dot{\vec{E}}_m = \vec{r}_0 \dot{E}_{rm} + \vec{\theta}_0 \dot{E}_{\theta m}$ , где

$$\dot{E}_{rm} = \frac{iI_m^{\text{ct}}lk^3}{2\pi\omega\varepsilon} \left[ \left( \frac{1}{kr} \right)^2 - i \left( \frac{1}{kr} \right)^3 \right] \cos \theta e^{-ikr} \quad (1.14)$$

$$\dot{E}_{\theta m} = \frac{iI_m^{\text{ct}}lk^3}{4\pi\omega\varepsilon} \left[ \frac{1}{kr} - i \left( \frac{1}{kr} \right)^2 - \left( \frac{1}{kr} \right)^3 \right] \sin \theta e^{-ikr} \quad (1.15)$$

Полученные формулы определяют составляющие комплексных амплитуд векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Для перехода к мгновенным значениям векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  нужно полученные выражения умножить на  $\exp(i\omega t)$ , а затем отделить действительную часть ( $\vec{E} = \text{Re} \left\{ \dot{\vec{E}}_m \exp(i\omega t) \right\}$ ,  $\vec{H} = \text{Re} \left\{ \dot{\vec{H}}_m \exp(i\omega t) \right\}$ ).

## 1.2.2. Анализ структуры электромагнитного поля элементарного электрического вибратора

### 1.2.2.1. Деление пространства вокруг вибратора на зоны

Из полученных формул следует, что вектор напряженности электрического поля, создаваемого ЭЭВ, имеет две составляющие  $E_r$  и  $E_\theta$ , а вектор  $\vec{H}$  — одну  $H_\varphi$ . Таким образом, в любой точке пространства вектор  $\vec{E}$  лежит в меридиональной плоскости, т.е. в плоскости, проходящей через ось вибратора и рассматриваемую точку, а вектор  $\vec{H}$  — в азимутальной плоскости, т.е. в плоскости, перпендикулярной оси вибратора.

Из выражений (1.13), (1.14) и (1.15) видно, что зависимость амплитуд составляющих векторов  $\dot{\vec{E}}_m$  и  $\dot{\vec{H}}_m$  от расстояния  $r$  определяется величинами  $1/(kr)$ ,  $1/(kr)^2$  и  $1/(kr)^3$ . При больших значениях  $kr$  ( $kr \gg 1$ ) величинами  $1/(kr)^2$  и  $1/(kr)^3$  можно пренебречь по сравнению с  $1/(kr)$ , и, наоборот, при малых значениях  $kr$  ( $kr \ll 1$ ) основными будут величины  $1/(kr)^3$  для составляющих вектора  $\vec{E}$  и  $1/(kr)^2$  — для вектора  $\vec{H}$ . Поэтому при анализе структуры электромагнитного поля вибратора пространство вокруг вибратора делят на три зоны: *дальнюю* или *волновую* ( $kr \gg 1$ ), *ближнюю* ( $kr \ll 1$ ) и *промежуточную*, где  $kr$  соизмеримо с единицей.

Величина  $kr$  зависит от соотношения между расстоянием от вибратора до точки, в которой вычисляется поле, и длиной волны. Так как  $k = 2\pi/\lambda$ , то условия  $kr \gg 1$ ,  $kr \ll 1$ ,  $kr \cong 1$ , определяющие дальнюю, ближнюю и промежуточную зоны, эквивалентны условиям  $2\pi r \gg \lambda$ ,  $2\pi r \ll \lambda$ ,  $2\pi r \cong \lambda$ , соответственно.

Отметим, однако, что члены порядка  $1/(kr)^3$  встречаются лишь в поле электрически коротких диполей; в поле ближней зоны более длинных антенн они отсутствуют. Если наложить условия менее строгие, чем условие  $r \gg l \gg a$ , то должны появиться еще более высокие степени  $1/(kr)$ .

Перейдем к анализу свойств электромагнитного поля элементарного электрического вибратора в различных зонах.

### 1.2.2.2. Дальняя (волновая) зона

Дальняя или волновая зона, как уже указывалось, характеризуется условием  $2\pi r \gg \lambda$ . Из сравнения формул (1.14) и (1.15) следует, что в этом случае можно пренебречь составляющей  $\dot{E}_r$  по сравнению с  $\dot{E}_\theta$ . Кроме того, в выражениях для  $\dot{E}_\theta$  и  $\dot{H}_\varphi$  можно в квадратных скобках пренебречь слагаемыми  $1/(kr)^2$  и  $1/(kr)^3$  по сравнению с  $1/(kr)$ . Учитывая, что  $k = 2\pi/\lambda$  и  $k = 2\pi\omega\sqrt{\varepsilon\mu}/\lambda$ , получаем:

$$\dot{E}_\theta = \frac{i\dot{I}_m^{\text{ст}}l}{2\lambda r} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sin\theta e^{i(\omega t - kr)}, \quad \dot{H}_\varphi = \frac{i\dot{I}_m^{\text{ст}}l}{2\lambda r} \sin\theta e^{i(\omega t - kr)}. \quad (1.16)$$

Таким образом, в дальней зоне напряженность электрического поля имеет только составляющую  $\dot{E}_\theta$ , а напряженность магнитного поля — составляющую  $\dot{H}_\varphi$ , которые изменяются синфазно.

Поверхность, во всех точках которой в один и тот же момент времени фаза рассматриваемой функции имеет одинаковые значения, называется *поверхностью равных фаз* (ПРФ). В случае монохроматического поля на ПРФ постоянна фаза комплексной амплитуды рассматриваемой функции. В анализируемом случае ПРФ определяются уравнением  $r = \text{const}$ , т.е. представляют собой концентрические сферы с центром в середине вибратора.

Выберем какую-либо поверхность равных фаз и проследим, что происходит с нею с течением времени. Фаза составляющей  $\dot{E}_\theta$  в точке с координатой  $r_0$  в момент времени  $t_0$  равна  $\psi_0 = \omega t_0 - kr_0 + \pi/2$ . Записывая выражение для фазы в точке с координатой  $r_1 = r_0 + \Delta r$  в момент  $t_1 = t_0 + \Delta t$  и приравнивая это выражение  $\psi_0$ , получаем, что  $\omega\Delta t = k\Delta r$ . Следовательно, за время  $\Delta t$  поверхность равной фазы смещается на расстояние  $\Delta r$  и в момент  $t_1$  представляет собой сферу радиуса  $r_0 + \Delta r$ . Скорость перемещения поверхности равной фазы (фазовая скорость)

$$\vec{v}_\phi = \vec{r}_0 v_\phi = \vec{r}_0 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta r / \Delta t) = \vec{r}_0 (\omega / k) = \vec{r}_0 c,$$

где  $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} = c_0/\sqrt{\varepsilon_r/\mu_r}$  — скорость света в среде с параметрами  $\varepsilon$ ,  $\mu$ , а  $c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \cong 3 \cdot 10^8$  м/с — скорость света в вакууме,  $\varepsilon_r$  ( $\mu_r$ ) — относительная диэлектрическая (магнитная) проницаемость среды.



Как видно, поле (1.16) — электромагнитная волна, расходящаяся от вибратора. Таким образом, в дальней зоне поле ЭЭВ представляет собой сферическую волну, распространяющуюся от вибратора со скоростью света  $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ . Векторы  $\vec{E}_m$  и  $\vec{H}_m$  этой волны взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению распространения волны. Волны, обладающие таким свойством, называют поперечными.

Распространение волны сопровождается переносом энергии. Средняя за период плотность потока энергии равна  $\vec{\Pi}_{cp} = \text{Re} \vec{\Pi}$ . Комплексный вектор Пойнтинга в рассматриваемом случае является чисто вещественной величиной, поэтому

$$\vec{\Pi}_{cp} = \text{Re} \vec{\Pi} = \vec{\Pi} = \vec{r}_0 \frac{1}{2} \left( \frac{|I_m^{cr}| l}{2\lambda r} \right)^2 \sqrt{\mu/\epsilon} \sin^2 \theta. \quad (1.17)$$

Из этого выражения следует, что излучение электромагнитной энергии максимально в направлениях, перпендикулярных оси вибратора ( $\theta = \pi/2$ ) и не зависит от угла  $\varphi$ . Вдоль своей оси ( $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ ) вибратор не излучает.

Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются синфазно. На рис.1.4 показано изменение векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  вдоль радиуса  $r$  в некоторый момент времени  $t = t_0$ , а на рис.1.5 приведена зависимость значений  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в точке  $r = r_0$  от времени.

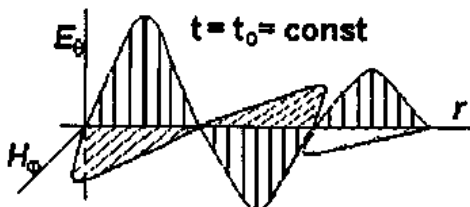


Рис.1.4. Изменение векторов  $E$  и  $H$  вдоль радиуса  $r$  в некоторый момент времени  $t = t_0$ .

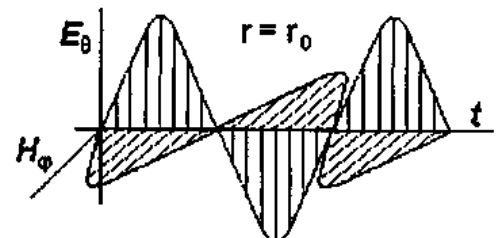


Рис.1.5. Зависимость значений  $E$  и  $H$  в точке  $r = r_0$  от времени.

Важным параметром электромагнитной волны является ее *характеристическое сопротивление*  $Z_c$ , равное отношению поперечных к направлению распространения волны составляющих векторов  $\vec{E}_m$  и  $\vec{H}_m$ . Так как рассматриваемая волна является поперечной, то

$$Z_c = \dot{E}_{\theta m} / \dot{H}_{\phi m} = \sqrt{\mu/\epsilon}. \quad (1.18)$$

В теории антенн величину  $\sqrt{\mu/\epsilon}$  часто называют волновым сопротивлением среды. В случае вакуума  $Z_c = Z_c^0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi$  Ом, и формулу (1.18) можно переписать в виде

$$Z_c = \dot{E}_{\theta m} / \dot{H}_{\varphi m} = Z_c^0 \sqrt{\mu_r / \varepsilon_r} = 120\pi \sqrt{\mu_r / \varepsilon_r}. \quad (1.19)$$

Обобщая полученные результаты, перечислим еще раз основные свойства электромагнитного поля в дальней зоне в среде без потерь.

В дальней зоне поле ЭЭВ представляет собой расходящуюся сферическую волну, векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  которой взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению распространения волны (вектору  $\vec{r}_0$ ). При этом вектор  $\dot{\vec{E}}$  лежит в плоскостях, проходящих через ось вибратора, а  $\dot{\vec{H}}$  — в плоскостях, перпендикулярных этой оси. Векторы  $\dot{\vec{E}}$  и  $\dot{\vec{H}}$  изменяются синфазно. Отношение составляющих  $\dot{E}_{\theta m}$  и  $\dot{H}_{\varphi m}$  равно характеристическому сопротивлению  $Z_c = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ . Фазовая скорость равна скорости света. Комплексный вектор Пойнтинга является чисто действительной величиной и направлен вдоль радиуса-вектора, проведенного из середины вибратора в точку наблюдения, т.е. имеется только активный поток энергии. Плотность потока энергии максимальна в направлениях, перпендикулярных оси вибратора ( $\theta = \pi/2$ ), и равна нулю в направлениях, соответствующих оси вибратора ( $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ ).

### 1.2.2.3. Ближняя зона

В ближней зоне  $2\pi r \ll \lambda$ . Однако, формулы для поля элементарного вибратора были выведены в предположении  $r \gg l$ . Поэтому ближняя зона характеризуется неравенствами  $l \ll r \ll \lambda/(2\pi)$ . В этом случае в квадратных скобках формулы (1.14) можно пренебречь величиной  $1/(kr)^2$ , в формуле (1.15) — величинами  $1/(kr)$  и  $1/(kr)^2$ , а в (1.13) — величиной  $1/(kr)$ . Домножая окончательные выражения на  $\exp(i\omega t)$ , получаем

$$\dot{E}_r = -\frac{i\dot{I}_m^{\text{ct}} l \cos\theta}{2\pi\omega\varepsilon r^3} e^{i(\omega t - kr)}, \quad \dot{E}_\theta = -\frac{i\dot{I}_m^{\text{ct}} l \sin\theta}{4\pi\omega\varepsilon r^3} e^{i(\omega t - kr)}, \quad (1.20)$$

$$\dot{H}_\varphi = \frac{\dot{I}_m^{\text{ct}} l \sin\theta}{4\pi r^2} e^{i(\omega t - kr)}. \quad (1.21)$$

Рассмотрим выражение (1.21). Так как  $2\pi r \ll \lambda$ , можно считать, что  $\exp(-ikr) \approx 1$ . Переходя к мгновенным значениям вектора  $\vec{H}$ , получаем

$$\vec{H} = \vec{\varphi}_0 \frac{I_m^{\text{ct}} l}{4\pi r^2} \sin\theta \cos(\omega t + \psi_0). \quad (1.22)$$

Напомним, что  $\psi_0$  — начальная фаза тока  $I^{\text{ct}}$ .

Сравним выражение (1.22) с напряженностью магнитного поля  $\vec{H}$ , создаваемого элементом длины  $l$  постоянного линейного тока, расположенного так же, как ЭЭВ:

$$\vec{H} = \vec{\varphi}_0 \frac{Il}{4\pi r^2} \sin\theta. \quad (1.23)$$

Формула (1.23) вытекает из закона Био-Савара (4.20).

Так как при выводе формул для поля, создаваемого ЭЭВ, предполагалось, что ток вибратора равен  $I^{\text{ct}} = I_m^{\text{ct}} \cos(\omega t + \psi_0)$ , то выражение (1.22) аналогично выражению (1.23). Следовательно, напряженность магнитного поля вибратора в ближней зоне совпадает с напряженностью магнитного поля, вычисленной на основе закона Био-Савара, при условии, что постоянный ток  $I$  равен току вибратора в рассматриваемый момент времени.

Перейдем к анализу электрического поля вибратора в ближней зоне. Изменение тока в вибраторе приводит к изменению величины зарядов на его концах.

Суммарный заряд вибратора в любой момент времени равен нулю, а заряды на его концах равны по величине и противоположны по знаку. При этом для каждого из концов вибратора выполняется закон сохранения заряда  $I = -dq/dt$ . Следовательно, заряды изменяются по закону  $q = \pm q_m \sin(\omega t + \psi_0)$ , где  $q_m = I_m/\omega > 0$ .

Знак "+" соответствует верхнему (см. рис.1.3) концу вибратора ( $z = +l/2$ ), а знак "-" — нижнему ( $z = -l/2$ ). Так как в ближней зоне  $\exp(-ikr) \approx 1$ , то, заменяя в формулах (1.20)  $\dot{I}_m$  на  $\omega \dot{q}_m$  и переходя затем к мгновенным значениям составляющих вектора  $\vec{E}$ , получаем

$$E_r = \frac{q_m l \cos \theta \sin(\omega t + \psi_0)}{2\pi\epsilon r^3}, \quad E_\theta = \frac{q_m l \sin \theta \sin(\omega t + \psi_0)}{4\pi\epsilon r^3}.$$

Таким образом, в ближней зоне ЭЭВ создает такое же электрическое поле, как и электростатический диполь с моментом  $\vec{p} = \vec{z}_0 q l$ , заряды которого равны зарядам, сосредоточенным на концах вибратора, в рассматриваемый момент времени.

Составляющие напряженности электрического и магнитного полей в ближней зоне, определяемые формулами (1.20) и (1.21), сдвинуты по фазе на  $90^\circ$ . Этот результат можно объяснить тем, что в ближней зоне магнитное поле определяется током, а электрическое — зарядами, а ток и заряд диполя Герца сдвинуты между собой во времени на  $90^\circ$ . Мгновенный вектор Пойнтинга, равный произведению  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , меняется с двойной частотой, принимая во времени как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, характер движения главной части энергии, определяемой выражениями (1.20) – (1.21) — колебательный. Энергия четверть периода движется от источника в окружающее пространство и в следующую четверть периода возвращается обратно. Среднее значение вектора Пойнтинга за один период колебания равно нулю. Это не означает, конечно, что в ближней зоне отсутствует излучение. Как и в дальней зоне, здесь в выражениях для поля имеются слагаемые, пропорциональные  $1/(kr)$ , которые определяют излучаемую энергию. Однако их абсолютные величины малы по сравнению с абсолютными значениями составляющих  $E_r$ ,  $E_\theta$  и  $E_\varphi$ , определяемых формулами (1.20) и (1.21). Это означает, что в ближней зоне имеется относительно большое реактивное поле. Подчеркнем, что в случае среды без потерь полные потоки

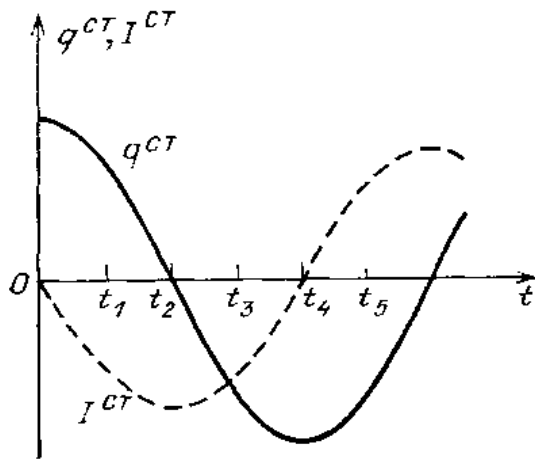


Рис.1.6. Временные зависимости заряда и тока диполя

энергии в ближней и дальней зонах одинаковы, а плотность потока энергии в ближней зоне значительно больше, чем в дальней.

#### 1.2.2.4. Промежуточная зона

Промежуточная зона является переходной от ближней зоны к дальней. При анализе формул (1.13), (1.14) и (1.15) в этом случае нельзя пренебречь ни одним из слагаемых. Следовательно, в промежуточной зоне поле излучения и реактивное (связанное с вибратором) поле оказываются одного порядка.

Выражения (1.13), (1.14) и (1.15) позволяют исследовать структуру поля, создаваемого ЭЭВ в области, соответствующей значениям  $r \gg l$ .

Рассмотрим развитие поля излучения диполя Герца во времени. Сначала отметим, что временные зависимости заряда и тока диполя выглядят, как это показано на рис.1.6. Для нескольких моментов времени, которым соответствуют фазы  $\omega t = 0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2, 5\pi/8$ , на рис.1.7 построены картины электрических силовых линий (в первом квадранте меридиональной плоскости). При  $t = 0$  заряды диполя максимальны по абсолютной величине, а ток отсутствует; на малых расстояниях от начала координат  $r \ll \lambda$  поле имеет такую же структуру, как в случае идеального электростатического диполя (см. п.1.2.2.3). В момент  $t_2$  (фаза  $\pi/2$ ) заряд равен нулю (см. рис.1.6). Поэтому (см. рис.1.7) не может быть электрических силовых линий, начинающихся на зарядах: все они замкнуты. В предшествующие моменты происходит характерная деформация ближнего поля. Силовые линии вытягиваются и отрываются от диполя. При  $t = t_2$  уже сформировался *вихрь*, система замкнутых электрических силовых линий, и дальнейшем расширяющаяся и уходящая на периферию. А в следующий момент (фаза  $5\pi/8$ ) при появлении зарядов противоположных знаков (см. рис.1.6) вблизи начала координат возникло новое квазистационарное поле. При  $\omega t = \pi$ , когда заряды вновь станут максимальными по абсолютной величине, структура поля окажется такой же, как при  $t = 0$ , только изменится направление  $\vec{E}$ . Мы обсудили, таким образом, развитие поля в течение половины периода процесса.

Для более полного представления о поле излучения на рис.1.8 показаны еще две картины силовых линий для некоторого промежуточного момента. Слева показано поле во всех четырех квадрантах, справа изменен масштаб, так что видна почти сформировавшаяся периодическая зависимость поля по радиальной координате. Штриховыми линиями на рис.1.7 и рис.1.8 показаны следы поверхностей, на которых  $E_r = 0$ . На достаточно большом расстоянии каждая такая поверхность есть фронт сферической волны.

Заметим, что первые картины силовых линий поля излучения диполя Герца — в несколько схематической форме — были построены еще самим Герцем.

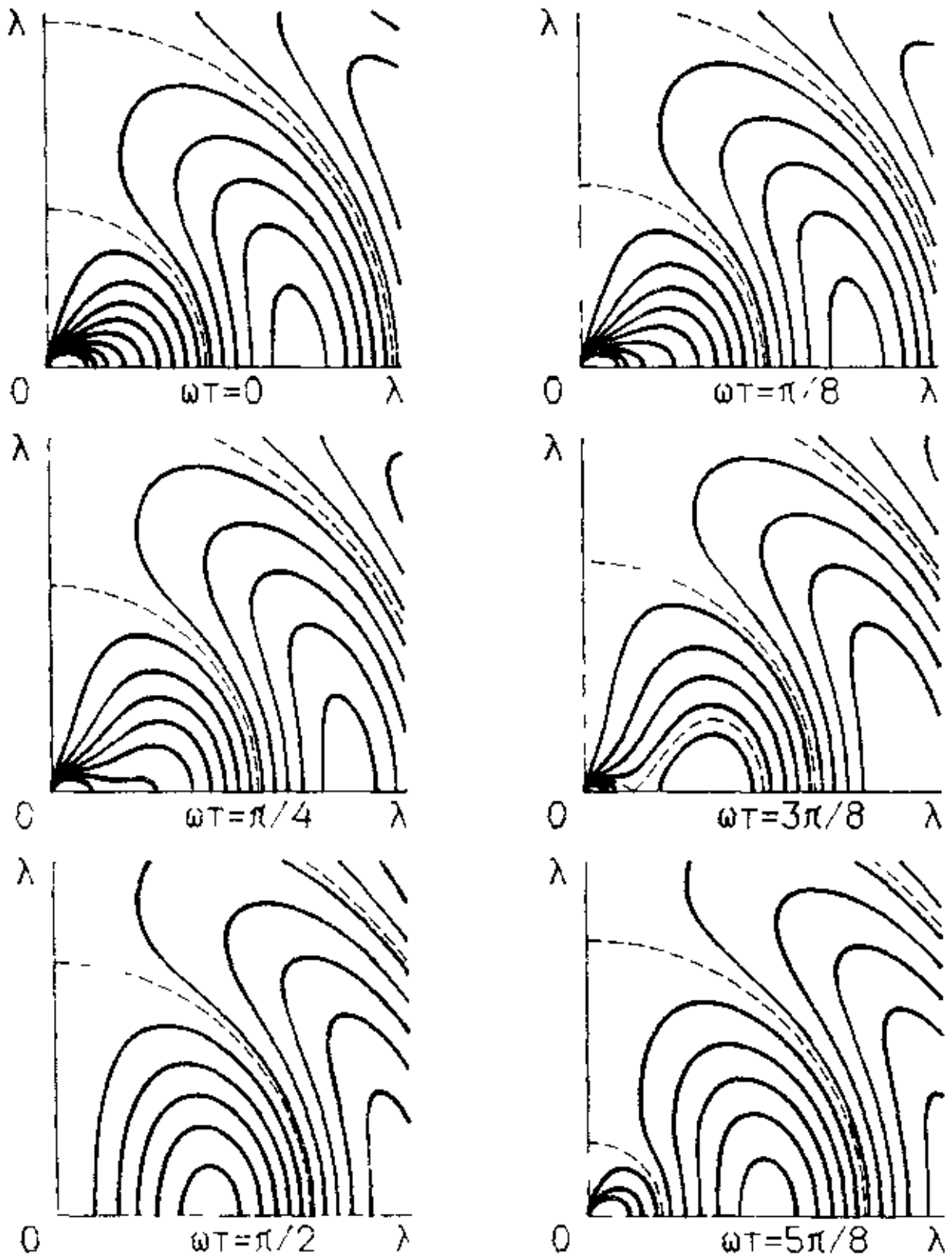


Рис.1.7. Электрические силовые линии поля диполя

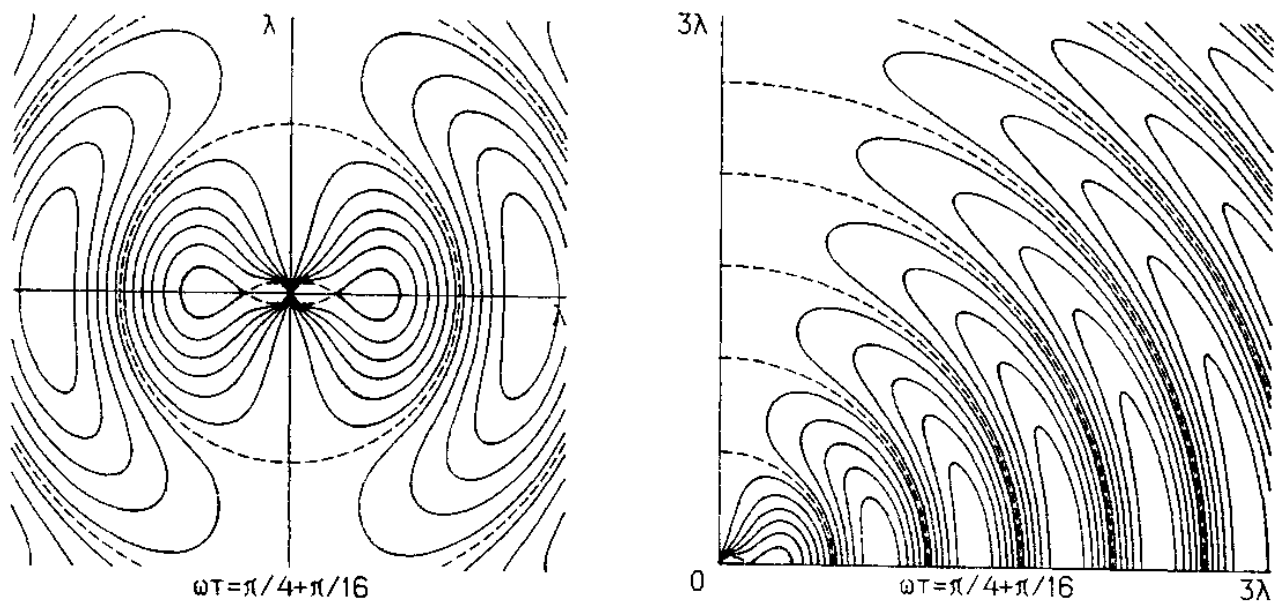


Рис.1.8. Электрические силовые линии поля диполя

### 1.2.3. Диаграммы направленности элементарного электрического вибратора

Рассмотрим более подробно выражение для амплитуды напряженности электрического поля, создаваемого в дальней зоне элементарным электрическим вибратором. Из (1.16) следует, что  $E_{\theta m} = \left| \dot{E}_{\theta} \right| = \frac{I_m^{ct} Z_c}{2\lambda r} \sin \theta$ .

При заданных амплитуде тока и длине вибратора амплитуда напряженности его электрического поля зависит от двух переменных: расстояния  $r$  и угла  $\theta$ . При одном и том же расстоянии от вибратора ( $r = \text{const}$ ) поле будет различным в зависимости от угла  $\theta$ . Как уже отмечалось, амплитуда напряженности поля максимальна в плоскости, проходящей через середину вибратора, перпендикулярно его оси ( $\theta = \pi/2$ ), и равна нулю в направлении последней, т.е. при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ .

Для более наглядного представления о характере излучения (направленных свойствах) антенны строят графики зависимости амплитуды напряженности поля или амплитуд ее составляющих от направления в точку наблюдения при  $r = \text{const}$ . Такие графики называют амплитудными диаграммами направленности или просто диаграммами направленности (ДН). Обычно строят нормированные ДН. На них показывают не абсолютные значения амплитуды напряженности поля, а нормированные значения, отнесенные к ее максимальной величине. Если необходимо дать представление о фазовой структуре излученного поля, строят так называемые фазовые диаграммы направленности — графики зависимости фазы напряженности поля от направления в точку наблюдения.

