

Госкомитет СССР по народному образованию

Челябинский политехнический институт
имени Ленинского комсомола

Кафедра строительной механики

539.3/.6(07)

И425

В.А.Икрин, С.Б.Шматков

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ПЛОСКИХ ФИГУР

Учебное пособие
для самостоятельной работы

Одобрено учебно-методической комиссией
инженерно-строительного факультета

Челябинск
1988

59.3/.6(07)

125

УДК 539.3/.6(07)

В.А.Икрип, С.Б.Шматков. Геометрические характеристики плоских фигур: Учебное пособие для самостоятельной работы. - Челябинск: ЧПИ, 1988. - 48 с.

Даны понятия и методы определения основных геометрических характеристик поперечных сечений стержней, используемые в сопротивлении материалов.

Ориентировано на самостоятельное изучение темы, вследствие чего наряду с основными теоретическими положениями содержит контрольные вопросы, поясняющие примеры и задачи для самостоятельного решения. Приведена ЭВМ-программа определения положения главных центральных осей и величин главных моментов инерции.

Предназначено для студентов, изучающих курс сопротивления материалов. Может быть использовано в курсовом и дипломном проектировании.

Ил. 39, список лит. - 3 назв.

Рецензенты: В.В.Шарухов, В.Ф.Шур.

22832 / 8 8

ЧЕЛЯБИНСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА

© Челябинский политехнический институт
имени Ленинского комсомола, 1988.

59.4(075) + 4.0711

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
I. ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ, ИСПОЛЗУЕМЫЕ В СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ	
I.1. Понятие о геометрических характеристиках. Основные их свойства	6
I.2. Контрольные вопросы	9
2. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ФИГУРЫ	
2.1. Статические моменты и их связь с координатами центра тяжести фигуры	10
2.2. Контрольные вопросы	11
2.3. Примеры определения статических моментов и координат центров тяжести фигур	12
2.4. Задачи для самостоятельного решения	14
3. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРОСТЕЙШИХ ФИГУР	14
3.1. Прямоугольник	14
3.2. Треугольники	15
3.3. Круг и кольцо	16
3.4. Пояснения к таблицам геометрических характеристик прокатных профилей	17
4. ГЛАВНЫЕ ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СИММЕТРИЧНЫХ ФИГУР	
4.1. Понятие о главных осях. Главные центральные оси. Главные моменты инерции	18
4.2. Изменение моментов инерции при параллельном переходе от центральных осей к нецентральному	19
4.3. Контрольные вопросы	21
4.4. Примеры определения главных моментов инерции симмет- ричных фигур	21
4.5. Задачи для самостоятельного решения	25

5. ГЛАВНЫЕ ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ФИГУР

5.1. Изменение моментов инерции при повороте координатных осей	25
5.2. Главные оси. Главные центральные оси	27
5.3. Главные моменты инерции. Экстремальные свойства главных моментов инерции	27
5.4. Контрольные вопросы	28
5.5. Примеры определения положения главных центральных осей и величин главных моментов инерции	29
5.6. Задачи для самостоятельного решения	33
5.7. Программа определения положения главных центральных осей и величин главных моментов инерции	34
6. ОТВЕТЫ	
6.1. Ответы на контрольные вопросы к главе I	42
6.2. Ответы к задачам для самостоятельного решения	42
ЛИТЕРАТУРА	43
ПРИЛОЖЕНИЕ	44

ПРЕДИСЛОВИЕ

При оценке прочности элементов стержневых конструкций приходится вычислять различные геометрические параметры, зависящие от формы и размеров поперечных сечений стержней. Этой теме посвящен специальный раздел курса сопротивления материалов "Геометрические характеристики плоских фигур".

С принципиальной точки зрения для вычисления геометрических характеристик достаточно ввести их понятия и дать соответствующие формулы, после чего можно адресовать читателя к разделу "Определенный интеграл" курса математического анализа. Однако необходимость разработки практических методов расчетов сечений сложной формы, когда пути прямого интегрирования становятся чрезмерно трудоемкими, заставляет специально рассматривать эту тему.

Предлагаемое пособие рассчитано прежде всего на читателя, приступившего к изучению курса сопротивления материалов. При этом авторы ориентировались на возможность самостоятельной проработки темы без предварительного лекционного изложения и аудиторных практических занятий. Выбранная направленность пособия определила объем и компоновку материала, методику изложения, количество иллюстраций и форму самоконтроля.