Наиболее полную информацию о характере излучения дает пространственная диаграмма направленности. Она может быть построена, например, таким образом, чтобы расстояние от начала сферической системы координат до любой точки, характеризуемой углами  $\theta$  и  $\varphi$ , было пропорционально отношению амплитуды

напряженности электрического поля в данном направлении ( $\theta, \varphi$ ) к максимальной амплитуде для того же значения  $r$ . Во многих случаях построение такой диаграммы сложно, поэтому чаще пользуются диаграммами, показывающими зависимость амплитуды поля от одного из углов ( $\theta$  или  $\varphi$ ) при постоянном значении другого.

Диаграмма направленности, соответствующая  $\varphi = \text{const}$ , показывает изменение амплитуды напряженности поля в меридиональной плоскости. Очевидно, что для ее определения по известной пространственной диаграмме достаточно рассмотреть сечение последней плоскостью  $\varphi = \text{const}$ . Аналогично кривая, образованная пересечением пространственной диаграммы с поверхностью конуса  $\theta = \text{const}$ , дает диаграмму направленности, построенную при  $\theta = \text{const}$ .

Пространственная ДН элементарного электрического вибратора совпадает с поверхностью тора, образованного вращением круга, радиус которого равен расстоянию от центра круга до оси вращения (рис.1.9). Диаграмма направленности ЭЭВ в меридиональной плоскости, построенная в полярной системе координат, имеет вид восьмерки из двух окружностей. У нормированной ДН диаметры этих окружностей равны единице (рис.1.10). Правая половина ДН соответствует некоторому значению угла  $\varphi = \varphi_0$ , а левая — значению  $\varphi = \varphi_0 + \pi$ . На рис.1.11 показана построенная в полярной системе координат нормированная ДН в экваториальной плоскости ( $\theta = \pi/2$ ). Эта ДН имеет вид окружности единичного радиуса. Указанная на рисунках функция  $D = \left| \dot{E}_m \right| / \left| \dot{E}_m \right|_{\max} = \left| \dot{E}_{\theta m}(\theta) \right| / \left| \dot{E}_{\theta m}(\pi/2) \right|$ . Так как ДН на рис.1.11 соответствует значению  $\theta = \pi/2$ , то на этом рисунке  $D = 1$ .

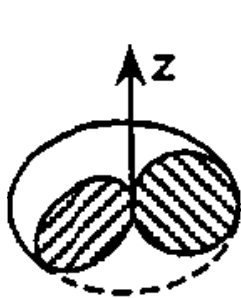


Рис.1.9. Пространственная ДН элементарного электрического вибратора.

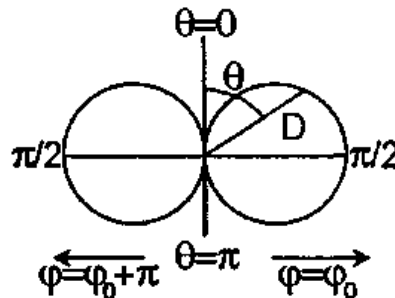


Рис.1.10. ДН элементарного электрического вибратора в меридиональной плоскости.

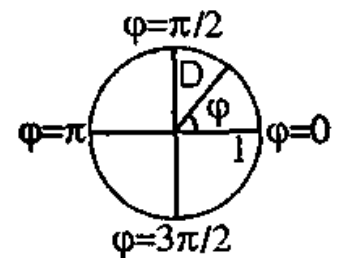


Рис.1.11. ДН элементарного электрического вибратора в экваториальной плоскости.

Помимо полярной системы координат для построения диаграмм направленности используют также декартову систему координат. Нормированные диаграммы направленности ЭЭВ в меридиональной и экваториальной ( $\theta = \pi/2$ ) плоскостях, построенные в декартовой системе координат, изображены на рис.1.12 и 1.13 соответственно.

Фаза напряженности электрического (магнитного) поля, создаваемого ЭЭВ, не зависит от углов  $\theta$  и  $\varphi$ . Поэтому вид фазовых диаграмм ЭЭВ очевиден, и они здесь не приводятся.

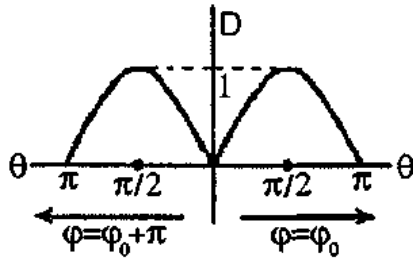


Рис.1.12. Нормированные ДН ЭЭВ в меридиональной плоскости

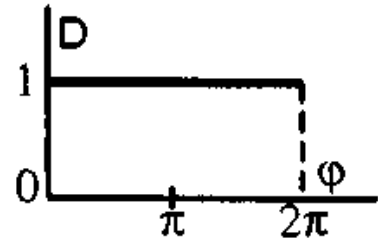


Рис.1.13. Нормированные ДН ЭЭВ в экваториальной ( $\theta = \pi/2$ ) плоскости

#### 1.2.4. Мощность и сопротивление излучения элементарного электрического вибратора

Средняя мощность, излучаемая в пространство ЭЭВ, находящимся в среде без потерь, равна среднему потоку энергии через любую замкнутую поверхность, окружающую вибратор, и может быть вычислена по формуле (1.10). Вычисление интеграла в (1.10) упрощается, если в качестве поверхности  $S$ , охватывающей вибратор, используется сфера с центром в начале координат и достаточно большим радиусом  $r$ , чтобы выполнялось условие  $kr \gg 1$ . В сферической системе координат элемент поверхности  $d\vec{S} = \vec{r}_0 r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ . С учетом формулы (1.17) выражение (1.10) принимает вид

$$P_{\Sigma_{\text{ср}}} = \frac{1}{2} \left( \frac{|I_m^{\text{ср}}| l}{2\lambda} \right)^2 Z_c \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta. \quad (1.24)$$

Входящий в (1.24) двойной интеграл легко вычисляется и равен  $8\pi/3$ , следовательно,

$$P_{\Sigma_{\text{ср}}} = \frac{\pi}{3} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 Z_c |I_m^{\text{ср}}|^2. \quad (1.25)$$

Для свободного пространства ( $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ )

$$P_{\Sigma_{\text{ср}}} = 40\pi^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 |I_m^{\text{ср}}|^2. \quad (1.26)$$

По аналогии с обычным выражением для мощности, расходуемой в среднем за период в электрической схеме на активном сопротивлении  $P_{\text{пср}} = 0,5 |I_m|^2 R$  (закон Джоуля-Ленца), формулу (1.25) можно представить в виде

$$P_{\Sigma_{\text{ср}}} = \frac{1}{2} |I_m^{\text{ср}}|^2 R_{\Sigma}, \quad (1.27)$$

где

$$R_{\Sigma} = \frac{2\pi}{3} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 Z_c \quad (1.28)$$

— сопротивление излучения (в Омах). В свободном пространстве

$$R_{\Sigma} = 80\pi^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2. \quad (1.29)$$



## Глава 2. ТЕОРИЯ ВИБРАТОРНЫХ АНТЕНН

Когда в конце 20-х годов 20 столетия была установлена важность конечных размеров излучающих элементов, начался новый период в теории антенн. Однако не делалось никаких попыток в отношении аналитического определения действительных распределений токов. Вместо этого было принято удобное допущение о синусоидальном распределении, отчасти основанное на результатах измерений, в некоторой мере — на соответствии этого распределения специальным случаям, а частично — на ошибочном мнении, что при изгибе участка открытого конца двухпроводной линии, образующем возбуждаемый в центре диполь, ток существенно не изменится.

В этой главе будут изучаться характеристики излучения простейших в конструктивном отношении электрических вибраторов конечной длины. Такие излучатели широко применяются на практике, как в качестве самостоятельных антенн, так и в виде элементов многих сложных антенных систем. Раздел о вибраторных излучателях в теории антенн занимает очень важное положение. Ряд стандартных предположений и подходов, впервые развитых в применении к вибраторным антеннам и изучаемых в настоящей главе, широко используется в практике инженерных расчетов многих антенн более сложных типов.

### 2.1. Электрический вибратор

*Электрический вибратор* представляет собой цилиндрический проводник длиной  $l_1 + l_2$  и радиусом  $a$ , питаемый в точках разрыва генератором высокой частоты (рис.2.1). При равенстве длин плеч  $l_1 = l_2$  вибратор называется *симметричным*. Присоединение генератора к вибратору может быть осуществлено различными конструктивными способами, в частности, для питания симметричных вибраторов могут быть применены симметричные двухпроводные линии передачи.

Под воздействием ЭДС генератора в вибраторе возникают электрические токи, которые распределяются по его поверхности таким образом, что возбуждаемое ими электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла (1.1), граничным условиям на поверхности проводника и условию излучения на бесконечности. Согласно известной из курса электродинамики теореме эквивалентности [11] полное электромагнитное поле вибратора в любой точке внешнего пространства может быть определено эквивалентными электрическими  $\vec{J}^e$  и магнитными  $\vec{J}^m$  токами, распределенными по замкнутой цилиндрической поверхности  $S$ , окружающей вибратор. Пусть поверхность  $S$  охватывает вибратор так, как это показано на рис.2.1. Если проводник является идеально

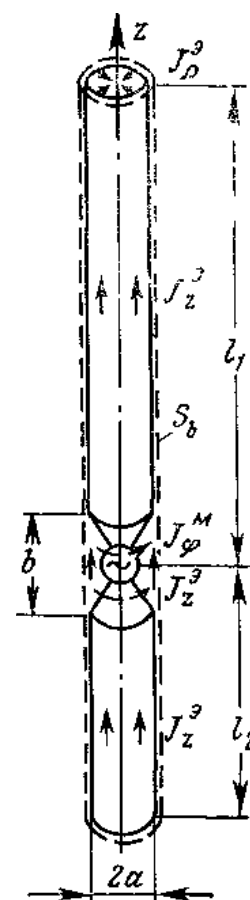


Рис.2.1.  
Электрический вибратор

проводящим, то поверхностный электрический ток вне возбуждающего промежутка  $b$  будет являться действительным электрическим током, а в пределах промежутка  $b$  он останется эквивалентным. Эквивалентный магнитный ток будет конечен в пределах промежутка  $b$ , а на остальной части поверхности  $S$  он будет равен нулю.

Вследствие осевой симметрии возбуждения вибратора электрический ток на боковой поверхности проводника имеет только продольную составляющую  $J_z^e$ , а на торцевых поверхностях — радиальные составляющие  $J_\rho^e$ . Магнитный поверхностный ток имеет только азимутальную составляющую  $J_\varphi^m$ .

Функции распределения эквивалентных электрических и магнитных токов по продольной координате  $z$  заранее не известны и подлежат предварительному определению — в этом состоит *внутренняя задача* теории вибратора. Как будет показано в дальнейшем, внутренняя задача является весьма сложной и даже в простейшем случае вибратора малой толщины сводится к решению так называемого интегрального уравнения Галлена. После нахождения распределения эквивалентных токов электромагнитное поле вибратора в любой точке внешнего пространства определяется сравнительно простым путем как поле известных сторонних источников. Одновременно определяются и такие важные антенные характеристики, как диаграмма направленности, сопротивление излучения и КНД. Этот второй этап после нахождения распределения токов составляет сущность *внешней задачи* теории вибратора. В этой задаче эффективно используются общие формулы для расчета электромагнитных полей. После этих предварительных замечаний перейдем к рассмотрению внутренней задачи вибратора, т.е. к нахождению распределения токов по его поверхности.

## 2.2. Интегральное уравнение Галлена для вибратора

С точки зрения практики особый интерес представляет случай тонкого вибратора, для которого справедливы соотношения  $a \ll l$ ,  $a \ll \lambda$ . При соблюдении этих условий и с учетом осевой симметрии вибратора допустимы следующие предположения:

1) Поверхностные электрические токи  $J_z^e$  вместе с магнитными эквивалентными токами  $J_\varphi^m$  заменяются расположенной на оси вибратора бесконечно тонкой нитью продольного электрического тока  $I_z(z) = 2\pi a J_z^e(z)$ . Этот ток считается непрерывной функцией в области возбуждающего зазора и обращается в нуль на концах вибратора, т.е. удовлетворяет условиям:

$$I_z(l_1) = 0; \quad I_z(-l_2) = 0. \quad (2.1)$$

Торцевые токи вибратора  $J_\rho^e$  игнорируются.

2) Касательная составляющая вектора напряженности электрического поля  $E_z(z)$ , создаваемая нитью тока  $I_z(z)$  на боковой поверхности воображаемого идеально проводящего вибратора, охватывающего нить тока, т.е. при  $\rho = a$ , обращается в нуль всюду, кроме области возбуждающего зазора шириной  $b$ .

3) Составляющая  $E_z(z)$  на боковой поверхности в области зазора шириной  $b$  приравнивается к некоторой возбуждающей функции  $E^B(z)$ . Конкретный вид возбуждающей функции задается из физических соображений с учетом конкретных особенностей конструкции области питания вибратора. Для узких зазоров  $b \ll l_1, l_2, \lambda$  функция  $E^B(z)$  обычно считается постоянной.

Сформулированные предположения математически могут быть записаны в следующей форме. Неизвестное распределение токов  $I_z(z)$  будет создавать на воображаемой боковой поверхности вибратора векторный потенциал (рис.2.2) с единственной составляющей  $A_z$ . Через векторный потенциал касательная составляющая вектора напряженности электрического поля по формуле (1.4) в свою очередь будет выражаться в виде

$$E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left( k^2 A_z + \frac{d^2 A_z}{dz^2} \right), \quad (2.2)$$

где  $k$  — волновое число в среде, окружающей вибратор.

Согласно второму и третьему предположениям величина в круглых скобках в правой части (2.2) должна быть равной:

$$\frac{d^2 A_z}{dz^2} + k^2 A_z = \begin{cases} 0, & \text{при } |z| > \frac{b}{2}, \\ i\omega\epsilon E^B(z), & \text{при } |z| \leq \frac{b}{2}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Соотношение (2.3) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка для векторного потенциала на боковой поверхности вибратора. В общей форме решение этого уравнения может быть записано в виде суммы общего решения однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения, т.е.

$$A_z(z) = \frac{C_1}{4\pi} \exp(ikz) + \frac{C_2}{4\pi} \exp(-ikz) - \frac{i\omega\epsilon}{2ik} \left[ \exp(-ikz) \int_{\frac{b}{2}}^z E^B(z') \exp(ikz') dz' + \exp(ikz) \int_z^{\frac{b}{2}} E^B(z') \exp(-ikz') dz' \right], \quad (2.4)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

Полное выражение (2.4) справедливо для центральной области  $-b/2 \leq z \leq b/2$ . Для области  $z/b > 2$  в правой части автоматически выпадает последний, а для области  $z < -b/2$  предпоследний интеграл. Убедиться в справедливости (2.4) можно, например, путем непосредственной подстановки этого выражения в дифференциальное уравнение (2.3).

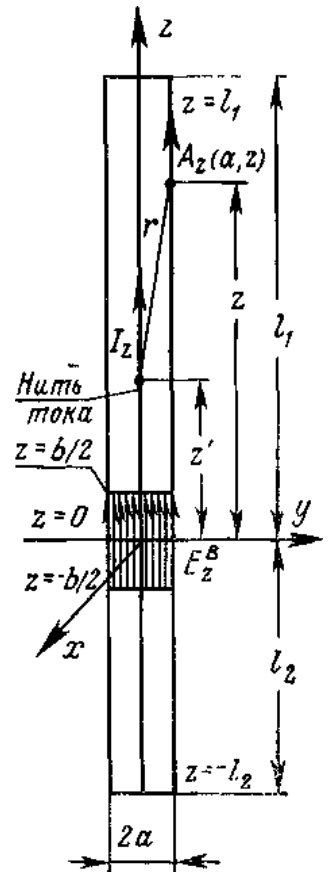


Рис.2.2. К выводу интегрального уравнения Галлена

Величина  $A_z$  на боковой поверхности вибратора, стоящая в левой части (2.4), согласно (1.11) выражается через неизвестную функцию распределения тока в виде

$$A_z(z) = \frac{1}{4\pi} \int_{z'=-l_2}^{l_1} I_z(z') \frac{\exp(-ikr)}{r} dz', \quad (2.5)$$

где  $r = \sqrt{(z-z')^2 + a^2}$ .

Подставляя это выражение в левую часть (2.4) и учитывая очевидное соотношение  $\frac{\omega \varepsilon_a}{k} = \frac{1}{W}$  получаем следующее, так называемое интегральное уравнение Галлена для неизвестной функции распределения тока  $I_z(z)$ :

$$\int_{z'=-l_2}^{l_1} I_z(z') \mathcal{K}(z-z') dz' = C_1 \exp(ikz) + C_2 \exp(-ikz) - \frac{2\pi}{W} \left[ \exp(-ikz) \int_{\frac{b}{2}}^z E^B(z') \exp(ikz') dz' + \exp(ikz) \int_z^{\frac{b}{2}} E^B(z') \exp(-ikz') dz' \right]. \quad (2.6)$$

Находящаяся под интегралом функция

$$\mathcal{K}(z-z') = \frac{\exp\left(-ik\sqrt{(z-z')^2 + a^2}\right)}{\sqrt{(z-z')^2 + a^2}} \quad (2.7)$$

носит название *ядра* этого уравнения. Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий (2.1), накладываемых на поведение электрического тока на концах вибратора. При малой ширине возбуждающего зазора  $b \ll l$  функция  $E^B(z)$  может быть принята постоянной и определенные интегралы в правой части (2.6) легко вычисляются с помощью приближенной замены экспоненциальных функций под интегралами на единицу:

$$\int_{z'=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} E^B(z') \exp(\pm ikz') dz' \approx E^B b \quad \text{при} \quad b \ll \lambda. \quad (2.8)$$

Если далее предположить, что вибратор питается идеальным генератором напряжения с нулевым внутренним сопротивлением и величиной ЭДС  $V$ , то согласно закону Кирхгофа о равенстве нулю суммы напряжений в любом замкнутом контуре электрической цепи получаем соотношение:

$$E^B b = -V. \quad (2.9)$$

С учетом (2.9) интегральное уравнение Галлена для тонкого электрического вибратора, питаемого сосредоточенным генератором ЭДС  $V$ , принимает более простой вид:

$$\int_{-l_2}^{l_1} I_z(z') \mathcal{K}(z-z') dz' = C_1 \exp(ikz) + C_2 \exp(-ikz) + \frac{2\pi V}{W} \exp(\mp ikz), \quad (2.10)$$

где в последней экспоненте верхний знак минус относится к области  $z \geq b/2$  и нижний знак плюс — к области  $z \leq -b/2$ .

С физической точки зрения правая часть выражения (2.10) может рассматриваться как наложение трех бегущих волн векторного потенциала (умноженного на  $4\pi$ ) вдоль боковой поверхности вибратора. Одна из этих волн с амплитудным множителем  $2\pi V/W$  порождается генератором  $V$  и разбегается в обе стороны от возбуждающего зазора. Волна с амплитудой  $C_1$  учитывает отражение от верхнего конца вибратора и бежит в направлении уменьшения  $z$ . Волна с амплитудой  $C_2$  учитывает отражение от нижнего конца вибратора и бежит в сторону возрастания  $z$ .

Правая часть уравнения (2.10) может быть преобразована к более удобному виду путем замены экспонент на тригонометрические функции. Действительно, имеет место тождество:

$$\frac{2\pi V}{W} \left\{ \begin{array}{l} \exp(-ikz) \Big|_{z>0} \\ \exp(ikz) \Big|_{z<0} \end{array} \right\} = \frac{2\pi V}{W} (\cos kz - i \sin k|z|). \quad (2.11)$$

Разлагая экспоненциальные функции с амплитудами  $C_1$  и  $C_2$  по формуле Эйлера и вводя новые произвольные постоянные  $C_3$  и  $C_4$ , получаем следующую наиболее распространенную запись уравнения Галлена:

$$\int_{-l_2}^{l_1} I_z(z') \mathcal{K}(z - z') dz' = C_3 \cos kz + C_4 \sin kz - \frac{i2\pi V}{W} \sin k|z|, \quad (2.12)$$

где в член  $C_3 \cos kz$  включено также первое слагаемое из правой части (2.11). Пусть рассматриваемый вибратор является симметричным. В таком вибраторе распределение тока, а, следовательно, и векторного потенциала, должно удовлетворять условию симметрии:

$$I_z(z) = I_z(-z) \text{ и } A_z(z) = A_z(-z).$$

Отсюда с необходимостью вытекает, что в (2.12)  $C_4 = 0$  и, таким образом, для симметричного вибратора уравнение Галлена приобретает вид:

$$\int_{-l}^{l} I_z(z') \mathcal{K}(z - z') dz' = C \cos kz - \frac{i2\pi V}{W} \sin k|z|. \quad (2.13)$$

Строгое решение интегральных уравнений Галлена в аналитическом виде не известно, и поэтому на практике для инженерных целей чаще всего используется упрощенное решение в так называемом первом приближении.

### 2.3. Распределение тока и заряда вдоль вибратора

Отличительной особенностью ядра интегрального уравнения Галлена является ярко выраженный “резонансный” характер в окрестности точки  $z = z'$ . Эта особенность продемонстрирована на рис.2.3, где построены графики функций  $\cos kr/kr$  и  $\sin kr/kr$ , с помощью которых выражаются действительная и мнимая части ядра интегрального уравнения:

$$\mathcal{K}(z - z') = k \left( \frac{\cos kr}{kr} - i \frac{\sin kr}{kr} \right); \quad r = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}.$$

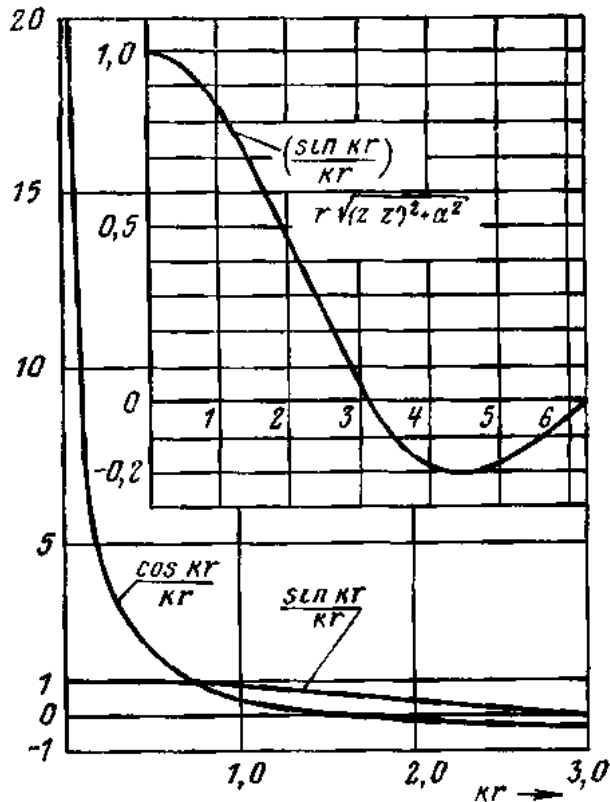


Рис.2.3. Функции, входящие в ядро уравнения Галлена

Благодаря “фильтрующему” действию вещественной части ядра интегрального уравнения величина векторного потенциала нити электрического тока на боковой поверхности вибратора в основном определяется токами, текущими вблизи точки  $z = z'$ , и при  $a/\lambda \rightarrow 0$  можно пренебречь влиянием на векторный потенциал всех остальных участков нити тока. Таким образом, в левой части уравнения (2.12) интегрирование можно провести в пределах от  $z' = z - h$  до  $z' = z + h$ , где  $h$  — постоянная величина, малая по сравнению с длиной волны. При этом можно принять, что

$$\exp(-ik\sqrt{(z-z')^2 + a^2}) \approx 1,$$

а электрический ток можно считать в пределах промежутка интегрирования постоянным и равным току в точке  $z = z'$ . Следовательно,

$$\int_{z'=-l_2}^{l_1} I_z(z') \frac{\exp(-ik\sqrt{(z-z')^2 + a^2})}{\sqrt{(z-z')^2 + a^2}} dz' \approx I_z(z)\Omega, \quad (2.14)$$

где

$$\Omega = \int_{z'=z-h}^{z+h} \frac{dz'}{\sqrt{(z-z')^2 + a^2}} = \ln \frac{\sqrt{a^2 + h^2} + h}{\sqrt{a^2 + h^2} - h} \Big|_{a \ll h} \approx 2 \ln \frac{2h}{a}. \quad (2.15)$$

Из (2.15) следует, что когда  $a$  стремится к нулю, величина  $\Omega$  стремится к бесконечности и равенство (2.14) становится все более точным, поскольку отбрасываемая часть интеграла имеет при этом конечную величину. Уравнение (2.12) теперь можно записать так:

$$I_z(z)\Omega \approx C_3 \cos kz + C_4 \sin kz - \frac{i2\pi V}{W} \sin k|z|. \quad (2.16)$$

Используя граничные условия для тока на концах вибратора  $I_z(-l_2) = 0$ ,  $I_z(l_1) = 0$ , находим постоянные  $C_3$  и  $C_4$ :

$$\left. \begin{aligned} C_3 &= \frac{i4\pi V \sin kl_1 \sin kl_2}{W \sin k(l_1 + l_2)}, \\ C_4 &= \frac{i2\pi V \sin k(l_1 - l_2)}{W \sin k(l_1 + l_2)} \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

и, подставляя (2.17) в (2.16), получаем окончательные выражения для распределения тока на тонком вибраторе в первом приближении:

$$\left. \begin{aligned} I_z(z)_{\text{при } z \geq \frac{b}{2}} &= I_0 \frac{\sin k(l_1 - z)}{\sin kl_1}, \\ I_z(z)_{\text{при } z \leq -\frac{b}{2}} &= I_0 \frac{\sin k(l_2 + z)}{\sin kl_2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

где

$$I_0 = \frac{i4\pi V}{W\Omega} \frac{\sin kl_1 \sin kl_2}{\sin k(l_1 + l_2)}$$

— величина тока в точках питания.

Для симметричного вибратора распределение тока получается симметричным относительно середины:

$$I_z(z) = I_0 \frac{\sin k(l - |z|)}{\sin kl}. \quad (2.19)$$

Помимо распределения тока в инженерном отношении представляет интерес также и распределение электрического заряда вдоль вибратора (например, для оценки величины предельной входной мощности, вызывающей электрический пробой окружающей среды). Распределение заряда в первом приближении наиболее просто может быть определено с помощью уравнения непрерывности (1.3), которое для линейного тока запишется в виде

$$\frac{dI_z(z)}{dz} + i\omega Q(z) = 0, \quad (2.20)$$

где  $Q(z)$  — заряд, приходящийся на единицу длины вибратора.

Применяя (2.20) к (2.18) и учитывая тождество  $k/\omega = \sqrt{\mu\varepsilon} = 1/c$ , где  $c$  — скорость света в окружающей вибратор среде, получаем следующий закон распределения заряда:

$$\left. \begin{aligned} Q(z)_{\text{при } z \geq \frac{b}{2}} &= \frac{I_0}{ic} \frac{\cos k(l_1 - z)}{\sin kl_1}, \text{ Кл/м;} \\ Q(z)_{\text{при } z \leq -\frac{b}{2}} &= -\frac{I_0}{ic} \frac{\cos k(l_2 + z)}{\sin kl_2}, \text{ Кл/м.} \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

В частности, для симметричного вибратора

$$Q(z) = \frac{\pm I_0}{ic} \frac{\cos k(l - |z|)}{\sin kl}, \text{ Кл/м.} \quad (2.22)$$

Здесь верхний знак плюс относится к положительным, а нижний знак минус — к отрицательным  $z$ .

Таким образом, в тонком вибраторе ток и заряд приближенно распределяются по закону кругового синуса. Однако, как следует из самого вывода выражений (2.18), распределение тока в вибраторе при стремлении радиуса провода к нулю только стремится к синусоидальному распределению, никогда не становясь точно синусоидальным. В частности, выражение (2.18) несправедливо для узлов тока,

где векторный потенциал определяется уже не локальным значением тока в данной точке вибратора, а суммарным действием токов, текущих по достаточно удаленным участкам вибратора. Следовательно, действительное распределение тока в узлах не может обращаться в нуль и в окрестности узла отличается от синусоидального закона тем значительнее, чем толще вибратор. Поскольку в первом приближении векторный потенциал определяется только локальным значением тока в данной точке вибратора, то найденные законы *распределения тока и заряда (2.18) и (2.21) остаются справедливыми и для изогнутых вибраторов*, например уголковых или свернутых в дугу. При этом под координатой  $z$  следует понимать расстояние вдоль оси изогнутого проводника.

На рис.2.4 приведено несколько характерных случаев распределений тока и заряда вдоль симметричных и несимметричных вибраторов, построенных в соответствии с формулами (2.18) и (2.21), а также (2.19) и (2.22).

Здесь особый интерес представляет наиболее распространенный на практике полуволновый вибратор, общая длина которого  $l_1 + l_2$  равна половине длины волны. *Важной особенностью полуволнового вибратора является то, что функции распределения тока и заряда в нем не зависят от точки включения генератора, аналогично положению, имеющему место в квазистационарных колебательных контурах.* Во всех других случаях, как следует из рис.2.4 (в том числе и для волнового вибратора с общей длиной  $l_1 + l_2 = \lambda$ ), распределения тока и заряда существенно зависят от расположения точки питания вдоль длины вибратора.

Характерные особенности распределений тока и заряда в тонких вибраторах можно подытожить в виде следующих практических правил:

а) на концах вибратора всегда устанавливаются узлы (нули) тока и пучности заряда;

б) на расстоянии четверти длины волны от концов вибратора образуются пучности тока и узлы (нули) заряда. Затем еще через четверть длины волны образуются опять узлы тока и пучности заряда и т.д.;

в) ток и заряд в каждой точке вибратора сдвинуты между собой по фазе (во времени) на угол  $90^\circ$ ;

г) фаза тока и заряда меняется вдоль вибратора скачками на  $180^\circ$  при переходе через нуль;

д) в точках питания вибратора устанавливается пучность, узел или промежуточное значение тока в зависимости от отношения длины данного плеча к длине волны. Ток в точках питания остается непрерывным, а заряд претерпевает разрыв;

е) для симметричного вибратора значения токов и зарядов в пучностях на обоих плечах одинаковы. В несимметричном вибраторе пучности токов и зарядов на разных плечах не одинаковы и их отношение зависит от соотношения длин плеч  $l_1$  и  $l_2$ :

$$\frac{I_{n1}}{I_{n2}} = \frac{Q_{n1}}{Q_{n2}} = \frac{\sin kl_2}{\sin kl_1}. \quad (2.23)$$



В частности, при  $l_2 \approx \lambda/2$ ,  $l_1 \neq \lambda/2$  ток и заряд в любой точке плеча  $l_1$  близки к нулю (см. рис.2.4,  $l_1 + l_2 = 0,66\lambda$ ).

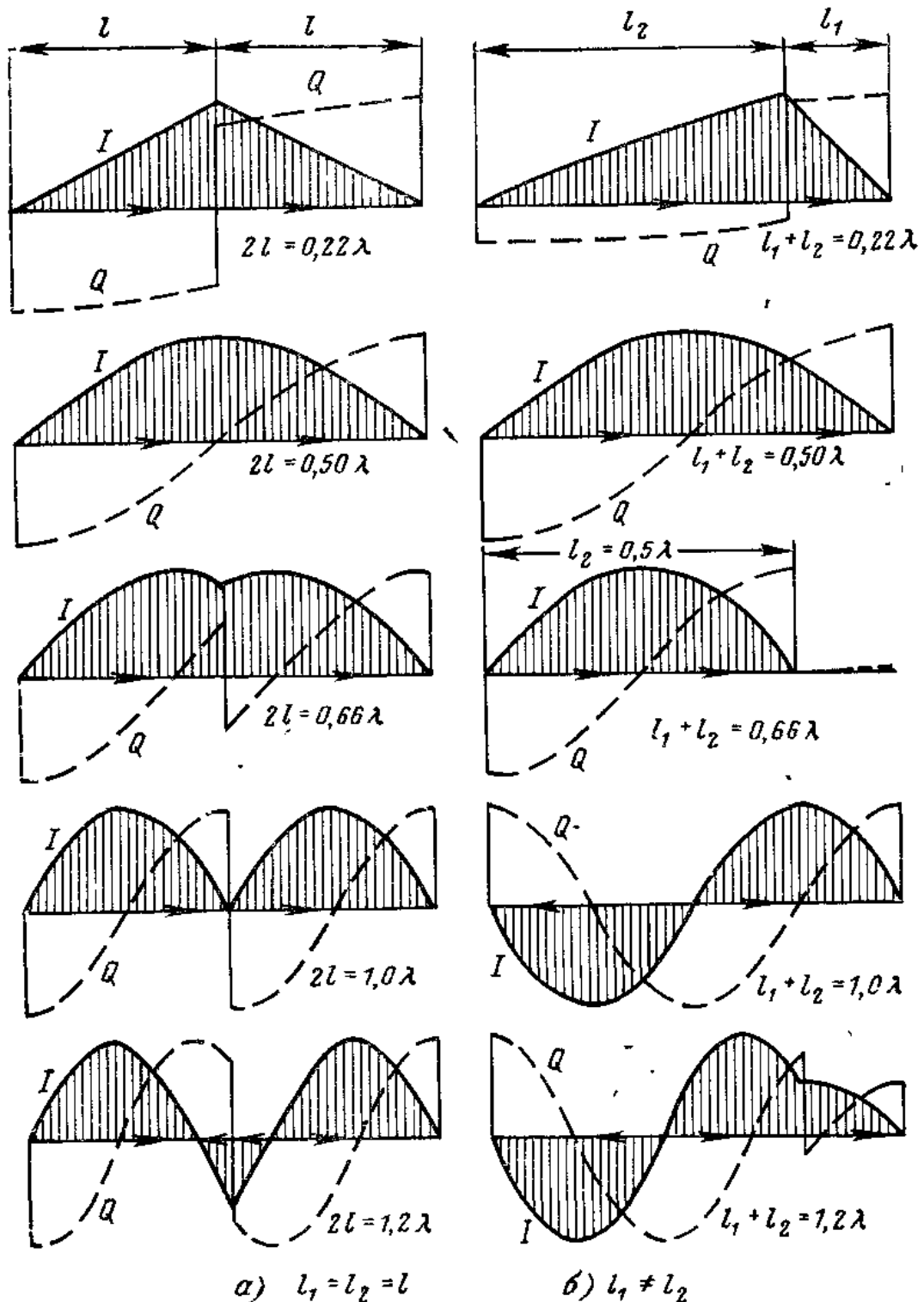


Рис.2.4. Распределение тока и заряда в электрическом вибраторе

Несмотря на приближенность синусоидального закона распределений тока и заряда в вибраторных антеннах, этот закон широко и успешно используется во внешней задаче вибратора при расчетах диаграмм направленности и

сопротивления излучения и дает хорошую точность расчета этих характеристик. Это объясняется тем, что диаграмма направленности и сопротивление излучения, как будет видно из результатов следующего параграфа, являются интегральными характеристиками от функции распределения тока и малые ошибки в распределении тока вблизи узлов при интегрировании не дают заметного вклада в общий результат. Однако синусоидальный закон (2.18) не позволяет правильно вычислить *входной импеданс вибратора*, который определяется отношением напряжения генератора к точной величине тока  $I_{\text{вх}}$  в точке питания:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{V}{I_{\text{вх}}}. \quad (2.24)$$

Попытка использовать (2.18) в (2.24) немедленно оканчивается неудачей, так как входной импеданс в этом случае оказывается, во-первых, чисто мнимым (т.е. не учитывается излучение) и, во-вторых, неопределенным по величине из-за неопределенности интервала интегрирования  $h$  в (2.16). Таким образом, для правильного нахождения входного импеданса вибратора с синусоидальным законом распределения тока необходимо построение специальных расчетных методов, обходящих отмеченные трудности.

#### 2.4. Диаграмма направленности вибратора

Перейдем к рассмотрению внешней задачи вибраторной антенны, причем с целью упрощения выкладок здесь и в дальнейшем будет рассматриваться только симметричный вибратор.

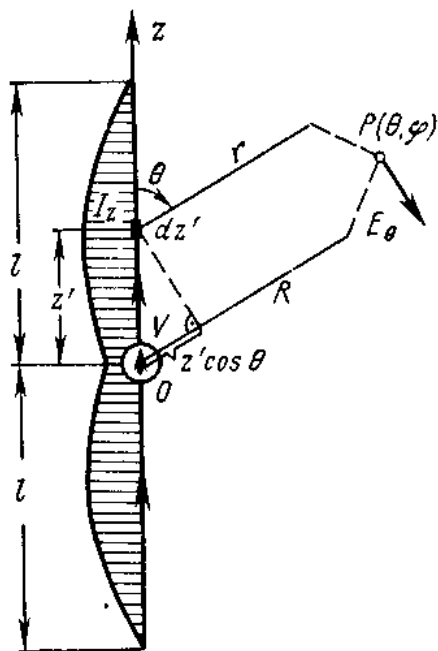


Рис.2.5. К вычислению дальнего поля вибратора

Ориентируем симметричный вибратор в направлении оси  $z$  и совместим центр вибратора, т.е. точку включения генератора, с началом сферической системы координат (рис.2.5). Поскольку токи в вибраторе текут только в направлении оси  $z$ , то векторный потенциал в дальней зоне  $\vec{A}_{\infty}^o$  будет также иметь только  $z$ -составляющую, равную согласно ф-ле (1-22) из [12] величине:

$$A_{z\infty}^o = \frac{\exp(-ikR)}{4\pi R} \int_{-l}^l I_z(z') \exp(ikz' \cos\theta) dz', \quad (2.25)$$

где  $z' \cos\theta$  в показателе подынтегральной экспоненты представляет собой разность хода лучей, проведенных из начала координат и из текущей точки интегрирования  $z'$  в точку наблюдения. Учитывая, что напряженность поля вибратора в дальней зоне выражается соотношениями [12]:

$$E_{\theta} = -i \frac{2\pi W}{\lambda} A_{\theta\infty}^o, \quad H_{\phi} = \frac{E_{\theta}}{W}, \quad (2.26)$$

используя очевидную связь  $A_\theta = -A_z \sin \theta$  и подставляя в (2.25) синусоидальный закон распределения тока (2.19), получаем следующее выражение для напряженности электрического поля вибратора:

$$E_\theta = \frac{iI_0 W \sin \theta \exp(-ikR)}{2\lambda \sin kl} \left[ \int_0^l \sin k(l-z) \exp(ikz \cos \theta) dz + \int_{-l}^0 \sin k(l+z) \exp(ikz \cos \theta) dz \right], \quad (2.27)$$

где  $I_0$  — величина тока в точке питания. Интегралы в (2.27) легко вычисляются двукратным интегрированием по частям:

$$\int \sin(ax+b) \exp(cx) dx = \frac{\exp(cx)}{a^2 + c^2} [c \sin(ax+b) - a \cos(ax+b)].$$

Окончательный результат для напряженности поля в дальней зоне оказывается равным:

$$E_\theta = \frac{iI_0 W}{2\pi \sin kl} \cdot \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos kl}{\sin \theta} \cdot \frac{\exp(-ikR)}{R}. \quad (2.28)$$

Рассмотрим подробнее изменение формы диаграммы направленности симметричного вибратора в меридиональной плоскости в зависимости от длины плеча (рис.2.6). Для симметричного вибратора малой длины (случай а) косинусы малого аргумента в формуле (2.28) могут быть заменены первыми двумя членами разложения в степенной ряд  $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$ , что после подстановки в (2.28) с учетом  $\sin kl \approx kl$  приводит к следующему выражению для поля излучения:

$$E_\theta = \frac{iI_0 W}{2} \left( \frac{l}{\lambda} \right) \sin \theta \frac{\exp(-ikR)}{R} \quad \text{при } kl \ll 1. \quad (2.29)$$

Из этого выражения следует, что короткий симметричный вибратор с синусоидальным (а фактически треугольным) распределением тока эквивалентен по излучаемому полю электрическому диполю Герца вдвое меньшей длины и обладает нормированной диаграммой направленности  $F(\theta) = i \sin \theta$ .

В частности, очевидно, что для короткого симметричного вибратора с полной длиной  $2l$  величина сопротивления излучения окажется равной  $R_\Sigma = \frac{2\pi W}{3} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2$

или в вакууме  $R_\Sigma = 80\pi^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2$ , а коэффициент направленного действия в экваториальной плоскости будет равен 1,5.

Для полуволнового вибратора с длиной плеча  $l = \lambda/4$  (случай б) формула (2.28) принимает вид:

$$E_\theta = \frac{I_0 W}{2\pi} F(\theta) \frac{\exp(-ikR)}{R}; \quad F(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta}. \quad (2.30)$$

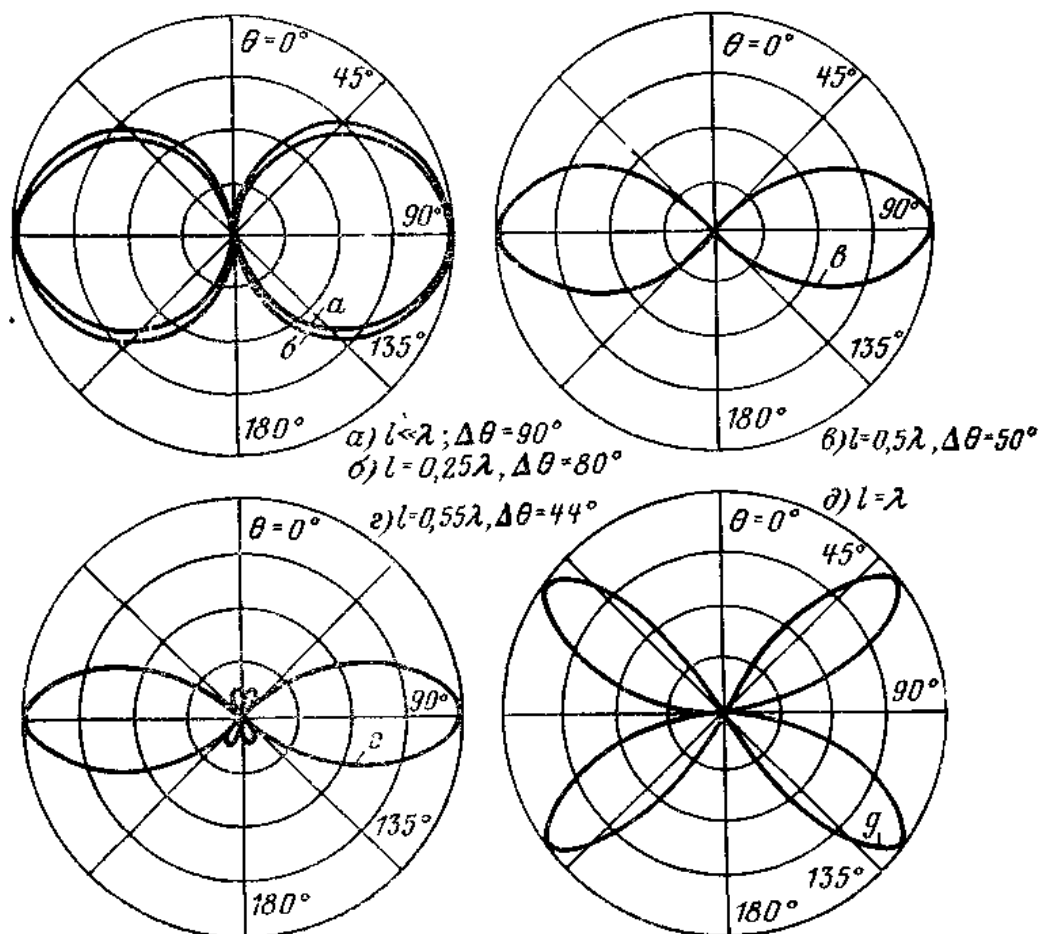


Рис.2.6. Диаграммы направленности симметричного вибратора

Максимум излучения в этом случае по-прежнему ориентирован в экваториальной плоскости  $\theta = \pi/2$ , однако ширина диаграммы направленности становится меньше. Эту ширину принято характеризовать величиной угла раствора  $\Delta\theta$ , в пределах которого напряженность поля не падает ниже чем в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению с напряженностью поля в направлении максимального излучения. Часто угол раствора называют *шириной луча по половинной мощности*. Характерные значения ширины луча меридиональной диаграммы направленности симметричного вибратора приведены на рис.2.6.

При увеличении длины плеча до  $l = \lambda/2$  меридиональная диаграмма направленности симметричного вибратора еще более сужается и при  $l > \lambda/2$  в ней помимо *главного лепестка* появляются еще дополнительные *боковые лепестки*. При еще большем удлинении плеч главный лепесток диаграммы направленности начинает уменьшаться, а дополнительные боковые лепестки увеличиваться. Это объясняется появлением противофазных участков в картине распределения тока вдоль вибратора (см. рис.2.4). Так, например, при  $l = \lambda$  в направлении  $\theta = 90^\circ$  излучение отсутствует.

Во всех случаях излучение вдоль оси вибратора отсутствует, и вследствие осевой симметрии диаграмма направленности в экваториальной плоскости (в плоскости вектора  $\vec{H}$ ) равномерна и в полярной системе координат представляет собой окружность. Кроме того, фаза напряженности поля в дальней зоне не

зависит от углов наблюдения и, таким образом, симметричный вибратор имеет фазовый центр, совпадающий с центром вибратора.

## 2.5. Сопротивление излучения вибратора

Перейдем теперь к расчету излучаемой мощности вибратора. Для этой цели воспользуемся *методом вектора Пойнтинга*, который заключается в интегрировании плотности потока мощности, определяемой радиальным компонентом вектора Пойнтинга, по поверхности сферы, в центре которой находится вибратор. Радиус сферы выбирается достаточно большим, чтобы поверхность интегрирования находилась в дальней зоне. Если вибратор ориентирован вдоль оси  $z$ , то плотность потока мощности в дальней зоне будет

равна  $S_R = \frac{|E_\theta(\theta)|^2}{2W}$  и для расчета излучаемой мощности получается соотношение:

$$P_\Sigma = \frac{1}{2W} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [E_\theta E_\theta^*] R^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (2.31)$$

где  $R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$  — величина элементарной площадки поверхности сферы с радиусом  $R$ . Подставляя в (2.31) выражение для  $E_\theta$  из (2.28) и интегрируя по  $\varphi$ , приходим к следующему соотношению:

$$P_\Sigma = \frac{I_0^2 W}{4\pi \sin^2 kl} \int_0^\pi \frac{[\cos(kl \cos \theta) - \cos kl]^2}{\sin \theta} d\theta. \quad (2.32)$$

Нужно заметить, что выражение излучаемой мощности через величину тока в точках питания является не совсем удачным, так как в случае  $\sin kl = 0$  эта величина оказывается неопределенной, поскольку с помощью приближенного синусоидального закона распределения тока невозможно судить о точной величине тока в узлах. Поэтому сопротивление излучения симметричного вибратора в теории антенн, принято определять с помощью соотношения:

$$R_{\Sigma n} = \frac{2P_\Sigma}{I_n^2}, \quad (2.33)$$

где используется никогда не обращающееся в нуль амплитудное значение тока в пучности распределения:

$$I_n = \frac{I_0}{\sin kl}. \quad (2.34)$$

Вычисление интеграла в (2.32) и применение определения (2.33) с учетом (2.34) приводят к следующей формуле для сопротивления излучения вибратора (отнесенного к пучности тока), впервые полученной в 1924 г. Баллантайном:

$$R_{\Sigma n} = \frac{W}{4\pi} \{2[C + \ln 2kl - \text{Ci } 2kl] + \\ + \cos 2kl [C + \ln kl - \text{Ci } 4kl - 2\text{Ci } 2kl] + \sin 2kl [\text{Si } 4kl - 2\text{Si } 2kl]\}, \quad (2.35)$$

где  $C = 0,5772\dots$  — постоянная Эйлера;

$\text{Si } x = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du$  — интегральный синус;

$\text{Ci } x = -\int_x^\infty \frac{\cos u}{u} du$  — интегральный косинус.

Формула (2.35) табулирована для случая свободного пространства. Соответствующие результаты приведены в таблице и на рис.2.7.

$\frac{l}{\lambda}$	$R_{\Sigma n}$ , Ом	$\frac{l}{\lambda}$	$R_{\Sigma n}$ , Ом	$\frac{l}{\lambda}$	$R_{\Sigma n}$ , Ом
0,125	6,4	0,325	144	0,525	185
0,150	13	0,350	168	0,550	166
0,175	23	0,375	187	0,575	145
0,200	36	0,400	200	0,600	121
0,225	54	0,425	209	0,625	105
0,250	73,1	0,450	212	0,650	93
0,275	96	0,475	210	0,675	87
0,300	120	0,500	199	0,700	85

Полезно запомнить, что в соответствии с таблицей сопротивление излучения полуволнового вибратора ( $l/\lambda = 0,25$ ) равно 73,1 Ом, а сопротивление излучения волнового вибратора ( $l/\lambda = 0,5$ ) равно 199 Ом. Осциллирующий характер графика сопротивления излучения на рис.2.7 при  $l/\lambda > 0,50$  объясняется появлением вдоль вибратора противофазных участков тока. При  $l/\lambda \rightarrow 0$  формула Баллантайна принимает приближенный вид

$$R_{\Sigma n} \approx \left[ \frac{2\pi W}{3} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 \right] \left( \frac{2\pi l}{\lambda} \right)^2, \quad (2.36)$$

где первый множитель в квадратных скобках есть величина сопротивления излучения короткого симметричного вибратора по отношению к току в точке питания, а второй множитель представляет собой приближенное выражение  $\sin^2 kl \approx (2\pi l/\lambda)^2$ , применяемое при переходе от сопротивления излучения в точках питания к сопротивлению излучения в пучности распределения.

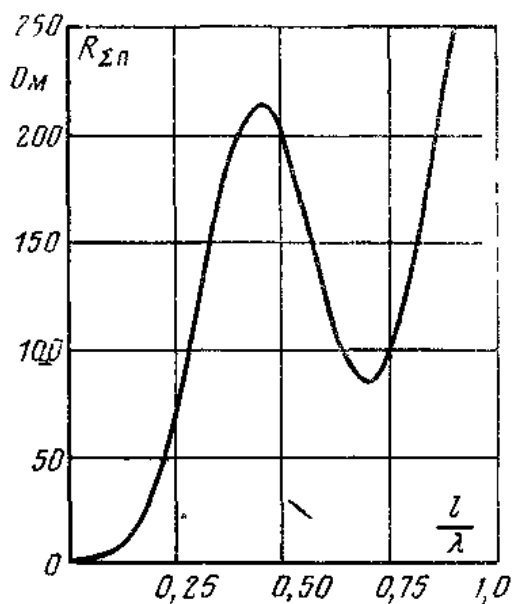


Рис.2.7.

Сопротивление излучения электрического вибратора

## 2.6. Коэффициент направленного действия вибратора

При известной величине мощности излучения легко может быть определен КНД симметричного вибратора, т.е. отношение величины вектора Пойнтинга в данном направлении к средней величине вектора Пойнтинга на поверхности полной сферы, охватывающей вибратор. Для направления максимального излучения КНД определяется соотношением

$$D_{\text{макс}} = \frac{S_{\text{макс}}}{S_{\text{ср}}}.$$

Поскольку очевидно, что  $S_{\text{ср}} = P_{\Sigma}/4\pi R^2$ , а  $S_{\text{макс}} = |E_{\text{макс}}|^2/2W$ , то формула для расчета КНД принимает следующий вид:

$$D(\theta) = \frac{|E_{\theta}(\theta)|^2 2\pi R^2}{WP_{\Sigma}}.$$

Подставляя в нее величину напряженности поля из (2.28) для  $\theta = \pi/2$  (при  $l/\lambda < 0,64$  это будет направление максимального излучения), а также величину  $P_{\Sigma}$  из (2.33), получаем расчетную формулу:

$$D\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{W}{\pi R_{\Sigma\text{п}}} [1 - \cos kl]^2. \quad (2.37)$$

График изменения КНД симметричного вибратора в зависимости от отношения  $l/\lambda$  показан на рис.2.8. Здесь полезно обратить внимание на три характерные цифры: КНД симметричного полуволнового вибратора равен 1,64, КНД волнового симметричного вибратора равен 2,41 и КНД вибратора длиной  $l/\lambda = 0,625$  равен 3,36. Падение величины КНД при  $l/\lambda > 0,625$  объясняется изменением формы меридиональной диаграммы направленности при удлинении плеч вибратора, а именно уменьшением главного лепестка и возрастанием боковых лепестков.

## 2.7. Электромагнитное поле вблизи вибратора

Рассмотрим напряженность поля в непосредственной близости от вибратора, полагая справедливым синусоидальный закон распределения тока по его длине. Найдем, прежде всего, составляющую вектора напряженности электрического поля, параллельную оси вибратора и определяемую формулой (2.2).

Векторный потенциал в точке наблюдения  $M$  (рис.2.9) равен:

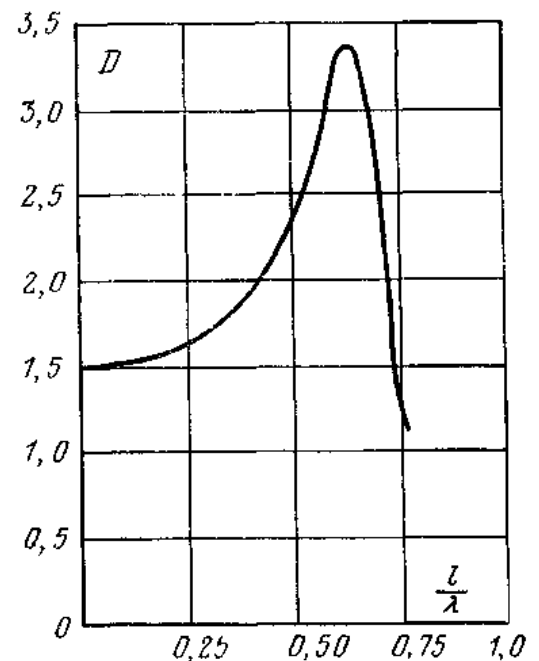


Рис.2.8. Коэффициент направленного действия симметричного вибратора в направлении  $\theta = \pi/2$

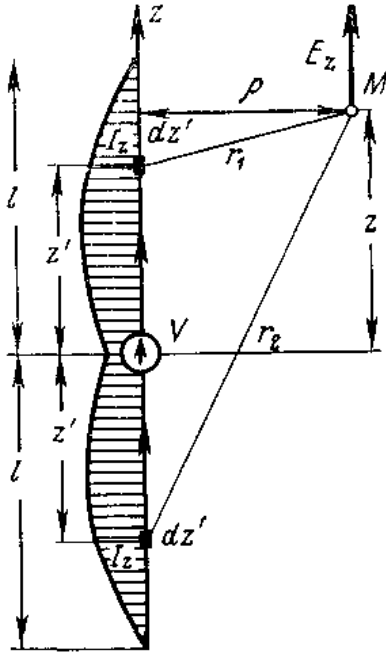


Рис.2.9. К расчету ближнего поля вибратора

$$A_z = \frac{1}{4\pi} \int_{z'=0}^l I_z(z') \left[ \frac{\exp(-ikr_1)}{r_1} + \frac{\exp(-ikr_2)}{r_2} \right] dz'. \quad (2.38)$$

Интегрирование в (2.38) производится от  $z'=0$  до  $z'=l$ , так как в подынтегральном выражении сразу учитывается равенство токов на обоих плечах вибратора в точках, симметрично отстоящих от центра и находящихся от точки наблюдения  $M$  на расстояниях

$$r_1 = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2} \quad \text{и} \quad r_2 = \sqrt{\rho^2 + (z + z')^2}.$$

Подставляя (2.38) в (2.2) и принимая во внимание очевидное равенство

$$\frac{\partial^2 r_{1,2}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 r_{1,2}}{\partial z'^2},$$

получаем:

$$E_z = \frac{1}{i4\pi\omega\epsilon} \int_{z'=0}^l \left\{ I_z \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \left[ \frac{\exp(-ikr_1)}{r_1} + \frac{\exp(-ikr_2)}{r_2} \right] + k^2 I_z \left[ \frac{\exp(-ikr_1)}{r_1} + \frac{\exp(-ikr_2)}{r_2} \right] \right\} dz'.$$

Дважды интегрируя последнее выражение по частям, находим:

$$E_z = \frac{1}{i4\pi\omega\epsilon} \left\{ I_z \frac{\partial}{\partial z'} \left[ \frac{\exp(-ikr_1)}{r_1} + \frac{\exp(-ikr_2)}{r_2} \right] \right\}_{z'=0}^l - \frac{dI_z}{dz'} \left[ \frac{\exp(-ikr_1)}{r_1} + \frac{\exp(-ikr_2)}{r_2} \right]_{z'=0}^l + \int_{z'=0}^l \left( \frac{d^2 I_z}{dz'^2} + k^2 I_z \right) \left[ \frac{\exp(-ikr_1)}{r_1} + \frac{\exp(-ikr_2)}{r_2} \right] dz'. \quad (2.39)$$

Полагая, что ток вдоль вибратора распределен по синусоидальному закону

$$I_z = I_0 \frac{\sin k(l - z)}{\sin kl},$$

видим, что последний интеграл в (2.39) исчезает из-за обращения в тождественный нуль первого множителя в его подынтегральном выражении. Кроме того, в (2.39) обращается в нуль и первое внеинтегральное слагаемое, поскольку ток на концах вибратора равен нулю и, кроме того,

$\frac{\partial}{\partial z'} \left[ \frac{\exp(-ikr_1)}{r_1} + \frac{\exp(-ikr_2)}{r_2} \right]$  при  $z'=0$

также равно нулю. Вычисляя значения производных от функции распределения тока



$$\left. \frac{dI_z}{dz} \right|_{z=l} = -\frac{kI_0}{\sin kl}, \quad \left. \frac{dI_z}{dz} \right|_{z=0} = -kI_0 \frac{\cos kl}{\sin kl},$$

и, подставляя их в остающуюся часть (2.39) с учетом  $k/\omega\varepsilon = W$ , получаем окончательное расчетное соотношение для продольной составляющей вектора напряженности электрического поля:

$$E_z = -\frac{iWI_0}{4\pi \sin kl} \left\{ \frac{\exp(-ikR_1)}{R_1} + \frac{\exp(-ikR_2)}{R_2} - 2 \cos kl \frac{\exp(-ikR_0)}{R_0} \right\}, \quad (2.40)$$

где  $R_1 = \sqrt{\rho^2 + (z-l)^2}$  — расстояние от верхнего конца вибратора до точки наблюдения  $M$ ;  $R_2 = \sqrt{\rho^2 + (z+l)^2}$  — расстояние от нижнего конца вибратора до точки наблюдения  $M$ ;  $R_0 = \sqrt{\rho^2 + z^2}$  — расстояние от центра вибратора до той же точки  $M$ .