Расчеты реальных стержневых конструкций с сечениями сложной формы нередко требуют громоздких вычислений геометрических характеристик. В подобных случаях целесообразно обращение к ЭВМ. Предусмотрев такую потребность, авторы включили в пособие программу решения наиболее распространенной задачи рассматриваемого раздела - определения положения главных центральных осей и вычисления величин главных моментов инерции. Это дополнение может быть использовано и в курсе сопротивления материалов, и в курсовом и дипломном проектировании.

При подготовке пособия использован основной учебник по сопротивлению материалов, рекомендуемый в настоящее время студентам строительных специальностей, [1], а также изданный ранее конспект лекций [2]. Таблицы сортамента перепечатаны из учебника [3].

I. ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

I.1. Понятие о геометрических характеристиках.

Основные их свойства

Рассмотрим плоскую фигуру (поперечное сечение стержня) в системе координат xy (рис. I.1). Обозначим буквой A площадь фигуры[†]. Выделим в произвольной точке элементарную площадку dA .

Интеграл произведения элементарной площадки и ее координаты, отсчитываемой от данной оси, называется статическим моментом фигуры относительно оси:

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA. \quad (I.1)$$

S_x - статический момент фигуры относительно оси x ; S_y - относительно оси y [‡]. Индекс A у интеграла означает, что интегрирование ведется по всей площади фигуры.

Размерность статического момента - m^3 , cm^3 и т.п.

Из равенств (I.1) видно, что знак статического момента зависит от положения фигуры в координатной

системе. Так, для фигур, расположенных в первом и втором квадрантах, статические моменты $S_x > 0$, в третьем и четвертом - $S_x < 0$. Аналогична зависимость знака S_y от положения фигуры.^{‡‡‡}

Величина статического момента определяется расстоянием от фигуры до оси. Чем больше это расстояние, тем больше соответствующий статический момент.

Таким образом, статические моменты могут принимать любые значения - положительные, отрицательные, и в частности нулевые.

[†] Обозначение от англ. слова *area* - площадь.

[‡] Обозначение от англ. слова *statical* - статический.

^{‡‡‡} Знак статического момента S_x (или S_y) изменится, если при фиксированном положении фигуры изменить направление оси y (или x).

Интеграл произведения элементарной площади и квадрата ее координаты, отсчитываемой от данной оси, называется осевым моментом инерции фигуры относительно оси. Момент инерции обозначается буквой $J^{\#}$.

$$J_x = \int_A y^2 dA, \quad J_y = \int_A x^2 dA. \quad (I.2)$$

J_x - осевой момент инерции фигуры относительно оси x ; J_y - то же относительно оси y .

Осевые моменты инерции всегда положительны, так как положительны интегрируемые произведения.

Величины осевых моментов инерции не зависят от направления осей. Отсюда следует, что при повороте фигуры на 180° вокруг оси x или y осевые моменты инерции не изменятся.

Интеграл произведения элементарной площади и ее координат называется центробежным моментом инерции фигуры относительно осей x и y .

$$J_{xy} = \int_A xy dA. \quad (I.3)$$

Центробежный момент инерции может быть как положительным, так и отрицательным. У фигур, расположенных в первом и третьем квадрантах, центробежный момент инерции положительен, во втором и четвертом - отрицателен.

Если при фиксированном положении фигуры изменить направление одной оси, знак центробежного момента изменится. При изменении направлений обеих осей знак центробежного момента останется прежним. Справедливо и обратное: если повернуть фигуру вокруг одной из осей на 180° , знак центробежного момента изменится.

Интеграл произведения элементарной площади и квадрата ее радиуса называется полярным моментом инерции ^{##} фигуры относительно полюса O .

$$J_p = \int_A \rho^2 dA. \quad (I.4)$$

[#] Обозначение от англ. слова *inertia* - инерция.

^{##} Интегралы вида (I.2)-(I.4) вводятся в механике. Оттуда перешли и термины. В сопротивлении материалов эти термины используются без изменения, хотя обсуждаемые понятия рассматриваются как геометрические категории.

Размерность моментов инерции - м⁴, см⁴ и т.п.