Выражение (2.40) должно оставаться формально справедливым и для точек наблюдения, расположенных на боковой поверхности вибратора. Однако, производя расчеты по формуле (2.40), легко обнаружить, что напряженность поля  $E_z$  не обращается в нуль на боковой поверхности вибратора ни при каком значении его радиуса  $a$ . Характерное поведение  $E_z(a)$  вдоль боковой поверхности полуволнового вибратора показано на рис.2.10. Видно, что активная составляющая  $E_z$ , т.е. находящаяся с электрическим током в фазе, остается вдоль всего вибратора почти постоянной, а реактивная составляющая, т.е. находящаяся в квадратуре с электрическим током, стремится на концах вибратора к бесконечности при  $a \rightarrow 0$ . В действительности же тангенциальная составляющая  $E_z(a)$  на поверхности вибратора вне точек питания должна быть равна нулю. Различие произошло из-за того, что при расчете ближнего поля задавалось приближенное синусоидальное распределение тока вместо неизвестного точного распределения. Здесь полезно вспомнить, что при составлении интегрального уравнения Галлена (см. п.2.2) принималось, что порождаемая нитью электрического тока  $I_z$  тангенциальная составляющая  $E_z(a)$  на боковой поверхности вибратора должна быть равна некоторой возбуждающей функции  $E^B(z)$ , которая предполагалась отличной от нуля только в области зазора в середине вибратора. Естественно, что при точном распределении тока, строго удовлетворяющем интегральному уравнению Галлена, должно было бы получиться согласно (2.40) на боковой поверхности вибратора  $E_z(a) = E^B(z)$ . При приближенном синусоидальном распределении

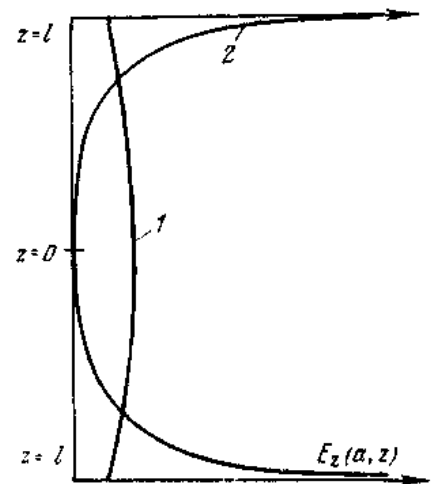


Рис.2.10. Распределение активной (1) и реактивной (2) составляющих напряженности электрического поля по вибратору

тока на боковой поверхности вибратора вместо  $E^B(z)$  получается отличное от него “размазанное” распределение, показанное на рис.2.10. Это распределение имеет смысл некоторой новой возбуждающей функции, ведущей при ее подстановке в правую часть общего интегрального уравнения Галлена (2.6) к его точному решению в виде синусоидального распределения тока (2.19). Таким образом, с помощью выражения (2.40) можно находить такое гипотетическое распределение возбуждающей напряженности поля на боковой поверхности вибратора, при котором синусоидальное распределение тока будет точным решением интегрального уравнения Галлена. Это обстоятельство является ключевым в понимании физической сущности так называемого метода наводимых электродвижущих сил, применяемого в инженерных расчетах входного сопротивления вибратора и рассматриваемого в следующем параграфе.

Найдем теперь остальные составляющие векторов электромагнитного поля, а именно нормальную составляющую вектора напряженности электрического поля  $E_\rho$  и тангенциальную составляющую вектора напряженности магнитного поля  $H_\varphi$ . Из первого уравнения Максвелла в цилиндрических координатах  $\rho, \varphi, z$  имеем:

$$\left. \begin{aligned} i\omega\varepsilon E_z &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho H_\varphi]; \\ i\omega\varepsilon E_\rho &= -\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

Записывая (2.40) в виде

$$E_z = \frac{WI_0}{4\pi k \sin kl} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \{ \exp(-ikR_1) + \exp(-ikR_2) - 2 \cos kl \exp(-ikR_0) \},$$

и, сравнивая с (2.41), получаем с учетом  $\omega\varepsilon/k = 1/W$ :

$$H_\varphi = \frac{iI_0}{4\pi \rho \sin kl} \{ \exp(-ikR_1) + \exp(-ikR_2) - 2 \cos kl \exp(-ikR_0) \}. \quad (2.42)$$

Подставляя теперь (2.42) в выражение для  $E$  из (2.41), находим:

$$E_\rho = \frac{iWI_0}{4\pi \rho \sin kl} \left\{ \frac{\exp(-ikR_1)}{R_1} (z-l) + \frac{\exp(-ikR_2)}{R_2} (z+l) - 2 \cos kl \frac{\exp(-ikR_0)}{R_0} z \right\}. \quad (2.43)$$

Расчетные соотношения (2.42) и (2.43) получены при синусоидальном распределении тока и поэтому носят приближенный характер. Однако для вибратора, радиус которого стремится к нулю, составляющая  $E_\rho(a)$  на поверхности вибратора согласно (2.43) стремится к бесконечности, в то время как  $E_z(a)$  в соответствии с формулой (2.40) остается везде, за исключением концов вибратора, конечной. Это означает, что электрические силовые линии подходят к оси вибратора почти под прямым углом, как это и должно быть в действительной картине ближнего поля.

Заметим, что напряженность магнитного поля на поверхности вибратора определяет собой ток в вибраторе, а нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля на боковой поверхности определяет собой линейную плотность заряда вдоль вибратора. Это следует из равенств:

$$\left. \begin{aligned} I_z &= 2\pi a H_\varphi(a); \\ Q_z &= 2\pi a \varepsilon E_\rho(a), \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

где  $H_\varphi(a)$  и  $E_\rho(a)$  — напряженности магнитного и электрического полей на поверхности вибратора в точке с координатой  $z$ . Из выражений (2.44) с очевидностью следует, что для заданной величины тока (а, следовательно, и заряда) напряженность магнитного поля и нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля на поверхности вибратора тем больше, чем меньше радиус вибратора.

Выражения (2.44) служат основой для экспериментального определения распределений тока и заряда вдоль вибратора. Для измерения распределения тока может быть применена рамка, а для измерения распределения заряда — диполь, расположенные относительно вибратора так, как показано на рис.2.11. Линейные размеры рамки и диполя должны быть малы по сравнению с длиной вибратора и длиной волны, в противном случае будут иметь место искажения поля и измерения окажутся неточными. Кроме того, при измерениях должны быть приняты специальные меры по устранению мешающего влияния низкочастотных проводников, отводящих выпрямленные напряжения к индикаторным приборам.

## 2.8. Расчет мощности излучения и входного импеданса вибратора методом наводимых ЭДС

В методе вектора Пойнтинга проводилось интегрирование по сферической поверхности бесконечно большого радиуса. Однако, поскольку пространство, окружающее вибратор, является свободным, для подсчета излучаемой вибратором мощности интегрирование можно проводить по любой поверхности, охватывающей вибратор.

Пусть эта поверхность будет цилиндрической с высотой цилиндра  $2L$  и радиусом  $\rho$ . В центре этого цилиндра вдоль его оси расположим симметричный вибратор (рис.2.12). Нормальные составляющие вектора Пойнтинга в цилиндрической системе координат имеют выражения:

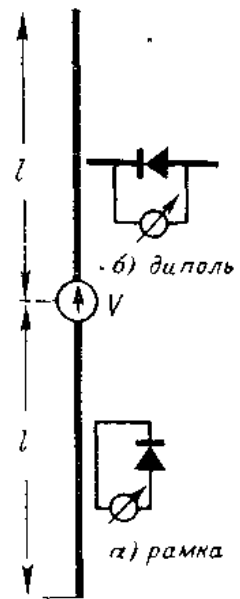


Рис.2.11. Способы измерения распределения тока (а) и заряда (б)

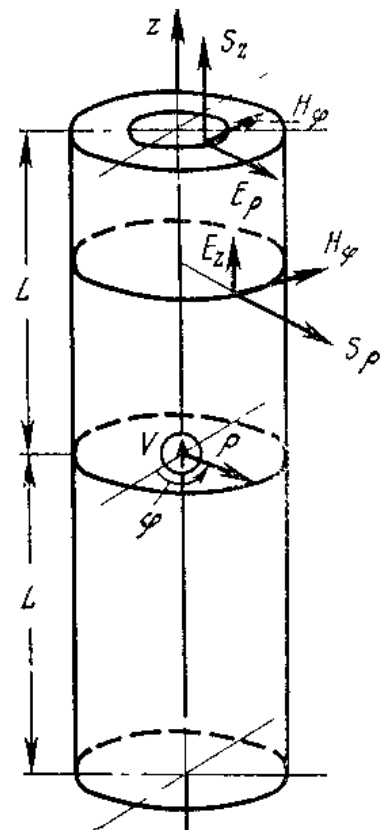


Рис.2.12. К расчету мощности излучения вибратора

$$S_\rho = -\frac{1}{2}\dot{E}_z\dot{H}_\varphi^*; \quad S_z = \frac{1}{2}\dot{E}_\rho\dot{H}_\varphi^*. \quad (2.45)$$

Очевидно, что интеграл от нормальной составляющей вектора Пойнтинга по поверхности цилиндра определяет собой мощность, подводимую к вибратору и излучаемую им. Причем, так как вектор  $\vec{E}$  и вектор  $\vec{H}$  не находятся теперь в фазе, как это было в дальней зоне [см. выражения (2.40), (2.42) и (2.43)], то мощность получается комплексной, т.е. имеет как активную составляющую (излучаемая мощность), так и реактивную составляющую.

Совместим рассматриваемую поверхность цилиндра с поверхностью вибратора, т.е. положим  $\rho = a$ ,  $L = l$ . Тогда при радиусе вибратора  $a$ , стремящемся к нулю, интегралы по верхнему и нижнему основаниям цилиндра (вибратора) будут стремиться к нулю и мощность определится интегрированием только по боковой поверхности цилиндра (вибратора)

$$P = 2 \int_{z=0}^l \int_{\varphi=0}^{2\pi} S_\rho a dz d\varphi. \quad (2.46)$$

Здесь взят удвоенный интеграл, так как вследствие симметрии относительно центра вибратора мы интегрируем по одной половине цилиндра от  $z = 0$  до  $z = l$ .

Подставляя в (2.46) выражение  $S$  из (2.45) и имея в виду, что поле от координаты  $\varphi$  не зависит, получаем:

$$P = - \int_{z=0}^l \dot{E}_z(a) 2\pi a \dot{H}_\varphi^* dz. \quad (2.47)$$

Далее, учитывая, что  $2\pi a \dot{H}_\varphi^* = I_z^*$ , вместо (2.47) получаем окончательный результат:

$$P = - \int_{z=0}^l \dot{E}_z(a) \dot{I}_z^* dz. \quad (2.48)$$

Таким образом, для определения излучаемой вибратором мощности необходимо взять произведение тока на касательную составляющую вектора напряженности электрического поля на поверхности вибратора и проинтегрировать это произведение по длине вибратора. Поскольку напряженность электрического поля на поверхности вибратора  $E_z(a)$  есть по существу ЭДС, приходящаяся на единицу длины вибратора и наводимая током в вибраторе, этот метод вычисления мощности называется *методом наводимых ЭДС*. Метод наводимых ЭДС был предложен в 1922 г. независимо Д.А. Рожанским в Советском Союзе и Л. Бриллюэном во Франции. Развитие этого метода применительно к теории вибраторных антенн связано с именами советских ученых И.Г. Кляцкина, В.В. Татарина и А.А. Пистолькорса.

Заметим, что при подстановке в (2.48) точного (но неизвестного нам) закона распределения тока величина  $E_z(a)$  получится отличной от нуля только в пределах возбуждающего зазора и в этих условиях полная излучаемая мощность окажется равной:

$$P = \frac{\dot{V}I_0^*}{2}, \quad (2.49)$$

где

$$V = -2 \int_{z=0}^{\frac{b}{2}} E_z(a) dz = -E^b b \quad (2.50)$$

— напряжение генератора, подводимое к зазору вибратора [см. также (2.9)]. Однако, как уже отмечалось в предыдущем параграфе, вместо точного закона распределения тока нами используется приближенный синусоидальный закон, и поэтому наведенная ЭДС  $E_z(a)$  оказывается “размазанной” по всему вибратору и интегрирование в (2.48) приходится производить по всей длине вибратора. Так же, как и в методе вектора Пойнтинга, результат интегрирования (2.48) при вычислении излучаемой мощности принято относить к квадрату величины тока в пучности распределения. Это делается следующим образом:

$$P = \frac{\dot{I}_\Pi \dot{I}_\Pi^* Z_{\Sigma\Pi}}{2},$$

где

$$Z_{\Sigma\Pi} = -\frac{2}{\dot{I}_\Pi \dot{I}_\Pi^*} \int_{z=0}^l \dot{E}_z(a) \dot{I}_z^* dz \quad (2.51)$$

представляет собой комплексный импеданс вибратора, отнесенный к пучности тока.

Вычислим комплексный импеданс симметричного вибратора произвольной длины и исчезающе малого радиуса. Подставляя в формулу (2.51) выражение для  $E_z(a)$  из (2.40) и  $I_z = I_\Pi \sin k(l-z)$ , получаем после интегрирования  $Z_{\Sigma\Pi} = R_{\Sigma\Pi} + jX_{\Sigma\Pi}$ , где  $R_{\Sigma\Pi}$  оказывается в точности равно выражению (2.35), а мнимая часть имеет вид:

$$X_{\Sigma\Pi} = \frac{W}{4\pi} \left\{ \sin 2kl \left[ C - \ln \frac{l}{ka^2} + \text{Ci } 4kl - 2 \text{Ci } 2kl \right] - \cos 2kl [\text{Si } 4kl - 2 \text{Si } 2kl] + 2 \text{Si } 2kl \right\} \quad (2.52)$$

Совпадение активных частей импеданса вибратора, вычисленных по методу вектора Пойнтинга и по методу наводимых ЭДС, вполне закономерно, так как в обоих случаях мы интегрируем вектор Пойнтинга по замкнутым поверхностям, заключающим в себе симметричный вибратор с синусоидальным распределением тока. Форма и размеры поверхности интегрирования при этом значения не имеют, так как вибратор находится в свободном пространстве без потерь и вся излучаемая им мощность теряется на бесконечности. Что касается реактивной составляющей импеданса, то она характеризует собой мощность, колеблющуюся вблизи вибратора, и поэтому величина реактивного сопротивления вибратора зависит от поверхности интегрирования вектора Пойнтинга. При радиусе провода  $a$ , стремящемся к нулю, реактивное сопротивление вибратора согласно (2.52) стремится к бесконечности, за исключением полуволнового вибратора, когда оно

оказывается равным 42,5 Ом (таким образом, для настройки полуволнового вибратора в резонанс его нужно несколько укоротить).

Комплексное сопротивление вибратора можно отнести и к току в точках питания. Тогда, учитывая, что  $I_{\pi} = I_0 / \sin kl$ , будем иметь:

$$R_{\Sigma 0} = \frac{R_{\Sigma \pi}}{\sin^2 kl}; \quad X_{\Sigma 0} = \frac{X_{\Sigma \pi}}{\sin^2 kl}. \quad (2.53)$$

Сопротивления  $R_{\Sigma 0}$  и  $X_{\Sigma \pi}$  называются сопротивлением излучения и реактивным сопротивлением вибратора, отнесенными к току в точках питания. Эти сопротивления также называются активной и реактивной составляющими входного импеданса вибратора (в случае отсутствия потерь в вибраторе), так как они определяют собой сопротивление между входными клеммами вибратора, к которым присоединяется генератор.

Для случая вибратора малой длины ( $l/\lambda \ll 1$ ) тригонометрические и интегральные синусы и косинусы можно разложить в ряды:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots; & \cos \alpha &= 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \dots; \\ \text{Si } \alpha &= \alpha - \frac{\alpha^3}{3 \cdot 3!} + \dots; & \text{Ci } \alpha &= C + \ln \alpha - \frac{\alpha^2}{2 \cdot 2!} + \dots \end{aligned}$$

Подставляя эти разложения в формулы (2.35) и (2.52) и принимая во внимание только главные члены разложения, получаем следующие весьма простые формулы для составляющих входного импеданса вибратора:

$$R_{\Sigma 0} = \frac{2\pi W}{3} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2; \quad (2.54)$$

$$X_{\Sigma 0} = -W_{\text{в}} \text{ctg } kl, \quad (2.55)$$

где

$$W_{\text{в}} = \frac{W}{\pi} \left( \ln \frac{l}{a} - 1 \right) \quad (2.56)$$

имеет формальный смысл эквивалентного волнового сопротивления короткого вибратора.

Таким образом, оказывается, что активное сопротивление короткого вибратора равно его сопротивлению излучения в точке питания, а реактивное сопротивление может быть рассчитано по формуле длинной линии без потерь, разомкнутой на конце.

Формулы (2.54) и (2.55) используются для вибраторов, длина которых меньше четверти длины волны. Для случаев, когда вибратор питается в пучности напряжения ( $l/\lambda = 0,5, 1,0$  и т.д.), подсчет величины входного сопротивления по формулам (2.53) дает бесконечно большие значения, так как ток в точках питания согласно синусоидальному закону оказывается равным нулю. В действительности ток в узлах никогда не равен нулю и входное сопротивление при питании вибратора в пучности напряжения хотя и становится большим, но остается конечным. Ввиду этого формулы (2.53) оказываются неприменимыми при

питании вибраторов вблизи пучности напряжения. Однако они дают еще удовлетворительные результаты для сравнительно тонких вибраторов, длина плеча которых меньше, чем  $l/\lambda = 0,4$ .

## 2.9. Приближённый расчёт входного импеданса вибратора методом эквивалентных схем

В инженерных расчетах входного импеданса вибратора может быть использован хорошо зарекомендовавший себя на практике метод эквивалентных схем. Согласно этому методу на основании физических представлений анализируемой антенне ставится в соответствие некоторая эквивалентная цепь с распределенными или сосредоточенными параметрами. Величины параметров этой цепи подбираются таким образом, чтобы ее входное сопротивление наилучшим образом аппроксимировало входное сопротивление вибратора в необходимой полосе частот и правильно передавало зависимость входного сопротивления от размеров антенны.

Для симметричного вибратора при расчете входного импеданса очень удачной оказывается схема замещения в виде отрезка разомкнутой на конце двухпроводной линии с потерями (рис.2.13).

Параметрами этой схемы являются длина отрезка, его характеристическое сопротивление  $W_v$  и комплексная постоянная распространения

$$\gamma = \alpha + i\beta,$$

где  $\beta = kk_1 = \frac{2\pi}{\lambda} k_1$  — эквивалентное волновое число;  $k_1$  — поправочный множитель;  $\alpha = R_1/W_v$  — эквивалентный коэффициент затухания;  $R_1$  — погонное активное сопротивление потерь одного проводника линии. Распределение тока в такой линии описывается законом гиперболического синуса и уже не обращается в нуль в узлах тока. Условия эквивалентности состоят в следующем:

- 1) длина отрезка полагается равной длине плеча вибратора;
- 2) полная мощность потерь в схеме замещения на рис.2.13 и мощность излучения вибратора на всех частотах полагаются равными между собой — это дает возможность связать величины погонного сопротивления отрезка линии  $R_1$  и сопротивления излучения вибратора  $R_{\Sigma\Pi}$ .

- 3) характеристическое сопротивление эквивалентной линии  $W_v$  полагается равным волновому сопротивлению (2.56), полученному применением метода наводимых ЭДС к короткому вибратору;

- 4) эквивалентное волновое число  $\beta = kk_1$  выбирается немного больше волнового числа  $k$  в окружающей вибратор среде на величину поправочного множителя  $k_1$ , определяемого по экспериментальным данным (рис.2.14). Коэффициент  $k_1$  фактически учитывает емкости торцов вибратора, а также то обстоятельство, что цилиндрический вибратор в действительности не является однородной линией с равномерно распределенными погонными параметрами.

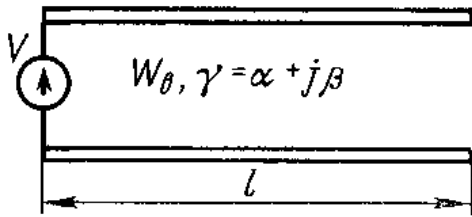


Рис.2.13. Схема замещения электрического вибратора

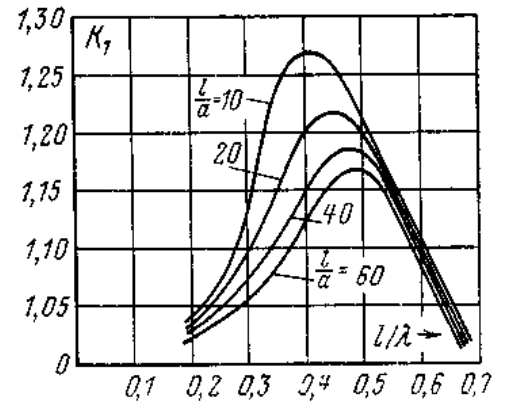


Рис.2.14. Поправочный множитель  $k_1$

Остановимся несколько подробнее на анализе второго условия эквивалентности, которое может быть записано в виде

$$\frac{I_{\Pi}^2 R_{\Sigma\Pi}}{2} = 2 \int_{z=0}^l \frac{I_z^2 R_1}{2} dz, \quad (2.57)$$

где интеграл в правой части представляет собой общую рассеиваемую мощность в двухпроводной линии передачи с погонным сопротивлением потерь  $R_1$ . Подставляя в (2.57) синусоидальный закон распределения тока в вибраторе с учетом коэффициента замедления  $k_1$ ,  $I_z = I_{\Pi} \sin k_1 k(l - z)$ , получаем:

$$R_{\Sigma\Pi} = 2R_1 \int_{z=0}^l \sin^2 [k_1 k(l - z)] dz.$$

Преобразовывая подынтегральное выражение с помощью тождества  $\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$  и производя интегрирование, находим требуемое расчетное соотношение для распределенного сопротивления излучения симметричного вибратора, приходящегося на единицу длины:

$$R_1 = \frac{R_{\Sigma\Pi}}{l \left( 1 - \frac{\sin 2k_1 kl}{2k_1 kl} \right)}. \quad (2.58)$$

Поскольку распределенное сопротивление излучения имеет значительную величину, следует учесть его влияние на волновое сопротивление вибратора. Это делается следующим образом:

$$W_{B1} = \sqrt{\frac{2R_1 + i\omega L_1}{i\omega C_1}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \sqrt{1 - i \frac{2R_1}{\omega L_1}} \approx W_B \left( 1 - i \frac{R_1}{\omega L_1} \right), \quad (2.59)$$

где  $L_1$  и  $C_1$  — погонные индуктивность и емкость эквивалентной линии. Принимая во внимание, что

$$\frac{R_1}{\omega L_1} = \frac{\alpha W_B}{\omega L_1} = \frac{\alpha}{\omega \sqrt{L_1 C_1}} = \frac{\alpha}{k},$$

имеем:



$$W_{в1} \approx W_{в} \left( 1 - i \frac{\alpha}{k} \right), \quad (2.60)$$

т.е. эквивалентное волновое сопротивление  $W_{в1}$  надо рассматривать как комплексную величину.

И, наконец, пользуясь формулами теории длинных линий с потерями, получаем следующее выражение для входного импеданса симметричного вибратора:

$$Z_{вх} = W_{в} \left( 1 - i \frac{\alpha}{k} \right) \operatorname{cth}(cl + i\beta l), \quad (2.61)$$

где волновое сопротивление вибратора дается формулой (2.56), коэффициент затухания равен  $\alpha = R_1/W_{в}$  и поправочный коэффициент на замедление фазовой скорости берется из экспериментальных графиков на рис.2.14.

На рис.2.15 приведены графики зависимости активной и реактивной составляющих входного импеданса симметричного вибратора от отношения длины плеча вибратора к длине волны для трех значений диаметра проводника вибратора. Анализ этих графиков показывает, что:

1) при изменении отношения  $l/\lambda$  в пределах от нуля до 0,6 входной импеданс вибратора имеет два резонансных участка. Первый последовательный резонанс имеет место в окрестности значения  $l/\lambda \approx 0,25$  и второй параллельный резонанс — при значениях  $l/\lambda$  несколько менее 0,5. При  $l/\lambda < 0,25$  реактивная часть входного сопротивления отрицательна.

При утолщении проводника вибратора резонансные значения отношения  $l/\lambda$  уменьшаются, особенно для параллельного резонанса;

2) частотная зависимость входного импеданса вибратора выражена тем слабее, чем толще вибратор, т.е. эквивалентная добротность вибратора на частотах как первого, так и второго резонанса получается тем ниже, чем меньше волновое сопротивление вибратора.

Последнее свойство входного импеданса вибратора можно объяснить следующим образом. Добротность цепи пропорциональна отношению запасенной электромагнитной энергии к энергии, теряемой за период высокочастотных колебаний на резонансной частоте. В случае вибратора энергия теряется на излучение, причем

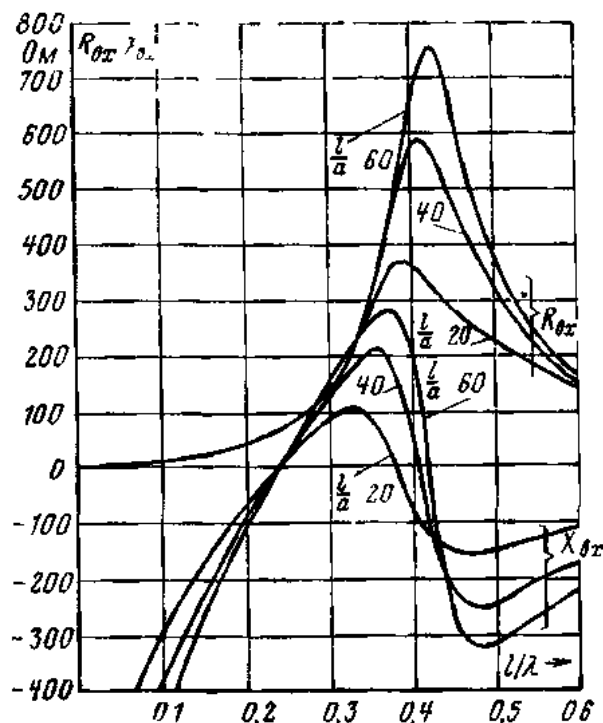


Рис.2.15. Входной импеданс электрического вибратора

ее расход определяется только длиной плеча и практически (в рамках синусоидального закона распределения тока) не зависит от толщины плеча — см., например, формулу (2.35) для сопротивления излучения. Запасенная же электромагнитная энергия сосредотачивается в непосредственной близости к проводникам вибратора и получается тем большей, чем меньше толщина плеч — это следует хотя бы из формул (2.40), (2.42) и (2.43). Другими словами, толстый вибратор не позволяет электромагнитному полю концентрироваться около его оси. Таким образом, *при работе в широком диапазоне частот целесообразно использовать толстые вибраторы с целью выравнивания изменения входного импеданса на различных частотах.* Заканчивая этот параграф, заметим, что на входной импеданс вибраторной антенны заметное влияние оказывает конструктивное выполнение точки питания, никак не учитываемое в расчетных формулах. То же самое относится и к большинству антенн других типов. Поэтому в практических разработках антенных устройств расчеты входного импеданса считаются ориентировочными и обязательно дополняются экспериментальным исследованием на опытном образце антенны.

## ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

### АНТЕННЫ ВИБРАТОРНОГО ТИПА

#### Глава 3. ВИБРАТОРНЫЕ АНТЕННЫ СВЧ

К антеннам сверхвысоких частот принято относить антенны метрового, дециметрового, сантиметрового и миллиметрового диапазонов волн. В данной главе рассматриваются простые антенны вибраторного типа, которые широко используются в низкочастотной части диапазона СВЧ и как самостоятельные приемные и передающие антенные устройства, и как составные элементы многих сложных антенн.

Антенны вибраторного типа выполняются из металлических проводов, лент или труб и питаются как двухпроводными фидерами, так и коаксиальными кабелями. Существует большое разнообразие симметричных и несимметричных вибраторов и способов их питания. К вибраторным антеннам предъявляются требования: возможная простота конструкции и эксплуатации; симметричная диаграмма направленности в плоскости Е, круговая диаграмма направленности в плоскости Н, низкий КСВ в линии питания в относительно широкой полосе рабочих частот; наличие регулировочных элементов, заданный уровень излучаемой мощности (для передающих антенн); высокий к.п.д., устойчивый режим работы при воздействии дождя и мокрого снега, малый уровень кроссполяризационного излучения; удобное крепление на опоре, обеспечение молниезащиты и защиты от статических зарядов.

#### 3.1. Вибраторы, питаемые двухпроводными линиями

Простейшей антенной является симметричный полуволновый вибратор в виде прямолинейного цилиндрического провода, разрезанного в среднем сечении с образованием двух плеч и зазора между ними и питаемого фидером в зазоре (рис.3.1). Такой вибратор называют разрезным. Помимо разрезного, применение находят петлевой (рис.3.2а и б), шунтовой (рис.3.2в) и комбинированный (рис.3.2г) вибраторы, а среди разрезных встречаются не только цилиндрический, но также биконический (рис.3.2д), плоскостной (рис.3.2е) и др.

Симметричный полуволновый вибратор является узкополосной антенной. Его входное сопротивление обсуждалось в гл.2. Представление о входном сопротивлении петлевого, шунтового и комбинированного вибраторов можно получить с помощью метода теории длинных линий.

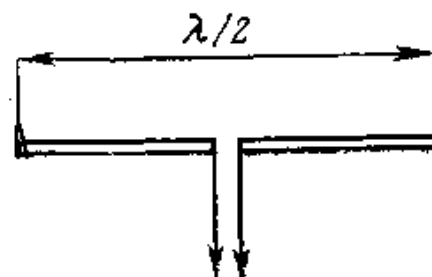


Рис.3.1. Симметричный полуволновый вибратор

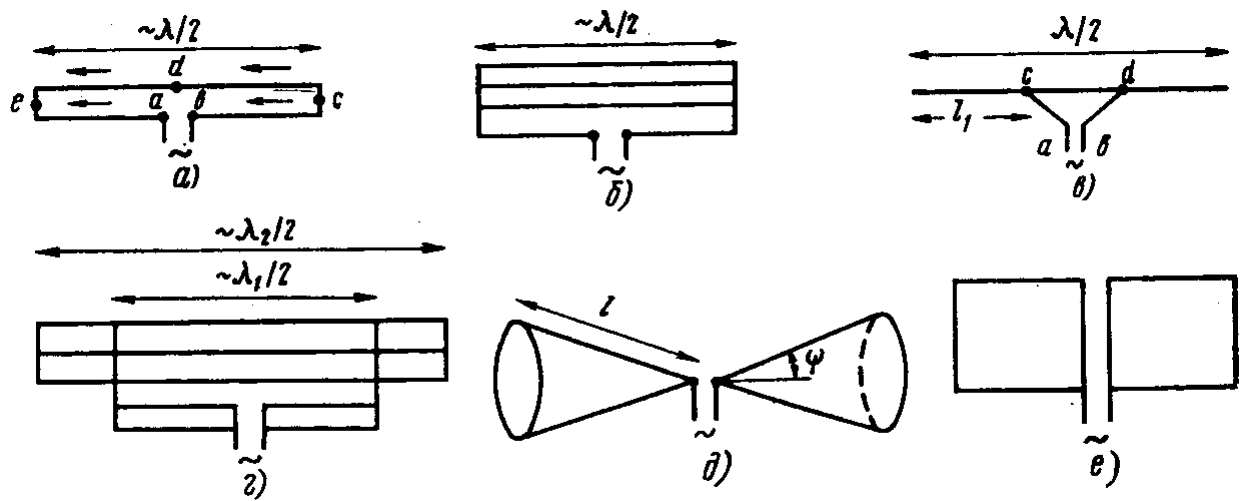


Рис.3.2. Разновидности полуволновых приборов

### 3.1.1. Петлевой вибратор

Как показано на рис.3.2а, два элемента вибратора одинакового диаметра закорачиваются на концах перемычками и к разрыву одного из них подключается двухпроводная линия. На рис.3.3а показана эквивалентная схема петлевого вибратора.

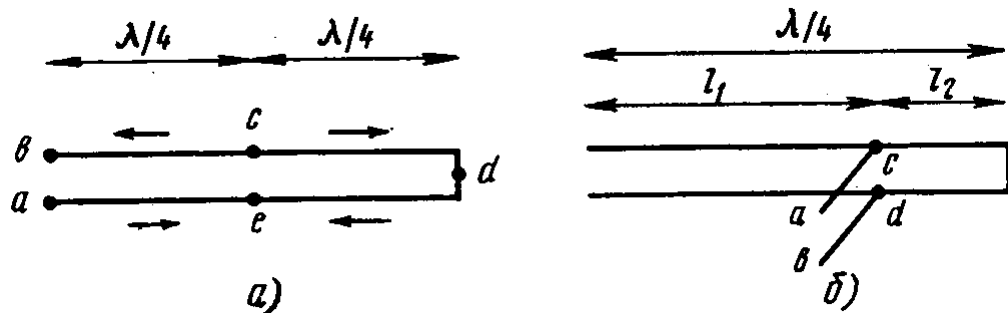


Рис.3.3. Эквивалентная схема петлевого вибратора

Это — короткозамкнутая линия. В точке  $d$  — пучность тока, в точках  $c$  и  $e$  — узлы, за которыми меняется направление тока. В точках  $a$  и  $b$  — вновь пучность тока. Стрелки на рис.3.3а показывают направление токов на отдельных участках эквивалентной линии. Эти стрелки перенесены с рис.3.3а на рис.3.2а и направлены из точки  $c$  к точкам  $b$  и  $d$ , а к точке  $e$  из точек  $a$  и  $d$ . Легко видеть, что на обеих ветвях петлевого вибратора токи имеют одинаковое направление, т.е. петлевой вибратор представляет собой два параллельных синфазных полуволновых вибратора, весьма близко расположенных друг к другу: один — разрезной, второй — в виде сплошного стержня.

Если весь петлевой вибратор сделан из одинакового провода, то на обоих составляющих его полуволновых вибраторах ток будет одинаковым. Поскольку расстояние между проводниками является малым по сравнению с длиной волны,

диаграмма направленности петлевого вибратора совпадает с диаграммой направленности обычного полуволнового вибратора.

Входное сопротивление петлеобразного вибратора может быть рассчитано, исходя из баланса мощностей. Пусть эффективное значение тока в пучности каждого вибратора будет равно  $I$ . Тогда мощность, излучаемая вибратором, будет равна:

$$P_{\Sigma} = (2I)^2 R_{\Sigma\Pi}.$$

С другой стороны, излучаемая мощность равна:

$$P_{\Sigma} = I^2 R_{aб}.$$

Отсюда входное сопротивление петлеобразного вибратора будет:

$$R_{aб} = 4R_{\Sigma\Pi}.$$

Принимая  $R_{\Sigma\Pi} = 73,1 \text{ Ом}$ , находим  $R_{aб} = 4 \times 73,1 \approx 300 \text{ Ом}$ .

Петлеобразный вибратор может быть сделан с дополнительными перемычками, как это показано на рис.3.4а. Подбором длины шунта  $l_{ш}$ , соотношения диаметров проводов, образующих вибратор, можно добиться хорошего согласования входного сопротивления антенны с волновым сопротивлением питающего фидера в довольно широкой полосе частот.

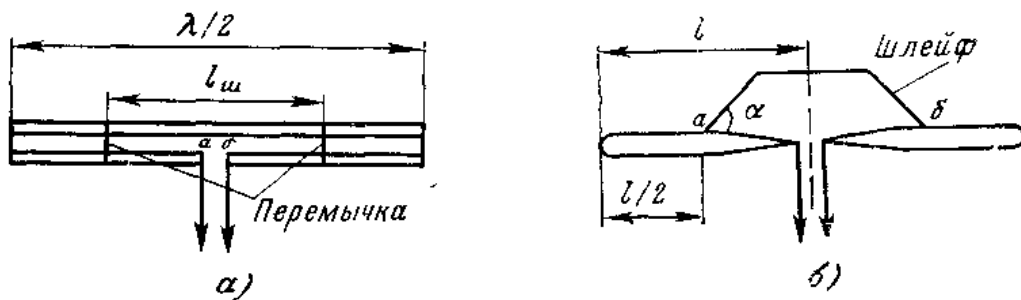


Рис.3.4. Шунтовые вибраторы

Пусть петлевой вибратор образован, как показано на рис.3.2б, путем параллельного присоединения к разрезному полуволновому вибратору нескольких сплошных стержней. Если полуволновый вибратор с током  $I$  в пучности создает поле  $E$  и излучает мощность  $P_{\Sigma}$ , то поле петлевого вибратора будет примерно равно  $(n+1)E$ , где  $n$  — число сплошных стержней, а мощность излучения  $(n+1)^2 \cdot P_{\Sigma}$  и соответственно входное сопротивление  $R_{вх.п.в.} = (n+1)^2 \cdot 73,1 \text{ Ом}$ . Делая разрезной вибратор (входящий в состав петлевого) из одного числа проводов, а сплошные стержни из другого числа проводов, меняя их волновое сопротивление, можно принципиально сделать входное сопротивление петлевого вибратора любым по величине.

Петлевой вибратор имеет точку нулевого потенциала (точка  $d$ ). В этой точке можно его крепить к металлическим опорам без изоляторов.

### 3.1.2. Шунтовой вибратор

Удобным является полуволновый вибратор с шунтовым питанием (рис.3.2в). Его эквивалентная схема показана на рис.3.3б. В точках  $c$  —  $d$  вибратора входное сопротивление

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad (3.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= R_1 - iW_{\text{в}} \operatorname{ctg} kl_1; \\ Z_2 &= R_2 + iW_{\text{в}} \operatorname{tg} kl_2, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Так как  $l_1 + l_2 = \lambda/4$  (см. рис.3.2в), то  $\operatorname{ctg} kl_1 = \operatorname{tg} kl_2$  и (3.1) приводится к виду

$$Z_{\text{вх}} = \frac{W_{\text{в}}^2 \operatorname{ctg}^2 kl_1 + R_1 R_2 + iW_{\text{в}} (R_1 - R_2) \operatorname{ctg} kl_1}{R_1 + R_2}. \quad (3.3)$$

Учитывая, что

$$R_1 + R_2 = R_{\Sigma \text{вх}} = \frac{R_{\Sigma \text{п}}}{\sin kl_1} = \frac{73,1}{\sin^2 kl_1} \quad (3.4)$$

и, пренебрегая двумя последними слагаемыми в числителе (3.3) по сравнению с первым, так как  $R_{\Sigma \text{вх}} \ll W_{\text{в}}$ , получаем

$$Z_{\text{вх}} = \frac{W_{\text{в}}^2 \cos^2 kl_1}{73,1}. \quad (3.5)$$

Из (3.5) легко видеть, что входное сопротивление шунтового вибратора активно и может меняться в широких пределах при изменении точек  $c$  —  $d$  присоединения фидера.

Преимущество такого питания заключается еще и в том, что в точке  $a$  вибратора устанавливается узел напряжения и это дает возможность крепить вибратор к опоре без изоляторов.

Другой разновидностью симметричного вибратора с шунтом является вибратор, показанный на рис.3.4б, который отличается по существу от петлевого вибратора с шунтом (рис.3.4а) и шунтового вибратора своим конструктивным выполнением. При правильном подборе точек включения шлейфа, его геометрических размеров, угла  $\alpha$  и волнового сопротивления фидера удастся получить удовлетворительное согласование вибратора с фидером в широкой полосе частот. Улучшению согласования вибраторов с фидерами способствует также то, что вибраторы состоят из широких пластин (или толстых проводов), обладающих довольно низким волновым сопротивлением.

### 3.1.3. Комбинированный вибратор

Комбинированный вибратор (рис.3.2г) является сочетанием петлевого и шунтового вибраторов. На волне  $\lambda_1$  он — петлевой вибратор, на волне  $\lambda_2$  — шунтовой. Подбирая число проводов и их длины, можно сделать входное сопротивление в обоих случаях одинаковым. В промежутке между  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и за их

пределами входное сопротивление будет другим. Однако, делая у вибратора малое волновое сопротивление, можно добиться медленного отклонения с изменением частоты входного сопротивления от резонансной величины, которая получается на волнах  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , и получить сравнительно широкополосный вибратор.

### 3.1.4. Биконический вибратор

Биконический вибратор в теории рассматривается как длинная линия с волновым сопротивлением

$$W_{\text{бик}} = 276 \cdot \lg \left( \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} \right). \quad (3.6)$$

нагруженная на сопротивление

$$Z_{\text{н}} = \frac{W_{\text{бик}}^2}{R_{\Sigma} + iX_{\Sigma}}, \quad (3.7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} R_{\Sigma} &= 60(C + \ln 2kl - \operatorname{Ci} 2kl) + 30(C + \ln kl - 2\operatorname{Ci} 2kl + \\ &\quad + \operatorname{Ci} 4kl) \cos 2kl + 30(\operatorname{Si} 4kl - 2\operatorname{Si} 2kl) \sin 2kl, \\ X_{\Sigma} &= 60\operatorname{Si} 2kl + 30(\operatorname{Ci} 4kl - \ln kl - C) \sin 2kl - 30\operatorname{Si} 4kl \cos 2kl. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Параметры  $\psi$  и  $l$  показаны на рис.3.2д.

При таком представлении входное сопротивление биконического вибратора

$$Z_{\text{вх}} = W_{\text{бик}} \frac{Z_{\text{н}} \cos kl + iW_{\text{бик}} \sin kl}{W_{\text{бик}} \cos kl + iZ_{\text{н}} \sin kl}. \quad (3.9)$$

## 3.2. Вибраторы, питаемые коаксиальным кабелем

Полуволновые симметричные вибраторы могут питаться также при помощи гибкого коаксиального кабеля или жесткой коаксиальной линии. В этом случае для перехода от несимметричной линии, каковой является коаксиальный кабель, к симметричной антенне применяются различные симметрирующие устройства, схемы которых представлены на рис.3.5 и 3.6.

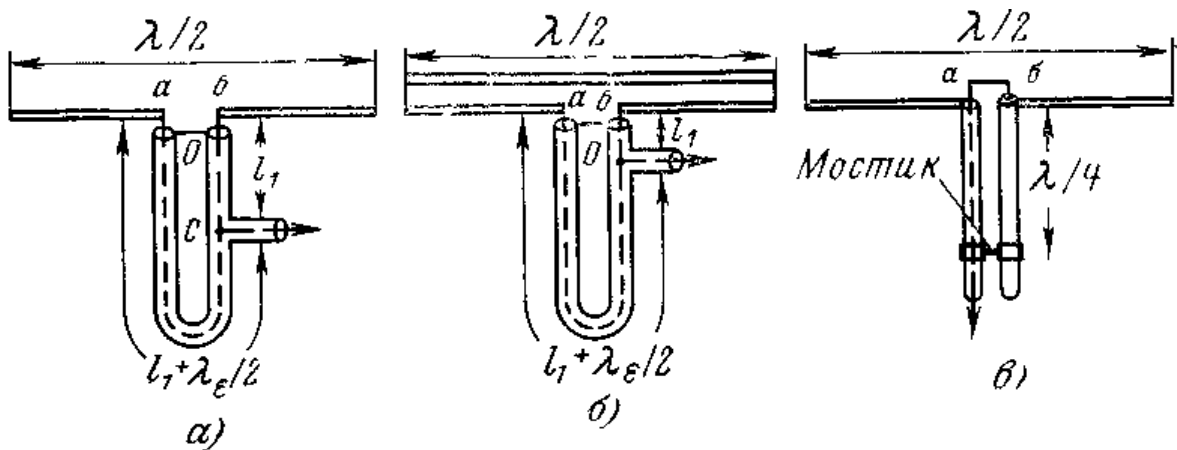


Рис.3.5. Способы питания вибратора коаксиальным кабелем

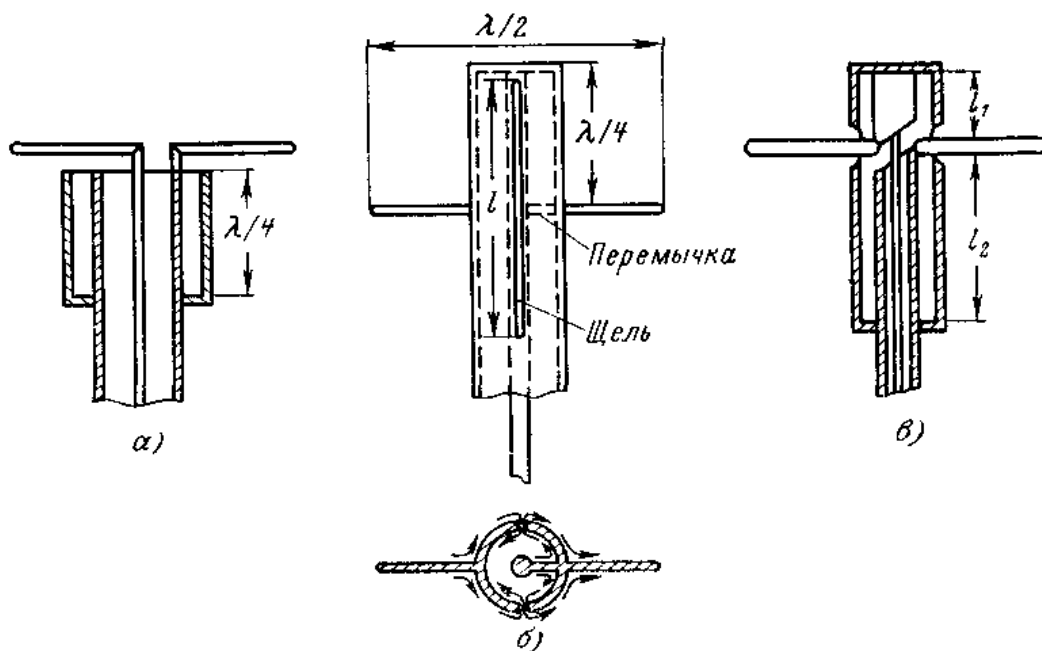


Рис.3.6. Способы питания вибратора жесткой коаксиальной линией

Рассмотрим вкратце причины, вызывающие необходимость симметрирования. На рис.3.7 показано непосредственное присоединение коаксиального кабеля к симметричному вибратору: одно плечо (правое) присоединено к центральному проводнику фидера (жиле кабеля), второе (левое) — к внешнему проводнику фидера (оплётке кабеля).

При таком способе питания ток, существующий на внутренней поверхности оплётки кабеля, делится между вибратором и наружной поверхностью оплётки кабеля. Вследствие этого наружная поверхность оплётки кабеля оказывается включенной параллельно с левым плечом и в результате этого токи на плечах вибратора будут различны (вибратор получит несимметричное питание). Кроме того, излучение будет вызываться не только вибратором, но и наружной поверхностью оплётки кабеля. Излучение оплётки кабеля будет отличаться от излучения вибратора по поляризации и по диаграмме направленности. А параллельное включение наружной поверхности оплётки к питающему кабелю усложнит условия обеспечения согласования с фидером. В итоге при питании по схеме рис.3.7 будет чрезвычайно затруднено, а может быть, станет нереализуемым выполнение требований к антенне.

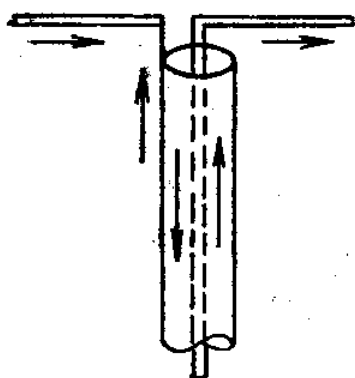


Рис.3.7.  
Непосредственное присоединение коаксиального кабеля к симметричному вибратору

Таким образом, при питании симметричного вибратора коаксиальным кабелем требуется исключить возможность возникновения токов на наружной поверхности оплётки кабеля. В этом суть симметрирования.



### 3.2.1. Симметрирующее устройство типа U-колена

В симметрирующем устройстве типа U-колена (рис.3.5а, б) оба плеча вибратора присоединяются к центральному проводнику (жиле) кабеля. Коаксиальный кабель, идущий от генератора (основной кабель), присоединяется в точке  $C$  к отрезку кабеля, имеющего форму буквы U. Здесь коаксиальный кабель разветвляется на две ветви, из которых одна делается на полволны (в кабеле) длиннее другой. В точке разветвления  $C$  ток растекается в разные стороны. Как известно, на расстоянии через полволны ток имеет ту же амплитуду, но противоположное напряжение. В итоге в таком устройстве получаются два противофазных коаксиальных кабеля, которые эквивалентны экранированной двухпроводной линии, что и нужно для симметричного питания вибраторов. Для предотвращения ответвления токов, текущих по внутренней поверхности оплётки кабеля на наружную поверхность, оплётки кабеля вблизи концов U-колена соединяются накоротко.

К каждой ветви U-колена присоединяется половина сопротивления нагрузки (одно плечо излучает половину всей мощности). В точке разветвления кабеля подключены параллельно, что приводит к делению входного сопротивления отрезков кабелей пополам. Длина отрезка кабеля  $l_1$  в симметрирующем устройстве подбирается так, чтобы в основном коаксиальном кабеле получить бегущую волну.

В схеме рис.3.5а входное сопротивление антенны равно  $R_{аб} = 73 \text{ Ом}$ , а сопротивления, нагружающие отрезки кабелей, равны  $R_{а0} = R_{б0} = 36,5 \text{ Ом}$ . Если волновое сопротивление кабеля, образующего U-колена, взять равным  $W = 75 \text{ Ом}$ , а длину отрезка кабеля  $l_1$  положить равной четверти длины волны в кабеле, то сопротивление в точке  $C$ , нагружающее главный кабель, будет:  $R_c = W^2 / 2R_{аб} = 77 \text{ Ом}$  и КСВ в главном фидере окажется близким к единице.

В схеме рис.3.5б петлеобразный вибратор имеет входное сопротивление  $R_{аб} = 300 \text{ Ом}$ , а сопротивления, нагружающие отрезки кабелей, равны  $R_{а0} = R_{б0} = R_{аб} / 2$ . Если длину отрезка кабеля  $l_1$  взять равной нулю, то сопротивление, нагружающее главный кабель, будет:  $R_{а0} = 75 \text{ Ом}$  и в главном фидере опять установится бегущая волна. Таким образом, в схеме рис.3.5б U-колена выступает не только как симметрирующее устройство, но также как трансформатор, уменьшающий сопротивление нагрузки в четыре раза.

### 3.2.2. Мостиковое симметрирующее устройство

Схема мостикового симметрирующего устройства показана на рис.3.5в. Здесь к симметричному вибратору присоединяются две трубки с закорачивающим мостиком, образующие четвертьволновый металлический изолятор. Через одну трубку пропускается коаксиальный кабель, внешний проводник которого соединяется с трубкой в точке  $a$ , а центральный проводник соединяется с другой трубкой в точке  $b$ . Это устраняет возбуждение внешней поверхности кабеля и обеспечивает симметричное питание обеих половин вибратора. Сопротивление,

нагружающее кабель, оказывается равным  $R_{аб} = 75 \text{ Ом}$ , и если взять коаксиальный кабель с волновым сопротивлением, равным  $75 \text{ Ом}$ , то в нем установится бегущая волна. Отметим, что здесь металлический изолятор играет также роль шунтирующего шлейфа, компенсирующего реактивную составляющую входного импеданса вибратора и расширяющего полосу пропускаемых антенной частот.

Симметрирующий шлейф имеет большое количество разновидностей (рис.3.8а). Так, например, вместо двухпроводной линии шлейф часто выполняется в виде кольца, провода шлейфа можно свернуть в спирали (в последнем случае необходимо обеспечить равенство индуктивностей обеих спиралей). В диапазоне ультракоротких волн шлейф часто экранируют (рис.3.8б).

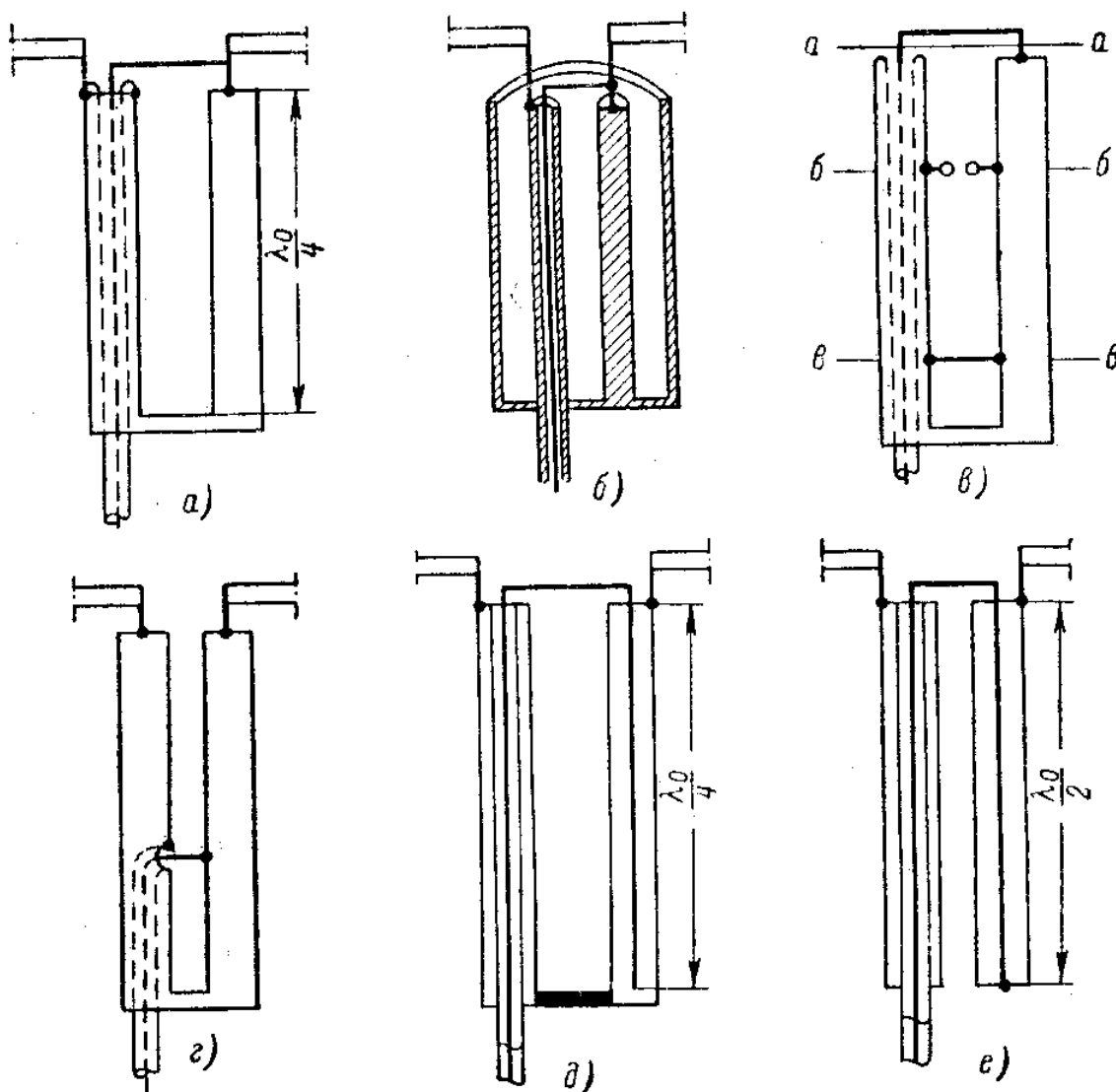


Рис.3.8. Симметрирующие шлейфы:

*a* — обычный вариант симметрирующего шлейфа; *б* — экранированный вариант симметрирующего шлейфа; *в* — симметрирующий шлейф с трансформацией входного сопротивления; *г* — симметрирующий шлейф с автотрансформаторным включением фидера; *д* и *е* — широкодиапазонные симметрирующие шлейфы

Симметрирующий шлейф может служить одновременно и как трансформирующее устройство. С этой целью нагрузку подключают в сечение *бб* (рис.3.8в), причем длина линии, образованной участком шлейфа от сечения *бб* до его зажимов *аа*, выбирается из условия получения на зажимах шлейфа сопротивления нужной величины. Если нагрузка чисто активная, то сопротивление на зажимах шлейфа будет комплексным. Реактивную часть этого сопротивления следует компенсировать, например, используя для этого часть шлейфа от сечения *вв*, где располагается короткозамыкающий мостик, до его зажимов *аа*. Для согласования возможно также использование автотрансформаторного подключения коаксиального кабеля к шлейфу (рис.3.8г).