Если полюс O совпадает с началом координат, то

$$J_x + J_y = \int_A y^2 dA + \int_A x^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A \rho^2 dA = J_p,$$

т. е. сумма осевых моментов инерции равна полярному моменту относительно начала координат:

$$J_p = J_x + J_y. \quad (I.5)$$

Учитывая, что определенный интеграл - это сумма, можно отметить важное свойство рассмотренных геометрических характеристик. Статический момент или момент инерции составной фигуры относительно какой-либо оси равен сумме одноименных геометрических характеристик составляющих фигур, вычисленных для этой же оси. Например, при определении статического момента фигуры, показанной на рис. I.2, относительно оси x ее можно разбить на три части. После этого $S_x = S_x^{(1)} + S_x^{(2)} + S_x^{(3)}$, где S_x - статический момент всей фигуры относительно оси x ; $S_x^{(1)}$, $S_x^{(2)}$ и $S_x^{(3)}$ - статические моменты относительно оси x треугольника 1, 2 и прямоугольника 3, образующих данную составную фигуру. Аналогично можно определить осевые, центробежные или полярные моменты инерции. Итак,

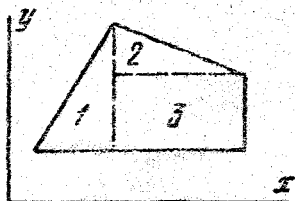


Рис. I.2

$$S_x = \sum_{i=1}^n S_x^{(i)}, \quad S_y = \sum_{i=1}^n S_y^{(i)}; \quad (I.6)$$

$$J_x = \sum_{i=1}^n J_x^{(i)}, \quad J_y = \sum_{i=1}^n J_y^{(i)}; \quad (I.7)$$

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^n J_{xy}^{(i)}; \quad (I.8)$$

$$J_p = \sum_{i=1}^n J_p^{(i)}. \quad (I.9)$$

В формулах (I.6)-(I.9) i - номер составляющей фигуры; n - количество составляющих фигур; верхним индексом i отмечены геометрические характеристики составляющих фигур. Подчеркнем, что все одноименные геометрические характеристики, входящие в формулы

(I.6)–(I.9) следует вычислять для одних и тех же осей. Сумма геометрических характеристик, вычисленных относительно различных осей, бессмысленна.

Рассмотренные геометрические характеристики не исчерпывают всего их перечня, изложенного в приложениях к задачам. В дальнейшем будут введены новые геометрические моменты, зависящие от произвольных выносов или выносов к центру масс.

I.2. Контрольные вопросы

1. Что называется статическим моментом плоской фигуры относительно оси?

2. Какую размерность имеет статический момент?

3. Что называется осевым, центробежным и полярным моментами инерции?

4. Какую размерность имеют моменты инерции?

5. Какую равен сумма осевых моментов инерции фигуры относительно пары взаимно перпендикулярных осей?

6* Для какой из трех осей (рис. I.5) статический момент квадратной фигуры будет наибольшим, для какой – наименьшим?

7* Какой будет ответ на вопрос 6, если направление оси y изменить на противоположное?

8* Для какой из трех осей (рис. I.5) осевой момент инерции квадратной фигуры будет наибольшим, для какой – наименьшим?

9* Какой будет ответ на вопрос 8, если направление оси y изменить на произвольное?

10* Для фигуры, изображенной на рис.

I.4 сплошной линией, определить, какой момент инерции больше: J_x или J_y ?

11* Каким будет ответ на вопрос 10, если фигуру повернуть на 180° вокруг оси y ?

12* Каков знак центробежного момента инерции фигуры, показанной на рис. I.4 сплошной линией?

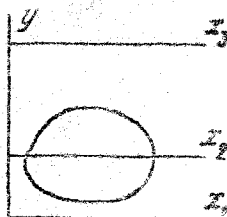


Рис. I.5

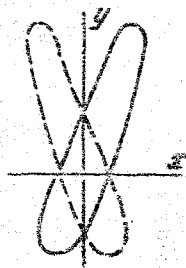


Рис. I.4

*На вопросы, отмеченные звездочкой, ответы приведены в конце пособия.

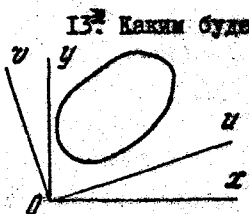


Рис. 1.5

13. Каким будет ответ на вопрос 12, если направление оси x изменить на противоположное?
 14. Каким будет ответ на вопрос 12, если фигуру повернуть на 180° вокруг оси y , при направлениях осей, показанных на рис. 1.4?
 15. Как соотносится между собой суммы осевых моментов инерции $J_x + J_y$ и $J_z + J_v$ для фигуры, показанной на рис. 1.5?

2. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ФИГУРЫ

2.1. Статические моменты

и их связь с координатами центра тяжести фигуры

Статические моменты могут быть найдены непосредственным интегрированием правых частей равенств (1.1). Однако процедура интегрирования обычно громоздка и нежелательна в практических расчетах. Поэтому, не отказываясь от возможности определения статических моментов этим способом, в интегрировании будем обращаться при отсутствии других путей.

Статические моменты и координаты центра тяжести фигуры связаны простой зависимостью. Установим ее. Для этого рассмотрим

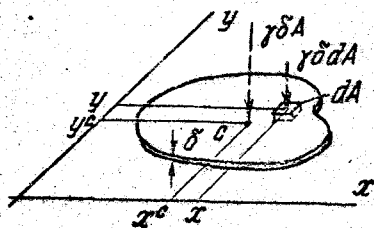


Рис. 2.1

пластинку постоянной толщины δ , расположенную в горизонтальной плоскости (рис. 2.1).

Вес элементарного параллелепипеда с площадью основания dA равен $\gamma\delta dA$ (γ — объемный вес); плечо силы веса относительно оси x — координата y . Сумму моментов сил тяжести та-

ких параллелепипедов относительно оси x запишем так: $\int_A \gamma\delta y dA$.

Согласно теореме Вариньона момент системы сил равен моменту равнодействующей этой системы. Вес пластинки равен $\gamma\delta A$, плечом является y^c ; момент относительно оси x равен $\gamma\delta A y^c$.

Приравнявая выражения момента, сокращая на γ и δ , получаем $A y^c = \int_A y dA$. Но интеграл в правой части есть S_x (см. (1.1)).

Итак,
$$S_x = Ay^c \quad (2.1)$$

Аналогично
$$S_y = Ax^c \quad (2.2)$$

Величина статического момента фигуры относительно оси равна произведению площади на расстояние от центра тяжести до этой оси. Формулы (2.1) и (2.2) позволяют определить статические моменты, если известны площадь и положение центра тяжести фигуры.

Из равенств (2.1) и (2.2) следует:

$$x^c = S_y/A, \quad (2.3)$$

$$y^c = S_x/A. \quad (2.4)$$

Равенства (2.3) и (2.4) дают возможность установить положение центра тяжести, если найдены статические моменты и площадь фигуры.

Если фигура имеет сложное очертание, но составлена из простых частей, для которых площади и положения центров тяжести известны, формулам (2.3) и (2.4) можно придать иной, более удобный вид.

Примем во внимание, что $A = \sum_{i=1}^n A_i$, $S_x = \sum_{i=1}^n S_x^{(i)}$, $S_y = \sum_{i=1}^n S_y^{(i)}$.

В свою очередь $S_x^{(i)} = A_i y^{(i)}$, $S_y^{(i)} = A_i x^{(i)}$. Отсюда следует:

$$x^c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x^{(i)}}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad y^c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y^{(i)}}{\sum_{i=1}^n A_i}. \quad (2.5)$$

Важную роль в сопротивлении материалов играют так называемые центральные оси - оси, проходящие через центр тяжести фигуры. Как следует из равенств (2.1) и (2.2), статический момент фигуры относительно центральной оси равен нулю.

2.2. Контрольные вопросы

1. Как найти статический момент относительно заданной оси, если площадь фигуры и положение центра тяжести известны?
2. Как определяются координаты центра тяжести составной фигуры?
3. Какие оси называются центральными?
4. Чему равен статический момент фигуры относительно центральной оси?

2.3. Примеры определения статических моментов и координат центров тяжести фигур

Пример 2.1. Определить статические моменты прямоугольника (рис. 2.2) относительно осей x и y .

Прямоугольник - фигура простая. Площадь и положение центра тяжести его известны. Поэтому воспользуемся формулами (2.1) и

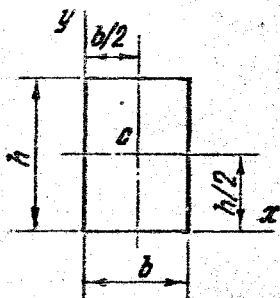


Рис. 2.2

$$(2.2): S_x = Ay^c = bh \cdot h/2 = bh^2/2;$$

$$S_y = Ax^c = bh \cdot b/2 = b^2h/2.$$

Пример 2.2. Определить статические моменты S_x и S_y и координаты центра тяжести трапеции, изображенной на рис. 2.3.

Разобьем трапецию на две части - прямоугольник и треугольник.