Существует ряд схем, в которых реактивность шлейфа, появляющаяся в результате изменения длины волны, компенсируется реактивностью элемента (компенсатора), специально подключенного к шлейфу. На рис.3.8д таким компенсатором является разомкнутый отрезок коаксиального кабеля длиной  $\lambda_0/4$ , а на рис.3.8е компенсатором служит короткозамкнутый отрезок коаксиального кабеля длиной  $\lambda_0/2$ , отключенный от шлейфа. Волновое сопротивление кабеля компенсатора в обоих случаях выбирается из условия

$$P = -\frac{R_A^2}{\rho_{ш}}. \quad (3.10)$$

### 3.2.3. Симметрирующие устройства сантиметрового диапазона волн

В сантиметровом диапазоне волн питание полуволновых симметричных вибраторов осуществляется при помощи жестких коаксиальных линий. Здесь также применяются специальные симметрирующие устройства, устраняющие возбуждение наружной поверхности внешнего проводника коаксиальной линии.

На рис.3.6а показано устройство питания полуволнового вибратора, в котором на коаксиальную линию надевается труба четвертьволновой длины, соединенная накоротко с коаксиальной линией на одном конце. Образованная таким образом дополнительная коаксиальная линия, часто называемая “четвертьволновым стаканом”, представляет собой металлический изолятор, препятствующий ответвлению тока на внешнюю поверхность наружного провода коаксиальной линии и обеспечивающий симметричное питание обеих половин вибратора.

В другом устройстве (рис.3.6б) симметричный вибратор возбуждается при помощи двух продольных щелей, прорезанных во внешнем проводнике коаксиальной линии. Известно, что в коаксиальной линии распространяется ТЕМ-волна, обладающая продольными токами.

Если в коаксиальной линии прорезать продольные щели, то они не будут возбуждаться. Однако если после этого в месте расположения щелей соединить внутренний проводник с внешним проводником при помощи перемычки, т. е. замкнуть ТЕМ-волну, то ток, текущий по этой перемычке, будет возбуждать высшие типы волн и в первую очередь волну  $H_{11}$  в коаксиальной линии. Хотя этот тип волны не будет распространяться вдоль линии ( $\lambda_{раб} > \lambda_{крH11} = 2\pi R_{ср}$ ), он сопровождается местными поперечными составляющими токов, которые

пересекают щели во внешнем проводнике и, таким образом, возбуждают внешнее пространство. Следовательно, на внешней поверхности наружного проводника коаксиальной линии появятся поперечные электрические токи, возбуждающие присоединенный в этом месте симметричный вибратор, как это видно из рис.3.6б, где показан поперечный разрез линии в месте присоединения к ней вибраторов. Длина щелей  $l$  может быть любой, но наиболее интенсивное возбуждение вибраторов происходит при резонансной длине щелей, т. е. при  $l \sim \lambda/2$ . Коаксиальная линия на конце закорачивается, и расстояние от конца линии до закорачивающей перемычки берется равным примерно четверти длины волны.

Питание симметричного вибратора при помощи симметрирующего и компенсирующего широкополосного устройства показано на рис.3.6в. Здесь на коаксиальную линию надета закороченная по концам труба длиной  $l_1 + l_2$ , через отверстия в которой проходят штыри полуволнового вибратора. Один из штырей вибратора присоединен к концу внешнего проводника коаксиальной линии, а другой штырь присоединен к центральному проводнику коаксиальной линии, который, утолщаясь на длине  $l_1$ , соединяется с трубкой. Общая длина симметрирующего и компенсирующего двойного коаксиального шлейфа берется равной половине длины волны, а соотношение длин шлейфов  $l_1$  и  $l_2$  выбирается из условия максимальной ширины полосы пропускаемых частот.

### 3.3. Несимметричные вибраторы и способы их питания

Рассмотрим некоторые схемы питания несимметричных вибраторов, как правило, четвертьволновой длины. Такие вибраторы питаются при помощи коаксиальных кабелей и устанавливаются автономно или на проводящих поверхностях.

На рис.3.9а показан вертикальный вибратор, возбуждаемый при помощи проводящего диска, к которому присоединяется внешний проводник коаксиальной линии. Диск может быть заменен четырьмя (рис.3.9б) или более горизонтальными проводами длиной  $\lambda/4$  каждый. В другом случае диск или провода, играющие роль противовеса, могут быть заменены, как это показано на рис.3.9в, четвертьволновым стаканом, закороченным на одном конце. В этом случае внешняя поверхность четвертьволнового стакана возбуждается так, что он совместно с выступающим внутренним проводником коаксиальной линии образует полуволновый вибратор.

На проводящих плоскостях могут быть установлены четвертьволновые петлеобразные вибраторы, в частности с использованием шунта (рис.3.9а). Как отмечалось выше, вибраторы с шунтом обладают расширенной полосой пропускаемых частот. Другая схема вибратора четвертьволновой длины показана на рис.3.9б. Здесь емкостное реактивное сопротивление верхней половины вибратора в точках питания  $a$  и  $b$  компенсируется последовательно включенным с ним индуктивным сопротивлением нижней половины вибратора. Выбором диаметра вибратора, и соотношения длин  $l_1$  и  $l_2$  можно добиться 10 – 15%-ной полосы пропускаемых антенной частот при КСВ в фидере, близком к единице.

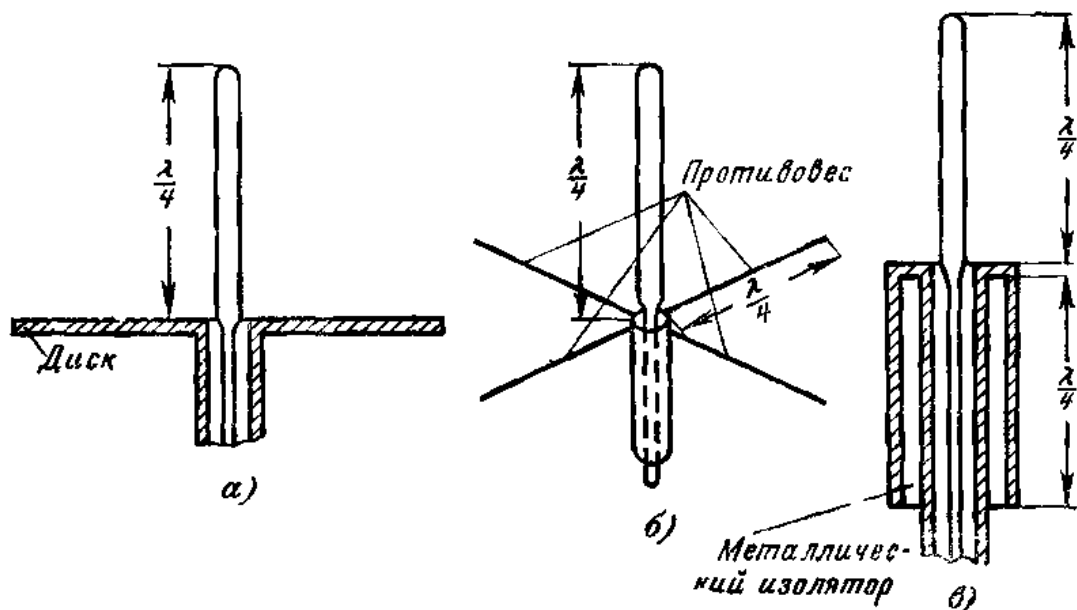


Рис.3.9. Способы питания несимметричных вибраторов

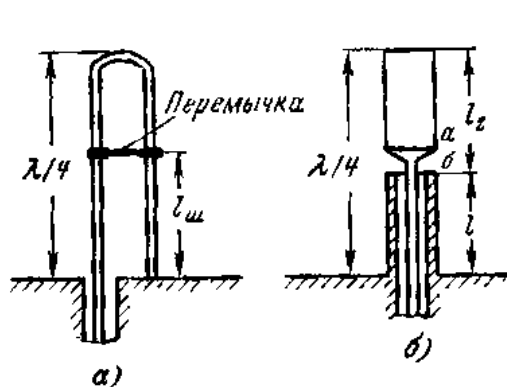


Рис.3.10.  
Несимметричные вибраторы  
с расширенной полосой частот

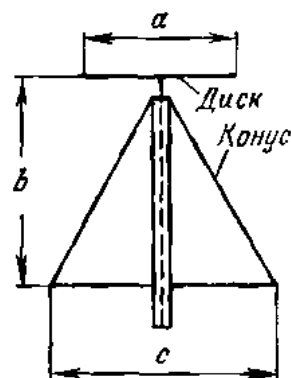


Рис.3.11.  
Дискоконусная  
антенна

Изменением формы нижней и верхней частей вибратора (рис.3.10б) можно прийти к так называемой дискоконусной антенне, показанной на рис.3.11. Эта антенна состоит из конуса и диска, между которыми с помощью коаксиального кабеля прикладывается питающее напряжение. Конус присоединяется к внешнему проводнику кабеля, а диск к центральному проводнику. Антенна оказывается диапозонной. Начиная с некоторой максимальной длины волны  $\lambda_{\text{макс}}$ , КСВ в фидере оказывается близким к единице, причем с укорочением длины волны согласование улучшается. Экспериментально подобранные размеры антенны следующие:  $a/\lambda_{\text{макс}} = 0,175$ ,  $b/\lambda_{\text{макс}} = 0,25$ ,  $c/\lambda_{\text{макс}} = 0,275$ . В диапазоне волн от  $a/\lambda = 0,175$  до  $a/\lambda = 0,45$  диаграммы направленности антенны в вертикальной плоскости изменяют свою форму незначительно — они близки к “восьмерке” с максимумом излучения в горизонтальной плоскости.

### 3.4. Турникетные вибраторы

Рассмотрим так называемую турникетную антенну, используемую очень широко на телевизионных передающих центрах. Телевизионные антенны должны удовлетворять специфическим требованиям. Прежде всего, необходимо, чтобы антенны равномерно излучали электромагнитную энергию по всем азимутальным направлениям, поскольку телевизионные передатчики обычно находятся в центре обслуживаемого ими района. По углу места направленность должна быть достаточно большой с тем, чтобы излучение было сконцентрировано в горизонтальной плоскости. Далее антенна должна излучать электромагнитную энергию с горизонтальной поляризацией поля. Это обуславливается тем, что источниками помех на ультракоротких волнах являются всякого рода промышленные установки, которые излучают электромагнитное поле в основном с вертикальной поляризацией. Кроме того, как показывает опыт, интерференционные помехи, обусловленные отражением электромагнитных волн от различных строений, имеют также преимущественно вертикальную поляризацию.

Важным является требование к полосе частот, пропускаемых антенной системой. Антенна вместе с фидером должна быть достаточно широкополосной для того, чтобы не было искажений передаваемых изображений на всех телевизионных каналах. Кроме того, антенно-фидерная система должна быть свободна от отражений, которые приводят к раздвоению изображений.

Антенна должна быть также механически очень прочной, так как она располагается на высоких опорах и подвергается сильным ветровым нагрузкам, часто при наличии гололеда. Она должна, кроме того, иметь надежную грозовую защиту, что достигается непосредственным заземлением элементов антенны.

Для того чтобы создать излучение с горизонтальной поляризацией и равномерное по всем направлениям в горизонтальной плоскости, используется крестообразный элемент, излучающей вращающееся поле. Такие элементы, образованные в простейшем случае из полуволновых вибраторов, располагаются горизонтально в несколько этажей на расстоянии  $\lambda/2$  друг от друга и питаются синфазно (рис.3.12). При четном числе элементов излучение в направлении оси их расположения (вверх и вниз) равно нулю и максимум излучения имеет место в горизонтальной плоскости.

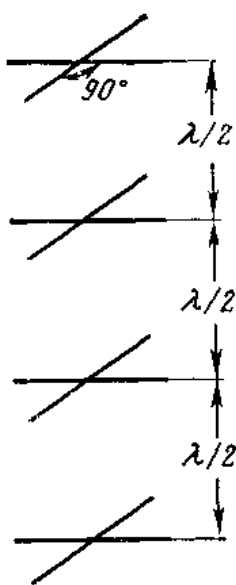


Рис.3.12. Расположение крестообразных элементов в телевизионной антенне

Вибраторы, находящиеся в одной вертикальной плоскости, питаются одним фидером, а находящиеся в другой вертикальной плоскости — другим. Фидеры настраиваются на бегущую волну и соединяются параллельно, причем один фидер берется длиннее другого на четверть длины волны, что обеспечивает сдвиг фаз токов в вибраторах креста, равный  $90^\circ$ . Схема такой турникетной антенны представлена на рис.3.13. Двухпроводные фидеры перекрещиваются между этажами и тем самым обеспечивают синфазность вибраторов. В качестве излучателей удобно применять вибраторы с шунтами, что позволяет их крепить непосредственно точками  $a$  к поддерживающей антенну металлической опоре.

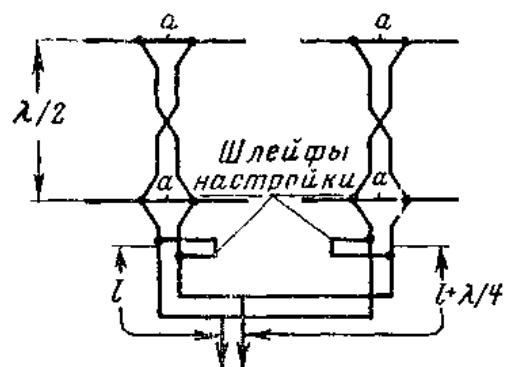


Рис.3.13.

Схема питания турникетной антенны

В качестве элементов турникетной антенны, помимо описанных выше широкополосных вибраторов, может быть использован плоскостной вибратор, предложенный Б.В.Брауде. Вибратор состоит из тонкой металлической пластины с короткозамкнутой на одном конце щелью. Этот вибратор представляет собой по существу одну половину двусторонней щелевой антенны.

Конструкция конкретного вибратора показана на рис.3.14. Полотно вибратора выполнено из 11 трубок диаметром 10 мм, и размеры его для работы в диапазоне частот от 155 до 180 МГц взяты равными:  $a = 460$  мм и  $l = 286$  мм. В точках  $BB$  вибратор накоротко замкнут на опору, а в точках  $AA$  он изолирован от опоры. На рис.3.15 показаны экспериментальные кривые входного импеданса вибратора.

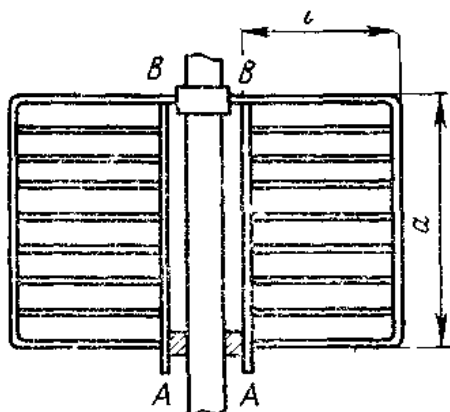


Рис.3.14.

Плоскостной вибратор Брауде

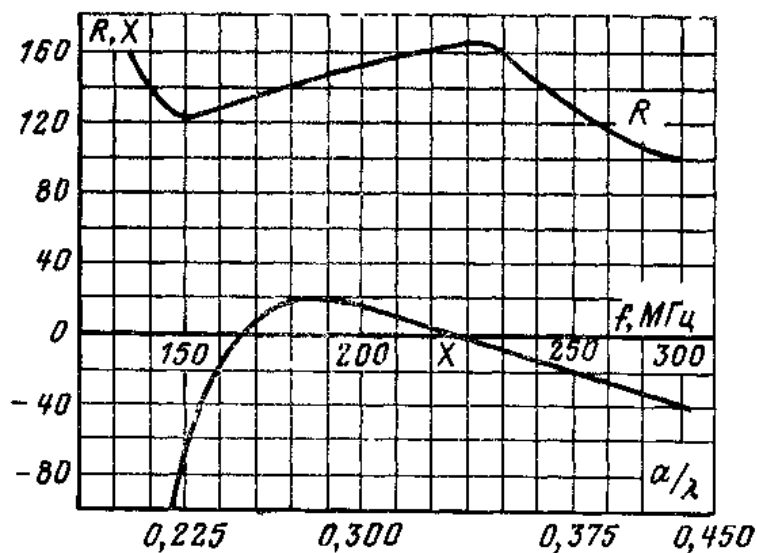


Рис.3.15.

Входной импеданс плоскостного вибратора

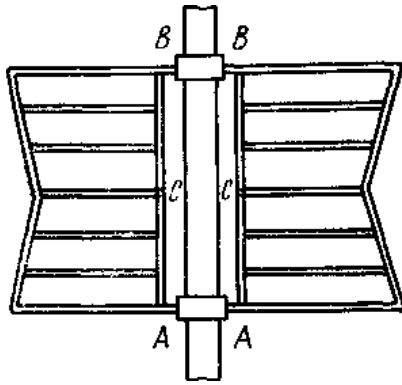


Рис.3.16. Ж-образный плоскостной вибратор

Из рисунка видно, что в полосе частот 155 — 180 МГц активная часть входного импеданса почти постоянна и равна 140 Ом, а реактивная часть близка к нулю. Поэтому плечи вибратора удобно питать коаксиальным кабелем с волновым сопротивлением порядка 70 Ом. Два таких вибратора, расположенных крестом и питаемых со сдвигом фаз  $90^\circ$ , образуют турникетный элемент. Антенна получается легкой и позволяет выполнять ее многоэтажной. При трех турникетных элементах, расположенных на расстоянии  $\lambda/2$  друг от друга, коэффициент направленного действия получается равным 3,2. Аналогичная плоскостная антенна была разработана

американской фирмой RCA. Элемент этой антенны показан на рис.3.16. Он замкнут накоротко на мачту как в точках ВВ, так и в точках АА, а питание к нему подводится в середине в точках СС. Вибратор выполнен из трубок и имеет форму буквы Ж. Входное сопротивление его в широкой полосе частот оказывается порядка 150 Ом.

### 3.5. Кольцевая антенная решетка

Расположение антенн в кольцевой решетке должно быть выбрано таким образом, чтобы обеспечивалась диаграмма направленности, близкая к круговой в горизонтальной плоскости, и специальной формы в вертикальной плоскости. Оптимальным может быть случай, когда кольцевая антенная решетка излучает максимум мощности в горизонтальной плоскости и минимум в направлениях, близких к вертикальной оси. В этом случае может быть достигнут высокий коэффициент направленного действия антенной системы.

Расчет диаграммы направленности кольцевой антенной решетки производится с учетом диаграммы направленности отдельной вибраторной антенны. При этом необходимо решить задачу дифракции сферической волны на круговом идеально проводящем цилиндре.

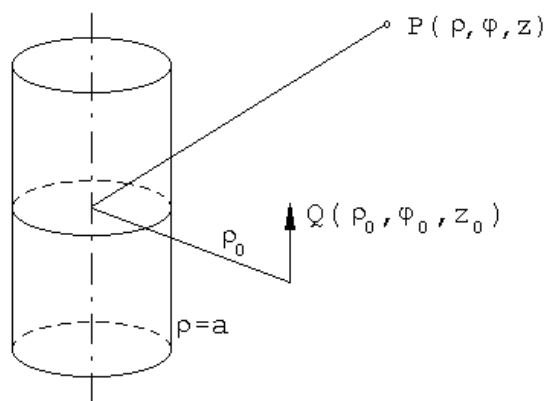


Рис.3.17. Система координат



Пусть в цилиндрических координатах  $(\rho, \varphi, z)$  (рис. 3.17) поверхность цилиндра описывается уравнением  $\rho = a$ . Сначала рассмотрим случай, когда в точке  $(\rho_0, \varphi_0, z_0)$  расположен электрический диполь с моментом  $I \cdot dz_0$ , причём  $\rho_0 > a$ . Для решения электродинамической задачи излучения диполя Герца воспользуемся запаздывающим векторным электрическим потенциалом  $\vec{A}$ . Векторный потенциал в задаче излучения продольного вибратора имеет одну составляющую:  $\vec{A} = A_z \cdot \vec{z}_0$ . Составляющие поля выразятся через  $A_z$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \left( -i\omega - \frac{i}{\omega\epsilon\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_z; & H_\rho &= -\frac{1}{\mu\rho} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \varphi}; \\ E_\varphi &= -\frac{i}{\omega\epsilon\mu\rho} \cdot \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial \varphi}; & H_\varphi &= \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \rho}; \\ E_\rho &= -\frac{i}{\omega\epsilon\mu} \cdot \frac{\partial^2 A_z}{\partial \rho \partial z}; & H_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Так как составляющие  $E_z$  и  $E_\varphi$  на поверхности цилиндра должны равняться нулю, то при  $\rho = a$  функция  $A_z$  должна удовлетворять граничному условию  $A_z = 0$ . Функцию  $A_z$ , учитывая, что она должна быть периодична по  $\varphi$  и чётна относительно  $\varphi = \varphi_0$ , будем искать в виде комбинации интеграла и ряда Фурье [13]:

$$A_z(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-ih(z - z_0)] \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m A_{zm}(\rho) \frac{1}{2\pi} \cos m(\varphi - \varphi_0) dh. \quad (3.12)$$

Так как функция  $A_z$  должна удовлетворять уравнению:

$$(\nabla^2 + k^2)A_z = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\mu I dz_0, \quad (3.13)$$

где  $\vec{r}$  и  $\vec{r}_0$  — радиусы-векторы, проведённые из начала координат соответственно в точки  $P(\rho, \varphi, z)$  и  $Q(\rho_0, \varphi_0, z_0)$ , то функция  $A_{zm}(\rho)$  должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + (k^2 - h^2)\rho - \frac{m^2}{\rho} \right] A_{zm}(\rho) = -\delta(\rho - \rho_0)\mu I dz_0. \quad (3.14)$$

Из решений этого уравнения надо выбрать такое, которое обращается в нуль при  $\rho = a$ . Очевидно, его следует искать в виде:

$$A_{zm}(\rho) = \left\{ \begin{aligned} & C_m H_m^{(2)}(v\rho) \left[ J_m(v\rho_0) - \frac{H_m^{(2)}(v\rho_0)}{H_m^{(2)}(va)} J_m(va) \right], \text{ при } \rho > \rho_0, \\ & C_m H_m^{(2)}(v\rho_0) \left[ J_m(v\rho) - \frac{H_m^{(2)}(v\rho)}{H_m^{(2)}(va)} J_m(va) \right], \text{ при } \rho < \rho_0, \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

где  $\nu = \sqrt{k^2 - h^2}$ .

Постоянную  $C_m$  можно определить, проинтегрировав уравнение (3.14) по малому промежутку переменной  $\rho$ , содержащему  $\rho = \rho_0$ , и устремив затем длину промежутка к нулю. В результате найдём:

$$C_m = -\frac{i\mu\pi}{2} I dz_0. \quad (3.16)$$

Таким образом, при  $\rho > \rho_0$  для функции  $A_z$  получится следующее выражение:

$$A_z = -\frac{\mu I dz_0}{4\pi} \frac{i}{2} \sum \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi_0) \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(2)}(\nu\rho) \left[ J_m(\nu\rho_0) - H_m^{(2)}(\nu\rho_0) \frac{J_m(\nu a)}{H_m^{(2)}(\nu a)} \right] \exp[-ih(z - z_0)] dh. \quad (3.17)$$

Чтобы найти  $A_z$  для случая  $\rho < \rho_0$ , надо в этом выражении переставить  $\rho$  и  $\rho_0$ .

Рассмотрим асимптотику функции  $A_z$  в дальней зоне. Для этого положим  $k\rho$  большим по сравнению с единицей. Потребуется вычислить асимптотику интеграла вида:

$$I = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(h) H_m^{(2)}(\nu\rho) \exp[-ih(z - z_0)] dh, \quad (3.18)$$

где  $\nu = \sqrt{k^2 - h^2}$ ,  $F(h) = J_m(\nu\rho_0) - \frac{H_m^{(2)}(\nu\rho_0) J_m(\nu a)}{H_m^{(2)}(\nu a)}$ .

Так как функция  $H_m^{(2)}(\nu a)$  не имеет нулей ( $m$  – целое), можно воспользоваться формулой [13]:

$$I \approx e^{i\nu\pi/2} \frac{e^{-ikR}}{R} F(k \cos\theta), \quad (3.19)$$

в которую надо подставить соответствующую функцию  $F(k \cos\theta)$ . Таким образом, получается следующее выражение для функции  $A_z$  в дальней зоне в сферических координатах с началом при  $z = 0$ :

$$A = \frac{\mu I dz_0}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \exp(ikz_0 \cos\theta) M(\theta, \varphi), \quad (3.20)$$

$$M(\theta, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi_0) e^{im\frac{\pi}{2}} \times \\ \times \left( J_m(k\rho_0 \sin\theta) - H_m^{(2)}(k\rho_0 \sin\theta) \frac{J_m(ka \sin\theta)}{H_m^{(2)}(ka \sin\theta)} \right), \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_m = 1, & \text{при } m = 0, \\ \varepsilon_m = 2, & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$$

Приближение соответствует пренебрежению членами, пропорциональными  $1/r^2$ ,  $1/r^3$  и т.д.

Таким образом, приходим к выражению для диаграммы направленности:

$$E_{\theta} = f(\theta) \cdot M(\theta, \varphi); \quad H_{\varphi} = \frac{E_{\theta}}{z_c}; \quad E_r = 0; \quad E_{\varphi} = 0. \quad (3.22)$$

где  $f(\theta)$  – ДН вибраторной антенны в свободном пространстве,  $M(\theta, \varphi)$  – множитель, учитывающий влияние цилиндра.

Для случая линейной антенны, простирающейся от  $z = z_1$  до  $z = z_2$ , с заданным током  $I(z_0)$ :

$$f(\theta) = \frac{i I_{\max} z_c}{2\pi} \cdot \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (3.23)$$

Для определения влияния мачты на характеристики вибраторной антенны рассмотрим зависимость сопротивления излучения одного вибратора от расстояния до поверхности опоры. Сопротивление излучения:

$$R_{\Sigma} = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left( E_{\theta} H_{\varphi}^* - E_{\varphi} H_{\theta}^* \right) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (3.24)$$

В результате вычислений получаем зависимости сопротивления излучения от расстояния между вибратором и мачтой (рис. 3.18).

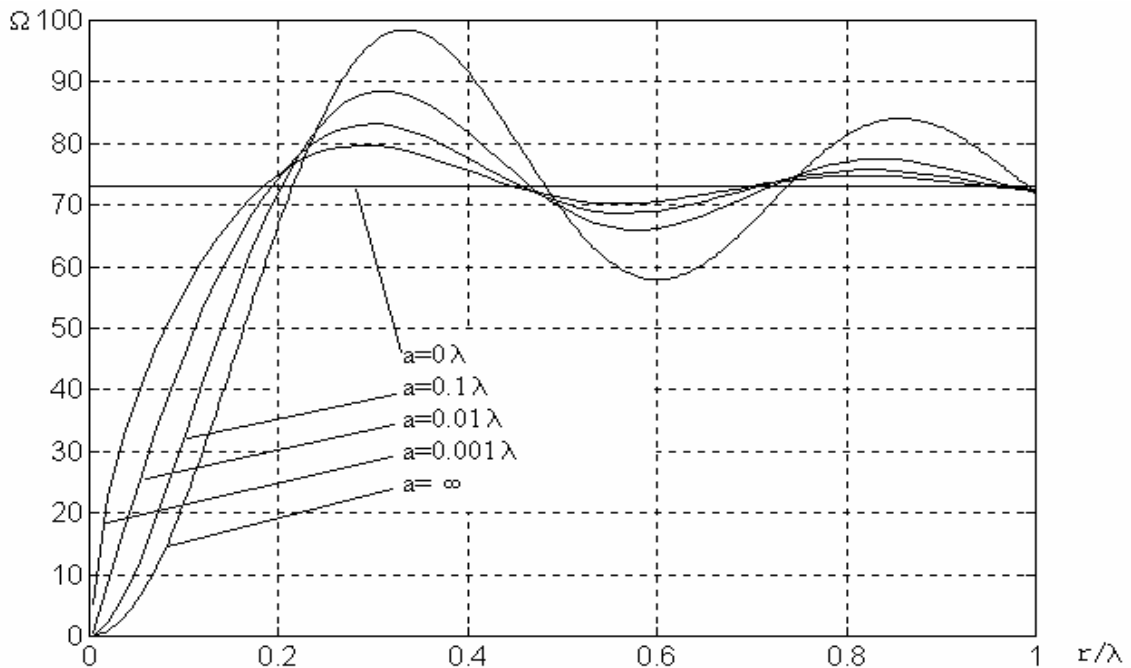


Рис.3.18. Зависимость сопротивления излучения от расстояния между вибратором и поверхностью цилиндра; на графиках через  $a$  обозначен радиус цилиндра

Таким образом, при расположении излучателя на расстоянии  $\frac{1}{4} \lambda$  от поверхности мачты, ее влияние на сопротивление излучения вибратора минимально. Из рисунка 3.18 видно, что это влияние уменьшается с уменьшением радиуса цилиндрической мачты и исчезает при обращении радиуса в ноль. С физической точки зрения это объясняется тем, что на ДН влияет электрическое поле от наведённого на цилиндре тока, который, являясь интегральной величиной поля, падающего на поверхность цилиндра, обращается в нуль в случае нулевой

площади цилиндра. Предел функции  $M(\theta, \varphi)$  при стремлении радиуса цилиндра к нулю равен единице.

Для расчета диаграммы направленности решетки применяется формула:

$$F(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^N f_n(\theta, \varphi + \beta_n) \cdot e^{-ikh_n \cos \theta} \cdot e^{-i\psi_n}, \quad (3.25)$$

где  $F(\theta, \varphi)$  – диаграмма направленности решетки;  $\theta$  и  $\varphi$  – угловые координаты;  $f_n(\theta, \varphi + \beta_n)$  – диаграмма направленности  $n$ -го излучателя;  $\beta_n$  – угловое положение  $n$ -го излучателя в горизонтальной плоскости;  $h_n$  – положение излучателя по высоте;  $k$  – волновое число;  $\psi_n$  – фаза токов излучателей.

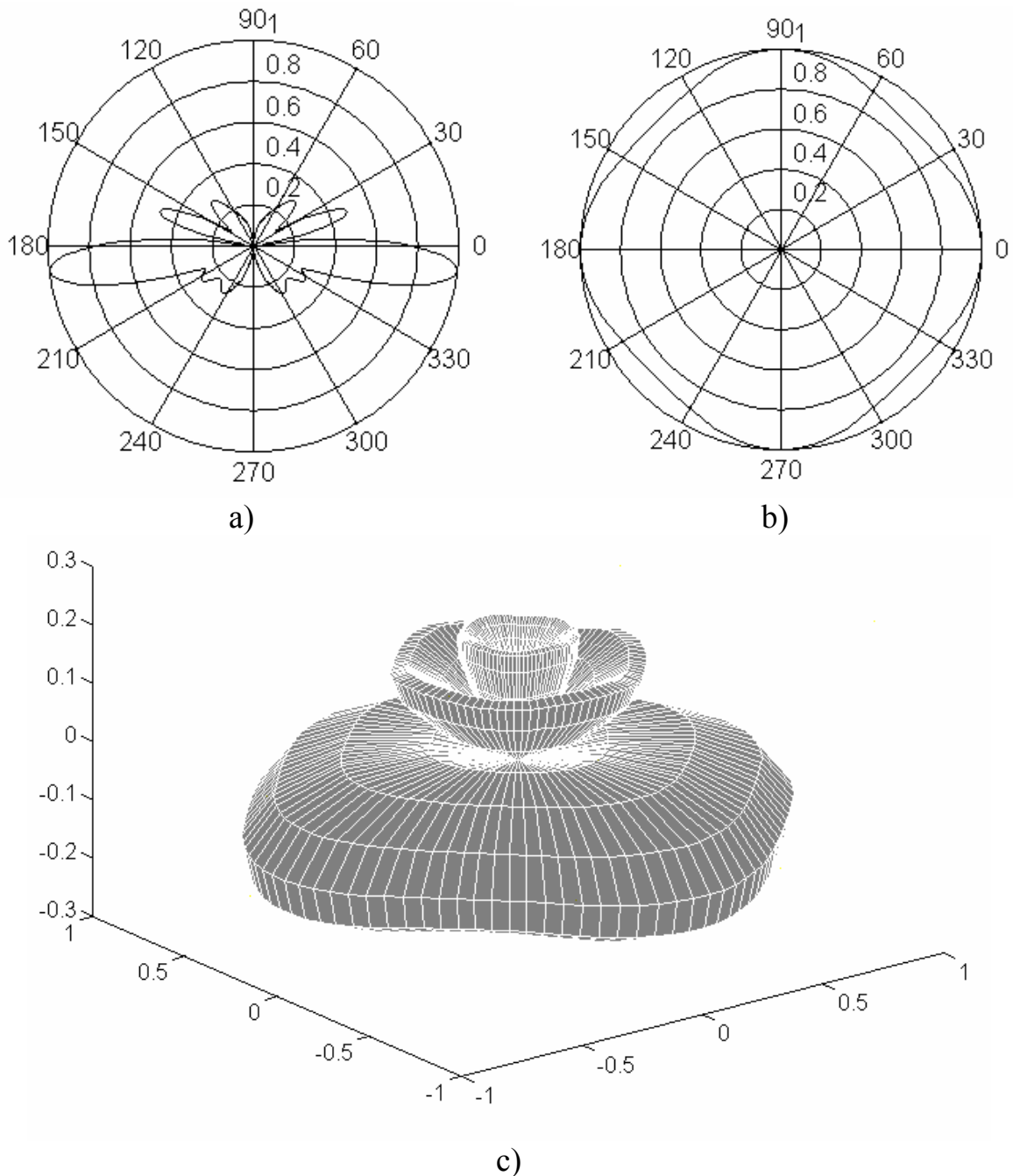


Рис. 3.19. Диаграмма направленности антенны из 16 излучателей, расположенных по 4 излучателя на четырех этажах на трубе  $\varnothing 245$  мм;  $\lambda=3$ м: а) в вертикальной плоскости; б) в горизонтальной плоскости; с) объемная

Для расчета диаграммы направленности решетки применяется формула:

$$F(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^N f_n(\theta, \varphi + \beta_n) \cdot e^{-ikh_n \cdot \cos \theta} \cdot e^{-i\psi_n}, \quad (3.26)$$

где  $F(\theta, \varphi)$  – диаграмма направленности решетки;  $\theta$  и  $\varphi$  – угловые координаты;  $f_n(\theta, \varphi + \beta_n)$  – диаграмма направленности  $n$ -го излучателя;  $\beta_n$  – угловое положение  $n$ -го излучателя в горизонтальной плоскости;  $h_n$  – положение излучателя по высоте;  $k$  – волновое число;  $\psi_n$  – фаза токов излучателей.

Для антенной решетки, диаграммы направленности которой представлены на рис.3.19, коэффициент направленного действия равен 5,5 (7,4 дБ), при этом неравномерность ДН в горизонтальной плоскости ( $\theta = \pi/2$ ) не превышает 0,9 дБ.

Таким образом, путем объединения нескольких вибраторных антенн в кольцевую антенную решетку, расположенную вокруг проводящей опоры, возможно не только компенсировать неравномерности диаграммы направленности, возникающие из-за присутствия в ближнем поле вибраторных антенн проводящего объекта, но и повысить коэффициент направленного действия по сравнению с одним полуволновым вибратором.

## Глава 4. КОНСТРУКЦИЯ СИММЕТРИЧНОЙ ВИБРАТОРНОЙ АНТЕННЫ

### 4.1. Устройство вибраторной антенны

Обратимся к рис.4.1, на котором представлена вибраторная антенна. Антенна состоит из вибратора 1, симметрирующего устройства 2, фидера 3, соединителя радиочастотного 4, распорки 5, обтекателя 6 (на рис.4.1 не показан), подстроечных штырей 7 и 8.

Вибратор 1 состоит из первого плеча 9 вибратора и второго плеча 10 вибратора. Первое 9 и второе 10 плечи вибратора разнесены относительно друг друга вдоль оси  $AA$ ; в результате разноса плеч 9 и 10 образован зазор 11. Первое 9 и второе 10 плечи выполнены из проводящего материала, например, из металлической трубки.

Симметрирующее устройство 2 состоит из первого проводника 12, второго проводника 13, расположенных параллельно друг другу, и короткозамыкателя (перемычки) 14. Короткозамыкатель 14 гальванически соединяет между собой проводники 12 и 13 симметрирующего устройства.

Короткозамыкатель 14 расположен на расстоянии в четверть длины волны (на средней частоте рабочего диапазона) от оси  $AA$  вибратора. Проводники 12 и 13 симметрирующего устройства продолжают за перемычкой 14, образуя конечные участки 15 и 16, предназначенные для крепления антенны на трубе или иной опоре. Короткозамыкатель 14, проводники 12 и 13 симметрирующего устройства выполнены, например, из металлического стержня или металлической трубки из алюминиевого сплава, стали, латуни или иного материала с хорошей проводимостью. Вибратор, проводники 12 и 13 симметрирующего устройства, короткозамыкатель 14 лежат в одной плоскости. При этом проводники 12 и 13 симметрирующего устройства перпендикулярны оси  $AA$  вибратора. Ось  $BB$  является осью симметрии конструкции, состоящей из вибратора, первого 12 и второго 13 проводников симметрирующего устройства 2, короткозамыкателя 14, подстроечных штырей 7 и 8.

В качестве фидера 3 может быть использован серийный

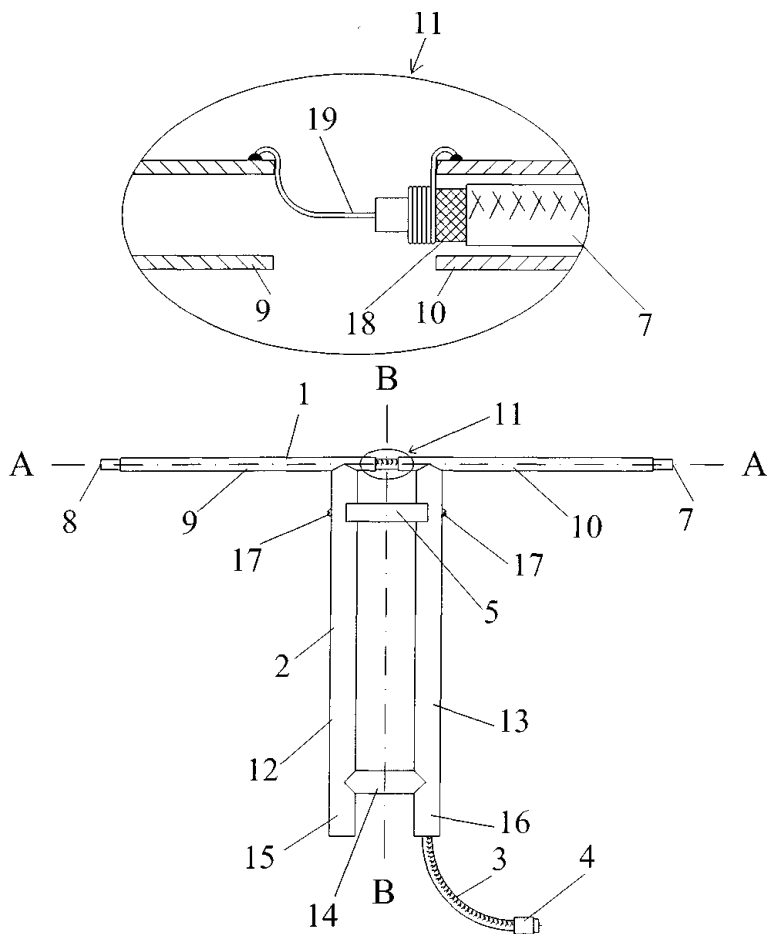


Рис.4.1. Устройство вибраторной антенны

коаксиальный кабель, внешний диаметр оболочки которого меньше внутреннего диаметра трубки плеча 10 вибратора. В качестве соединителя 4 может быть использован стандартный соединитель радиочастотный.

Распорка 5 представляет собой параллелепипед с полукруглыми вырезами на торцах. Радиусы вырезов равны внешнему радиусу проводников 12 и 13 симметрирующего устройства. Распорка 5 выполнена из диэлектрического материала; такого, например, как светостабилизированный полиэтилен или капролон.

Обтекатель 6 представляет собой полую форму, выполненную из диэлектрического материала. Обеспечивает герметичность области зазора 11. Обтекатель выполнен из диэлектрического материала; такого, например, как светостабилизированный полиэтилен или капролон.

Указанные выше устройства и детали соединены между собой следующим образом. Первое плечо 9 вибратора гальванически присоединено к первому проводнику 12 симметрирующего устройства. Второе плечо 10 вибратора гальванически присоединено ко второму проводнику 13 симметрирующего устройства. В месте соединения второго плеча 10 вибратора с трубчатым проводником 13 симметрирующего устройства на трубке 10 выполнено отверстие (на рис.4.1 не показано). Фидер 3 проложен внутри второго проводника 13 симметрирующего устройства, проходит через упомянутое отверстие, продолжается в сторону зазора 11 внутри трубки второго плеча 10 вибратора, выведен из него и простирается до первого плеча 9 вибратора. Внешний проводник 18 фидера 3 в зазоре 11 соединен с концом второго плеча 10 вибратора. Центральный проводник 19 фидера 3 соединен с первым плечом 9 вибратора. Второй конец коаксиального фидера 3 заделан в соединитель радиочастотный 4.

Распорка 5 соединяет между собой проводники 12 и 13 симметрирующего устройства 2 посредством винтов или болтов 17 (рис.4.1) таким образом, что она прилегает к проводникам 12 и 13 полукруглыми вырезами. Распорка 5 располагается на некотором расстоянии от зазора 11.

Обтекатель 6 смонтирован на вибраторе и проводниках 12 и 13 симметрирующего устройства.

Для крепления фидера 3 к трубе 13 симметрирующего устройства могут быть использованы стандартизованные хомуты, винты и гайки.

Антенна работает следующим образом. Антенна возбуждается в зазоре 11 между первым 9 и вторым 10 плечами вибратора, расположенном симметрично относительно оси симметрии  $VV$  антенны. Длина зазора 11 не превышает одной пятидесятой длины волны. Поэтому можно полагать, что вибратор возбуждается симметрично. Следовательно, несимметричный коаксиальный кабель введен в область возбуждения антенны таким образом, что он не нарушает ни физической, ни электрической симметрии антенны. Токи смещения, возникающие между вибратором и проводниками 12, 13 симметрирующего устройства продолжают токами проводимости на проводниках 12, 13 симметрирующего устройства. При этом амплитуды токов проводимости в упомянутых первом 12 и втором 13

проводниках симметрирующего устройства равны между собой, а фазы токов отличаются на  $180^\circ$ . Вследствие этого, за пределами короткозамыкателя 14 суммарный ток на внешней стороне внешнего проводника фидера 3 равен нулю. Следовательно, оболочка фидера не излучает (не принимает) электромагнитные волны. Таким образом исключается антенный эффект фидера и связанные с ним непредсказуемые искажения диаграммы направленности антенны, изменения входного импеданса антенны, излучение кросс-поляризованного поля.

Был изготовлен макет вибраторной антенны в соответствии с настоящим описанием. При этом длина каждого плеча равна 610 мм. Первое 9 и второе 10 плечи вибратора 1 разнесены по оси  $AA$ ; в результате разноса плеч вибраторов образован зазор 11 длиной 60 мм. Подстроечные штыри выдвинуты из плеч вибратора на 10 мм каждый. В результате расстояние между торцами подстроечных штырей (длина вибратора) равно 1300 мм. Первое 9 и второе 10 плечи вибратора 1 выполнены из трубы диаметром 20 мм из алюминиевого сплава марки АМгб.

Симметрирующее устройство 2 состоит из первого проводника 12 и второго проводника 13, расположенных параллельно на расстоянии 140 мм друг от друга. Проводники 12 и 13 симметрирующего устройства соединяются между собой короткозамыкателем (перемычкой) 14. При этом предусмотрена возможность изменения расстояния между вибратором и короткозамыкателем. Короткозамыкатель 14, проводники 12 и 13 симметрирующего устройства 2 выполнены из трубы диаметром 40 мм из алюминиевого сплава марки АМгб. В месте соединения второго плеча 10 первого вибратора 1 с трубчатым проводником 13 на трубке 10 выполнено отверстие. Фидер 3 выполнен из коаксиального кабеля РК-75-9-13 (диаметр защитной оболочки равен 12,2 мм). Фидер проложен внутри второго проводника 13 симметрирующего устройства 2, проходит через упомянутое отверстие, продолжается в сторону зазора 11. Внешний проводник фидера 3 в зазоре 11 соединен с концом второго плеча 10 вибратора. Центральный проводник фидера 3 соединен с первым плечом вибратора. Распорка 5 представляет собой параллелепипед с полукруглыми вырезами радиусом 20 мм. Распорка 5 расположена на расстоянии 200 мм от вибратора. Распорка 5 выполнена из капролона.

Обтекатель 6 представляет собой полую форму, выполненную из капролона. В качестве соединителя 4 использован соединитель радиочастотный СР-75-167 ПВ.

Измеренные на макете антенны значения КСВ в диапазоне частот приведены в виде графиков на рис.4.2. Данные измерений относятся к вибраторной антенне без обтекателя. Обтекатель практически не влияет на согласование антенны с фидером. Как видно из графика, диапазон частот, в котором КСВ не превышает величину, равную 1,6, составляет 16 % от средней полосы диапазона частот. На уровне 1,3 полоса частот равны 6%.

Представленная антенна может быть применена в качестве самостоятельной антенны, а также в качестве элементов более сложных вибраторных антенн, элементов антенных решеток.



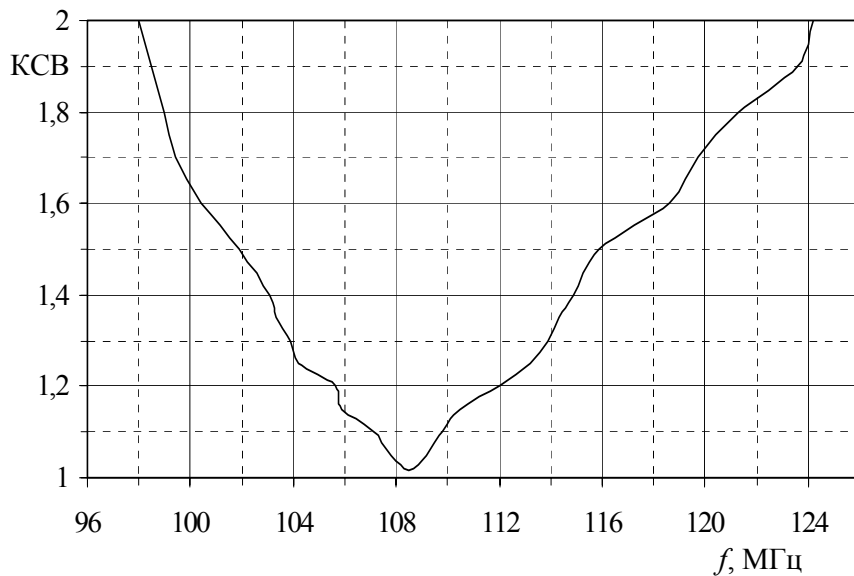


Рис.4.2. Измеренные значения КСВ в диапазоне частот: длина вибратора — 1300 мм, радиус вибратора — 10 мм, длина симметрирующего устройства — 845 мм, диаметр проводника двухпроводной линии — 40 мм, расстояние между проводниками двухпроводной линии — 140 мм

Рис.4.3 показывает антенну на опоре в виде трубы. Для крепления на трубе использованы конечные 15, 16 участки труб 12, 13, входящих в симметрирующее устройство. Антенна при этом может быть использована либо как самостоятельная антенна либо использоваться в качестве элемента линейной антенной решетки. Рис.4.4 показывает применение антенны в составе кольцевой антенной решетки, смонтированной на опоре в виде трубы. Труба может представлять собой отдельно

стоящую опору с оттяжками — мачту, либо являться одним из поясов свободно стоящей опоры — решетчатой башни. Рис.4.5 показывает применение вибраторной антенны в качестве активных элементов панельной антенны.

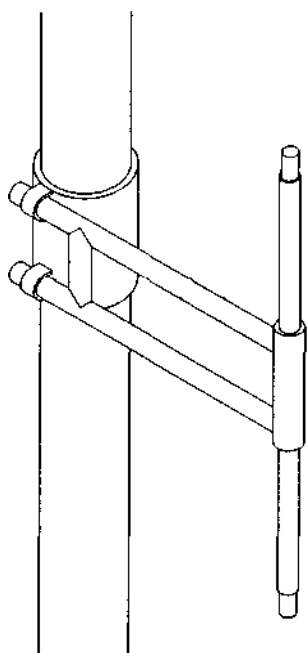


Рис.4.3. Антенна на опоре в виде трубы

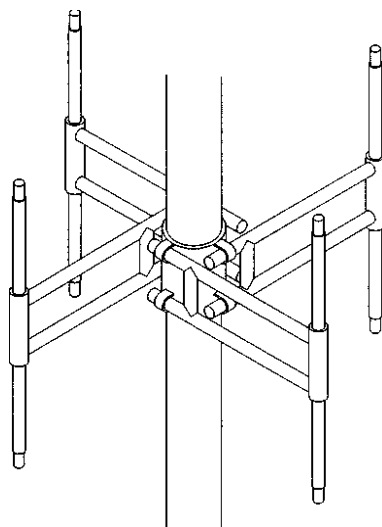


Рис.4.4. Применение антенны в составе кольцевой антенной решетки

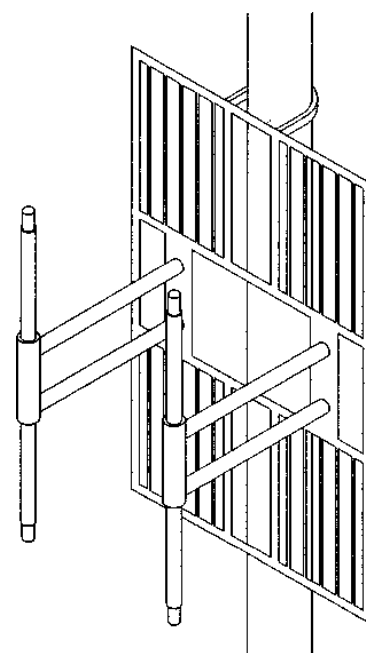


Рис.4.5. Применение вибраторной антенны в качестве активных элементов панельной антенны

Рис.4.6 показывает применение вибраторной антенны в качестве элемента пространственной антенной решетки, устанавливаемой на поясе типовой радиотелевизионной башни с обеспечением круговой диаграммы направленности в горизонтальной плоскости. Металлические радиотелевизионные башни высотой 180 м с середины 50-х годов устанавливались в областных центрах и крупных городах страны. Вершины этих башен заняты передающими телевизионными антеннами. В патенте РФ №212738, С1 предложена “Антенная система для установки на поясе башни”. Указанная антенная система решает проблему, когда требуется высоко поднятая над поверхностью Земли антенна с круговой диаграммой направленности, но для ее размещения нет свободного места на вершине башни. Антенная система содержит систему распределения мощности и излучающие элементы антенной решетки, расположенные вокруг пояса башни. В результате антенная система по патенту №212738 может быть использована для излучения сигналов передающих станций в диапазоне частот 66 – 74 МГц или в диапазоне частот 100 – 108 МГц с обеспечением круговой диаграммы направленности в горизонтальной плоскости. Реализация данного изобретения позволяет использовать существующие в настоящее время башни для ввода в эксплуатацию станций пейджинговой связи, транковых радиотелефонных систем, других систем профессиональной связи с большим радиусом действия станции.

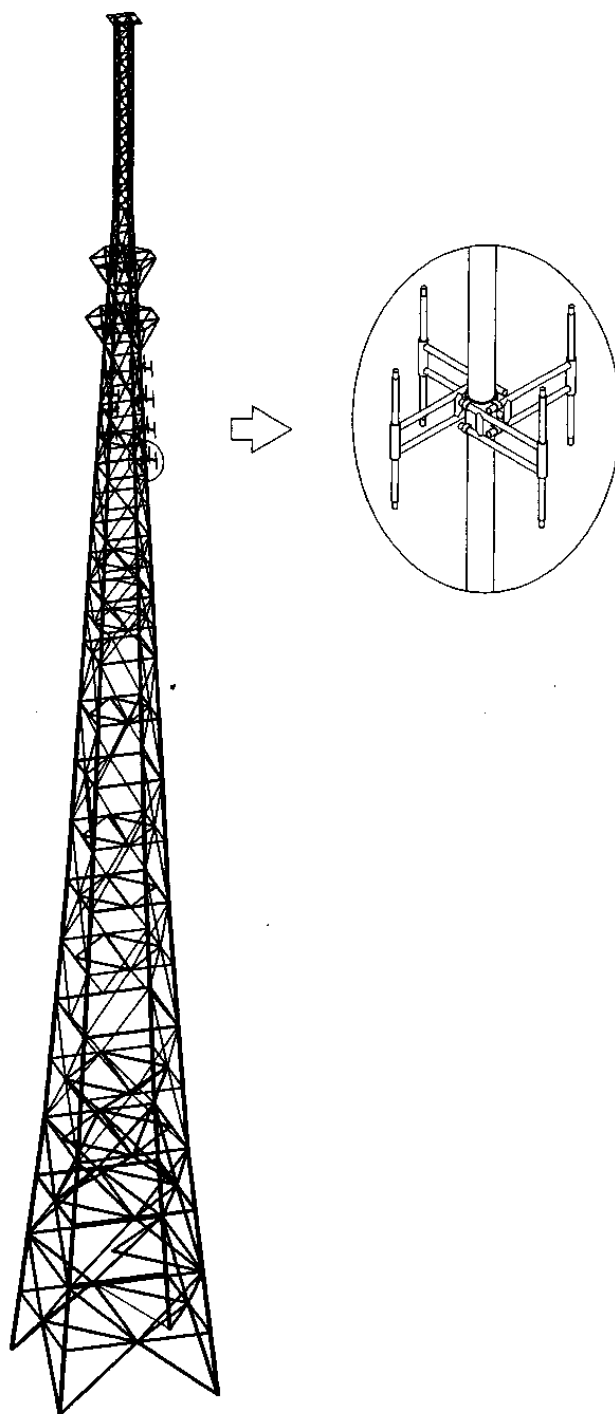


Рис.4.6.

Применение вибраторной антенны в качестве элемента антенной системы, устанавливаемой на поясе типовой радиотелевизионной башни

Рассмотренная вибраторная антенна оказывается полезной во всех тех случаях, когда требуется либо самостоятельная вибраторная антенна, либо излучающий (приемный) элемент более сложного антенного устройства или антенной системы,

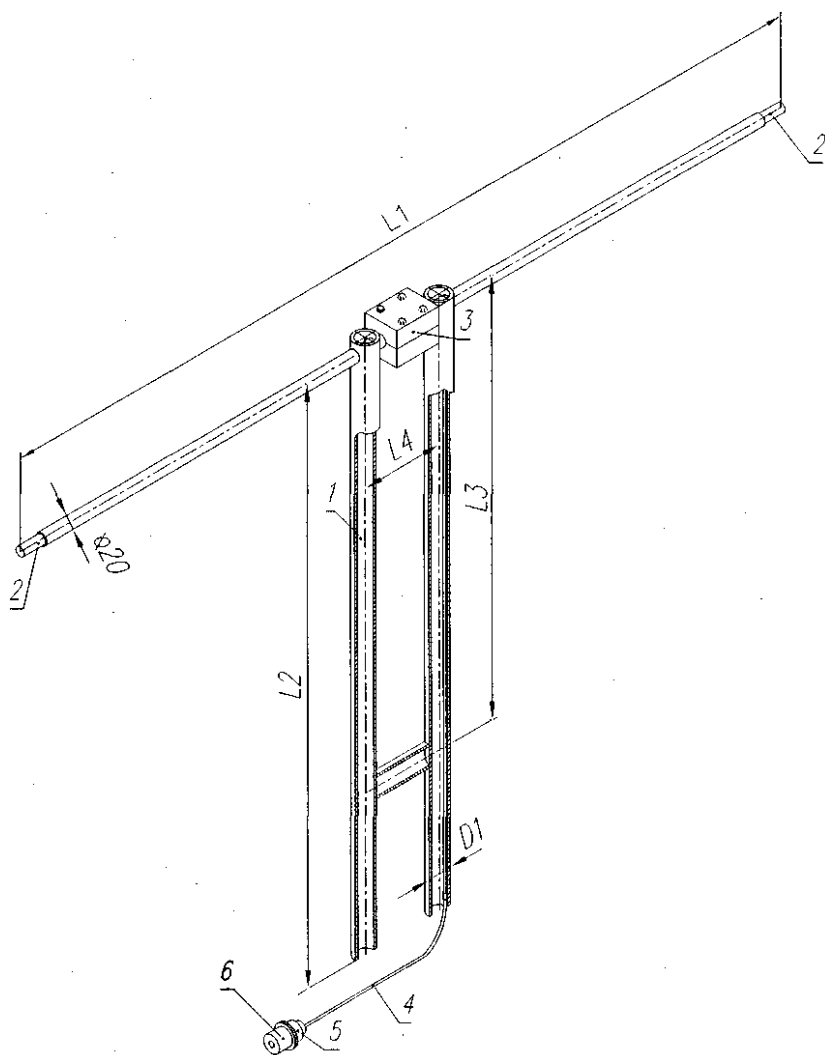


Рис.4.7. Конструкция антенны

от которых требуется хорошее согласование, низкие потери в фидере, высокий КПД антенны, малый уровень кроссполяризованного излучения.

#### 4.2. Пример описания конструкции антенны

Конструктивно антенна состоит из стойки поз.1, двух стержней поз.2, двух чашек поз.3, радиочастотного кабеля поз.4, соединителя радиочастотного поз.5, заглушки поз.6, крепежных деталей (рис.4.7).

Стойка поз.1 выполнена из двух параллельных друг другу алюминиевых труб, образующих двухпроводную линию, алюминиевой трубы короткозамыкателя и алюминиевых трубок, образующих плечи вибратора. Труба короткозамыкателя и трубки плеч вибратора не-

посредственно приварены к трубам двухпроводной линии. Вибратор состоит из двух плеч. На наружной стороне плеч устанавливаются стержни поз.2. Перемещением стержней внутри трубок, образующих плечи вибратора, выполняют необходимую настройку антенны. По окончании настройки стержни оплавляют.

Внешний проводник коаксиального кабеля (оплётка) распаивается на одно плечо вибратора, а центральный проводник на другое плечо. Для защиты от метеосадков место подключения кабеля защищено двумя чашками поз.3. Пространство между кабелем и чашками заполнено герметиком на основе кремнийорганического каучука.

Кабель закреплен на стойке хомутиком. Участок  $L_2$  двух труб-стоек за пределами короткозамыкателя предназначен для закрепления антенны на поясе башни.

#### 4.3. Расчет механической прочности вибраторной антенны

Наибольшее давление на конструкцию оказывается при ветре, направленном перпендикулярно к плоскости, в которой лежат трубы симметрирующего устройства и плечи вибратора, то есть в направлении

перпендикулярном плоскости чертежа (рис.4.8). При таком направлении ветра конструкция испытывает изгиб из плоскости чертежа. При этом нагружение может быть либо квазистационарным, когда нагрузка предполагается постоянной во времени, либо динамическим, когда необходимо учитывать изменчивость нагрузки вследствие порывистости ветра. Последнее может оказаться необходимым, если собственные частоты колебаний конструкции окажутся достаточно низкими – соизмеримыми с частотами энергетического спектра ветра.

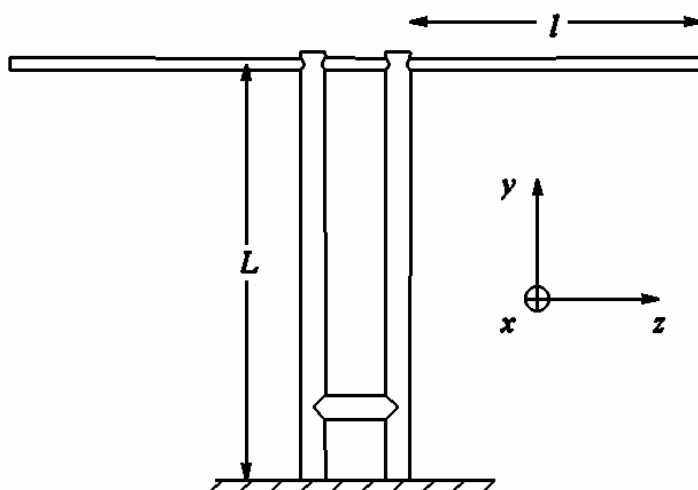


Рис. 4.8. Вибраторная антенна

Определим ветровую нагрузку, действующую на вибраторную антенну. Распределенная аэродинамическая сила, действующая на отрезок стержня единичной длины, определяется формулой:

$$q_x = C_K \frac{1}{2} \rho V^2 D, \quad (4.1)$$

где  $\rho$  – плотность воздуха ( $1,29 \text{ кг/м}^3$ );  $V$  – скорость потока, м/с;  $D$  – характерный размер элементов конструкции (диаметр), м;  $C_K \approx 1,0$  – коэффициент лобового сопротивления (число Кармана).

Расчетной схемой вибраторной антенны является консольный стержень, нагруженный равномерно распределенной нагрузкой (рис. 3.14,с). Максимальный изгибающий момент, как видно из рисунка 3.14 d, действует в месте закрепления плеча вибратора в стойке:

$$M_{MAX} = \frac{q_{x1} l^2}{2}, \quad (4.2)$$

где  $q_{x1}$  – распределенная аэродинамическая сила, действующая на плечо вибраторной антенны;  $l$  – длина плеча.

Определим максимальное напряжение  $\sigma_{MAX}$ , действующее в корневом сечении плеча вибратора:

$$\sigma_{MAX} = \frac{M_{MAX}}{W_Y}, \quad (4.3)$$

где  $W_Y$  – момент сопротивления сечения трубки плеча вибратора при изгибе.

$$W_Y = \frac{I_Y}{x_{MAX}} = \frac{\pi d^3}{32} \left( 1 - \frac{d_1^4}{d^4} \right), \quad (4.4)$$

где  $d$  – внешний диаметр трубки, из которой изготовлен диполь (м);  $d_1$  – внутренний диаметр трубки (м);  $I_Y$  – момент инерции относительно оси ординат;  $x_{max} = d/2$  – длина консольного стержня.

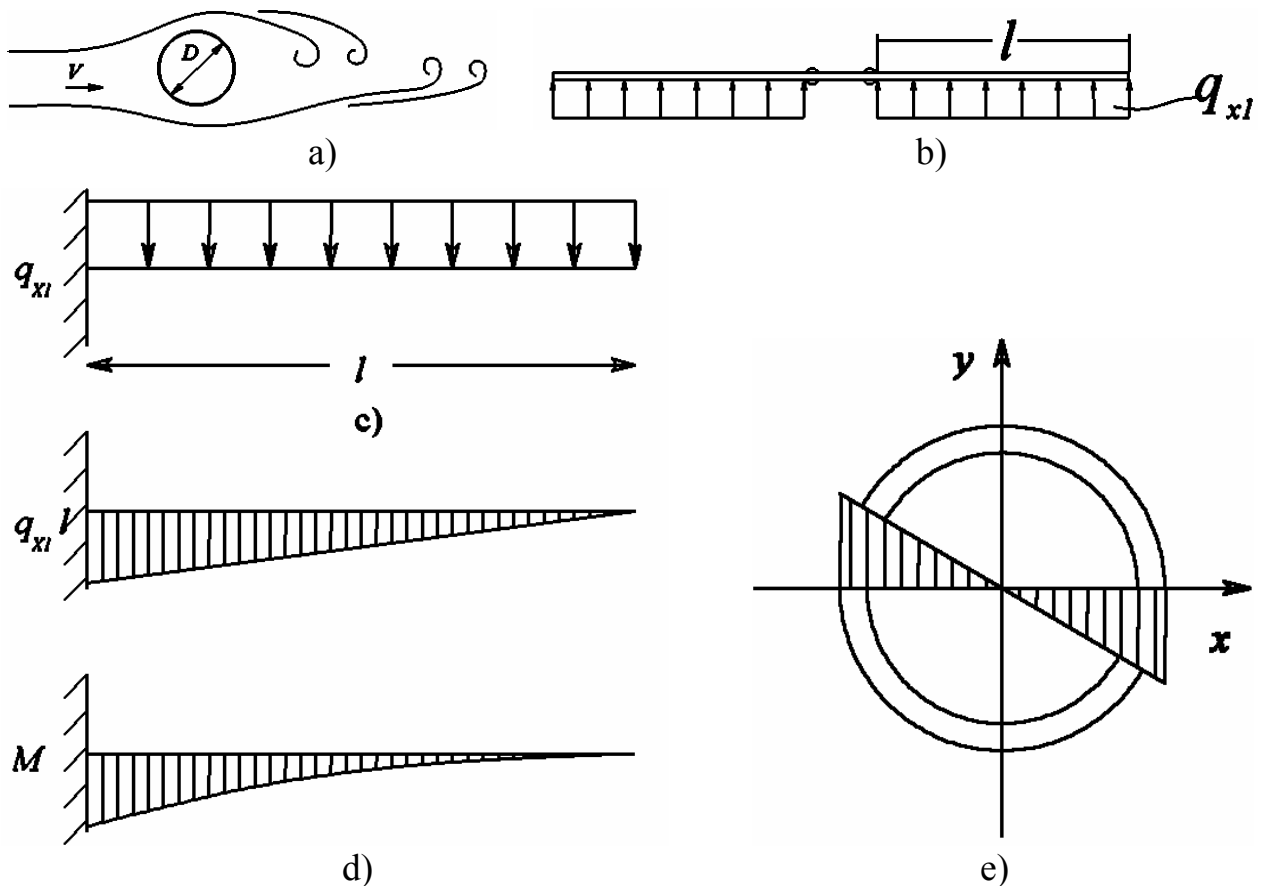


Рис.4.9. а) Возникновение вихрей Кармана в ветровом потоке; б) нагрузка на диполь; в) расчетная схема диполя, нагруженного ветровой нагрузкой; д) эпюры поперечной силы и изгибающего момента в поперечных сечениях диполя; е) распределение нормальных напряжений в поперечном сечении трубки диполя

Для материала, из которого обычно изготавливаются антенны, а это сплав АМГ-6, предел прочности составляет  $\sigma_{\epsilon} \approx 100$  МПа. Тогда фактический коэффициент запаса прочности:

$$n = \frac{\sigma_{\epsilon}}{\sigma_{MAX}}. \quad (4.5)$$

Стойки диполя также испытывают изгиб от сосредоточенной силы  $P_x$ , создаваемой плечами диполя, и от ветровой распределенной нагрузки на

трубы стойки (рис. 3.15). Крутящими моментами, создаваемыми плечами диполя в трубах стойки, пренебрегаем, как малыми величинами.

$$P_x = 2q_{x1}l, \quad (4.6)$$

$$M_{ZMAX} = P_x L + \frac{2}{2} q_{x2} L^2, \quad (4.7)$$

$$W_z = 0,1D^3 \left( 1 - \frac{D_1^4}{D^4} \right), \quad (4.8)$$

$$\sigma_{MAX} = \frac{M_{ZMAX}}{2W_z}, \quad (4.9)$$

где  $D$  – внешний диаметр стоек диполя (м),  $D_1$  – внутренний диаметр стоек (м);  $M_{ZMAX}$  – максимальный изгибающий момент в корневом сечении стоек;  $q_{x2}$  – распределенная аэродинамическая сила для стоек антенны.

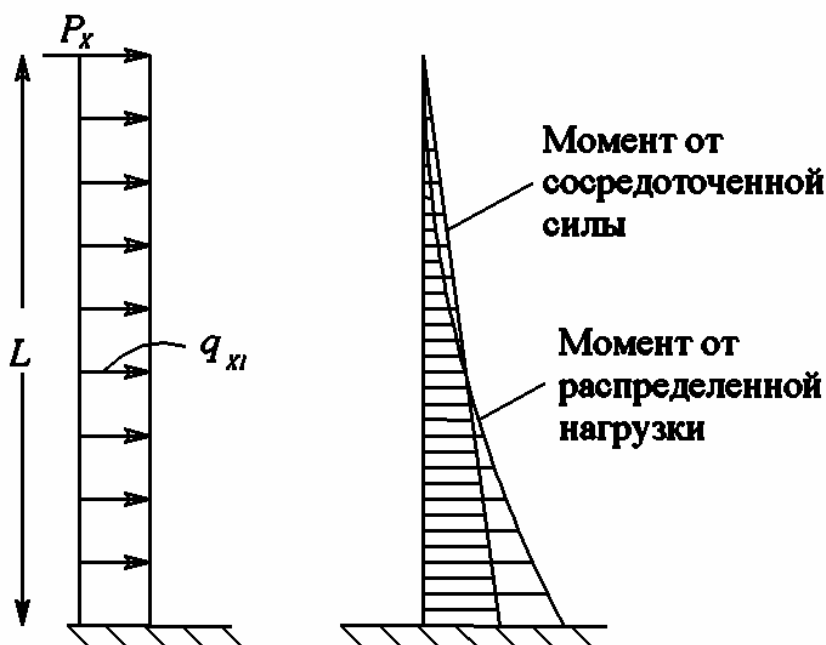


Рис. 4.10. Расчетная схема стоек антенны и эпюры изгибающих моментов

Множитель 2 в формулах (3.42) – (3.45) учитывает параллельную работу обеих стержней стоек диполя.

Коэффициент запаса прочности в стойках:

$$n = \frac{\sigma_s}{\sigma_{MAX}}, \quad (4.10)$$

при этом должно выполняться условие прочности  $n > [n]$ .

С целью оценки влияния пульсаций ветра на поведение конструкции необходимо произвести расчет собственных частот колебаний плеч вибратора. Считая закрепление корневого сечения плеча диполя в стойке жестким, находим собственную круговую частоту  $p$  основного тона колебаний по формуле для консольного стержня:

$$p = \frac{\lambda_1^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m_0}}, \quad (4.11)$$

$$I = \frac{1}{64} \pi d^4 - \frac{1}{64} \pi d_1^4, \quad (4.12)$$

где  $I$  – момент инерции поперечного сечения трубки диполя;  $\lambda_1^2 = 1,875$  – корень частотного уравнения;  $E$  – модуль упругости;  $l$  – длина плеча вибратора.

$$m_0 = \rho \frac{\pi(d^2 - d_1^2)}{4} = \frac{\pi d^2}{4} \rho \left(1 - \frac{d_1^2}{d^2}\right), \quad (4.13)$$

где  $m_0$  – погонная масса;  $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$  – плотность материала.

С полученным значением собственной частоты механических колебаний вибраторной антенны необходимо сопоставить частоту схода вихрей при обтекании трубок воздухом.

Критическая скорость ветра, вызывающая резонансные колебания, определяется, исходя из критериального соотношения:

$$fd/V = Sh, \quad (4.14)$$

где  $Sh = 0,22$  – число Струхалия [14];  $d$  – диаметр трубки;  $V$  – скорость ветра;  $f$  – частота колебаний консольной части антенны.

$$V_{\text{крит}} = fd/0,22, \quad (4.15)$$

$$f = p/2\pi. \quad (4.16)$$

В большинстве случаев критическая скорость мала, ей соответствует малый скоростной напор (меньше расчетной статической нагрузки) и поэтому расчет резонансного режима далее может не производиться.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вычислительные методы в электродинамике /Под ред. Р.Митры. —М.: Мир, 1977.
2. Hallen E. Electromagnetic Theory. —London: Chapman & Hall, 1962. —622p. —P.444 – 504.
3. Леонтович М.А., Левин М.Л. //Известия АН СССР: Серия физическая. —1944. —Т.8. —№3.
4. Леонтович М.А., Левин М.Л. К теории возбуждения колебаний в вибраторах антенн // Журнал технической физики. —1944. —Т.14. —№9. —С.481 – 506.
5. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. —М.: Радио и связь, 1988. —440с.
6. Уфимцев П.Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. —М.: Сов. радио, 1962.
7. Васильев Е.Н. //Журнал технической физики. —1965. —Т.35. —Вып.10.
8. Говорун Н.Н. //ДАН СССР. —1959. —Т.26. —№1.
9. Burke G.J., Poggio A.J. Numerical Electromagnetic Code (NEC) —Method of Moments. Part I: Program Description —Theory. —NOSC Technical Document 116. —January 1981.
10. Burke G.J., Poggio A.J. Numerical Electromagnetic Code (NEC) —Method of Moments. Part III: User's guide. —NOSC Technical Document 116. —January 1981.
11. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцев А.Д. Техническая электродинамика: Учебное пособие для вузов /Под ред. Ю.В.Пименова. —М.: Радио и связь, 2000. —536с.
12. Марков Г.Т., Сазонов Д.М. Антенны: Учебник для студентов радиотехнических специальностей вузов. —М.: Энергия, 1975.
13. Уэйт Д. Р. Электромагнитное излучение из цилиндрических систем. —М.: Советское радио, 1963.
14. Ден Гартог Дж.П. Механические колебания. —М.: Физматгиз, 1960.
15. King R.W.P. //Proceedings of the IEEE. —1967. —Vol.55. —№ 2. /Пер. с англ.: ТИИЭР. —1967. —№1. —С.6.
16. Войтович Н.И. Антенная система для установки на поясе башни. Патент 2121738 RU C1. —МКИ 6 Н 01 Q 3/00. —9710285/09. —Заявл. 04.03.97. —Опубл. 10.11.98.
17. Голин Г.М., Филонович С.Р. Классики физической науки. —М.: Высшая школа, 1989.
18. Григорьян А.Т., Вяльцев А.Н. Генрих Герц. —М.: Наука, 1968.
19. Жук М.С., Молочков Ю.Б. Проектирование антенно-фидерных устройств. —М. – Л.: Энергия, 1966.
20. Кочержевский Г.Н. Антенно-фидерные устройства. —М.: Радио и связь, 1981.
21. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн: Учебное пособие для вузов. —М.: Наука, 1989. —544 С.
22. Носов Ю., Кукаев А. Энциклопедия отечественных антенн. —М.: Солон-Р, 2001.



23. Пистолькорс А.А., Бахрах Л.Д., Курочкин А.П. Развитие отечественной антенной техники (к 100-летию изобретения радио) //Радиотехника. —1995. —№7, 8.
24. Фрадин А.З. Антенно-фидерные устройства: Учебное пособие для вузов связи. —М.: Связь, 1977. —440 с.
25. Чернышев В.П., Шейнман Д.И. Распространение радиоволн и антенно-фидерные устройства. —М.: Связь, 1973.
26. Шамеева Н.И. Электродинамический расчет симметричного вибратора, возбуждаемого в разрез двухпроводной линией //Докл. АН СССР. —1971. —Т.201. —№2. —С.328 – 330.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### П1. Значения относительной диэлектрической проницаемости некоторых веществ при $t = 20^\circ\text{C}$

Вещество	$\epsilon_r$	Вещество	$\epsilon_r$
Воздух (сухой)	1,00058	Слюда	5,7 ... 7
Фторопласт ФФ-4	2	Стеклотекстолит СФ-1-35	6
Нефть	2,1	Стеатит (керамика)	6,25
Бумага	2 ... 2,5	Поликор (керамика)	9,6
Дерево	2,2 ... 3,7	Сапфир	9,4 ... 11,7
Полиэтилен	2,25	Почва (песчаная)	10
Полистирол	2,55	Почва (скалистая)	14
Эбонит	2,5 ... 2,8	Кремний (высокоомный)	11,7
Лед	3,2	Арсенид галлия	13,3
Плавленый кварц	3,8	Ферриты	5 ... 16
Стекло (боросиликатное)	4	Вода (дистиллированная)	80,4
Полистирол, наполненный окисью титана ПТ-5	5	Конденсаторная керамика ТЛ/750	100
Фарфор	5 ... 6,8	Титанат бария ( $\text{BaTiO}_3$ )	300 ... 1500

### П2. Значения удельной проводимости некоторых веществ при $t = 20^\circ\text{C}$

Вещество	$\sigma/10^7$ , См/м	Вещество	$\sigma$ , См/м
Серебро	6,1	Вода (морская)	3,3
Медь	5,8	Германий	2,13
Золото	4,13	Почва (влажная)	$10^{-2}$
Алюминий	3,54	Вода (дистиллированная)	$10^{-4}$
Латунь (90 % Cu)	2,41	Кварц	$10^{-9}$
Цинк	1,69	Сухая древесина	$10^{-9} \dots 10^{-10}$
Латунь (70 % Cu)	1,45	Стекло	$10^{-9} \dots 10^{-13}$
Никель	1,37	Слюда	$10^{-11} \dots 10^{-13}$
Графит	1,25	Пенопласт	$10^{-11}$
Платина	1,0	Стеклотекстолит	$10^{-11} \dots 10^{-12}$
Железо	1,0	Резина	$10^{-11} \dots 10^{-12}$
Олово	0,88	Полистирол	$10^{-13} \dots 10^{-15}$
Сталь (литая)	0,77	Полиэтилен	$10^{-15}$
Свинец	0,48	Эбонит	$10^{-12} \dots 10^{-14}$
Чугун (серый)	0,1	Фарфор	$3 \cdot 10^{-13}$
Кремний	$1,7 \cdot 10^{-3}$	Воздух	$10^{-15} \dots 10^{-18}$

### П3. Значения относительной магнитной проницаемости некоторых веществ при $t = 20^\circ\text{C}$

Вещество	$\mu_r$	Вещество	$\mu_r$
<i>Парамагнетики</i>		<i>Ферромагнетики</i>	
Воздух	1,0000004	НЧ ферриты	До $10^5$
Эбонит	1,000014	Железо (трансформаторное)	$10^4$
Алюминий	1,000023	Пермаллой (78% Ni, 22% Fe)	$8 \cdot 10^4$
Кислород (жидкий)	1,0034	Чистое железо (отожженное)	$2,8 \cdot 10^5$
<i>Диамагнетики</i>			
Вода	0,999991		
Медь	0,9999904		
Стекло	0,999987		

### П4. Формулы векторного анализа

#### Определение операций

Поток  $\vec{a}$  через поверхность  $S$ :

$$\Phi = \oint_S \vec{a} d\vec{S} = \int_S a_n dS, \quad (\text{П.1})$$

где  $d\vec{S} = \vec{n}_0 dS$ ;  $\vec{n}_0$  — орт нормали к поверхности  $S$ .

Циркуляция вектора  $\vec{a}$  по контуру  $\Gamma$ :

$$\mathcal{C} = \oint_{\Gamma} \vec{a} d\vec{l} = \int_{\Gamma} a_t dl, \quad (\text{П.2})$$

где  $dl$  — элемент замкнутого контура  $\Gamma$ ;  $a_t$  — касательная к контуру, составляющая вектора  $\vec{a}$ .

Градиент скалярной функции  $u$ :

$$\text{grad} u = \vec{n}_0 \frac{\partial u}{\partial n}, \quad (\text{П.3})$$

где  $\vec{n}_0$  — орт нормали к поверхности  $u = \text{const}$ .

Дивергенция вектора  $\vec{a}$ :

$$\text{div} \vec{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{a} d\vec{S}}{\Delta V}, \quad (\text{П.4})$$

где  $S$  — поверхность, ограничивающая объем  $\Delta V$ .

Ротор вектора  $\vec{a}$ :

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S [\vec{n}_0, \vec{a}] dS}{\Delta V}, \quad (\text{П.5})$$

где  $S$  — поверхность, ограничивающая объем  $\Delta V$ , а  $\vec{n}_0$  — орт внешней нормали к поверхности  $S$ .

Проекция ротора вектора  $\vec{a}$  на произвольное направление  $\vec{n}_0$ :

$$\operatorname{rot}_n \vec{a} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma} \vec{a} d\vec{l}}{\Delta S}, \quad (\text{П.6})$$

где  $\Delta S$  — плоская площадка, ограниченная контуром  $\Gamma$ , расположенная перпендикулярно направлению вектора  $\vec{a}$ .

### Операции в декартовых координатах

$$\operatorname{grad} u = \vec{x}_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (\text{П.7})$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad (\text{П.8})$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{x}_0 \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{z}_0 \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right), \quad (\text{П.9})$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{П.10})$$

### Операции в цилиндрических координатах

$$\operatorname{grad} u = \vec{r}_0 \frac{\partial u}{\partial r} + \vec{\varphi}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \vec{z}_0 \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (\text{П.11})$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad (\text{П.12})$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{r}_0 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) + \vec{\varphi}_0 \left( \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) + \vec{z}_0 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right), \quad (\text{П.13})$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{П.14})$$

### Операции в сферических координатах

$$\operatorname{grad} u = \vec{r}_0 \frac{\partial u}{\partial r} + \vec{\varphi}_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \vec{\theta}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad (\text{П.15})$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta}, \quad (\text{П.16})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} = & \vec{r}_0 \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(\sin \theta \cdot a_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right] + \\ & + \vec{\theta}_0 \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r} \right] + \vec{\varphi}_0 \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(ra_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right], \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (\text{П.18})$$

### Основные теоремы

Теорема Остроградского-Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \oint_S \vec{a} d\vec{S}. \quad (\text{П.19})$$

Теорема Стокса:

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{a} d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{a} d\vec{l}. \quad (\text{П.20})$$

Теорема Грина:

$$\int_V (\nabla \psi \nabla \varphi + \psi \nabla^2 \varphi) dV = \oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \quad (\text{П.21})$$

$$\int_V (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) dV = \oint_S \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS. \quad (\text{П.22})$$

### Некоторые тождества

$$\operatorname{grad}(\varphi \psi) = \psi \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{grad} \psi, \quad (\text{П.23})$$

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{a}) = (\vec{a}, \operatorname{grad} \varphi) + \varphi \operatorname{div} \vec{a}, \quad (\text{П.24})$$

$$\operatorname{div}[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b} \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot} \vec{b}, \quad (\text{П.25})$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0, \quad (\text{П.26})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0, \quad (\text{П.27})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} - \nabla^2 \vec{a}, \quad (\text{П.28})$$

$$\operatorname{rot}(\varphi \vec{a}) = [\operatorname{grad} \varphi, \vec{a}] + \varphi \operatorname{rot} \vec{a}, \quad (\text{П.29})$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla^2 u, \quad (\text{П.30})$$

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}). \quad (\text{П.31})$$