Для определения статических моментов воспользуемся формулами (1.6), которые в данном случае принимают вид: $S_x = S_x^{(1)} + S_x^{(2)}$, $S_y = S_y^{(1)} + S_y^{(2)}$, где $S^{(1)}$ - статические моменты прямоугольника, $S^{(2)}$ - треугольника.

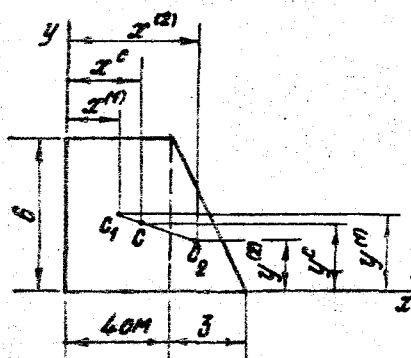


Рис. 2.3

Согласно формулам (2.1)

и (2.2) $S_x^{(1)} = A_1 y^{(1)}$, $S_x^{(2)} = A_2 y^{(2)}$. Но $y^{(1)} = 3$ см, $y^{(2)} = 2$ см; $A_1 = 24$ см², $A_2 = 9$ см². Таким образом,

$$S_x^{(1)} = 24 \cdot 3 = 72 \text{ см}^3, S_x^{(2)} = 9 \cdot 2 = 18 \text{ см}^3; S_x = 90 \text{ см}^3.$$

Аналогично $x^{(1)} = 2$ см, $x^{(2)} = 5$ см; $S_y^{(1)} = A_1 x^{(1)} = 24 \cdot 2 = 48 \text{ см}^3$, $S_y^{(2)} = A_2 x^{(2)} = 9 \cdot 5 = 45 \text{ см}^3$, $S_y = 93 \text{ см}^3$.

Координаты центра тяжести трапеции найдем по формулам (2.3) и (2.4), учитывая, что $A = A_1 + A_2 = 24 + 9 = 33 \text{ см}^2$; $x^c = S_y/A = 93/33 = 2,82$ см, $y^c = S_x/A = 90/33 = 2,73$ см. Центр тяжести на рис. 2.3 отмечен буквой C . Центр тяжести трапеции лежит на прямой C_1C_2 , соединяющей центры тяжести прямоугольника и треугольника.

Пример 2.3. Определить положение центра тяжести полукруга радиусом r (рис. 2.4).

В качестве осей координат примем x и y . Центр тяжести полукруга лежит на оси симметрии — $x^c = 0$. Необходимо найти y^c .

Выделим элементарную полоску, параллельную оси x . Поскольку граница полукруга достаточно просто описывается в полярных координатах, воспользуемся ими. Зададим положение элементарной полоски полярным углом α . Тогда $y = r \sin \alpha$; $dy = r \cos \alpha d\alpha$;

$$b = 2r \cos \alpha; dA = b dy = 2r^2 \cos^2 \alpha d\alpha.$$

По формуле (I.1)

$$S_x = \int_A y dA = \int_0^{\pi/2} r \sin \alpha \cdot 2r^2 \cos^2 \alpha d\alpha = 2r^3 \int_0^{\pi/2} \sin \alpha \cos^2 \alpha d\alpha.$$

$$= -d(\cos \alpha). \text{ Учитывая это, находим } S_x = -(2/3)r^3 \cos^3 \alpha \Big|_0^{\pi/2} = 2r^3/3.$$

Площадь полукруга $A = \pi r^2/2$. Согласно формуле (2.4) координата $y^c = S_x/A = (2/3)r^3 / (\pi r^2/2) = 4r/3\pi = 0,424r$.

Пример 2.4. Определить положение центра тяжести фигуры, составленной из прокатного уголка 100x8 и швеллера № 24 (рис. 2.5).

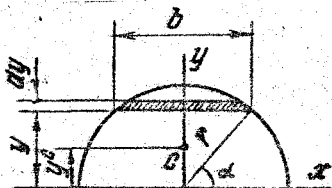


Рис. 2.4

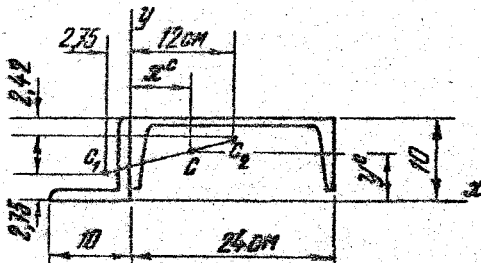


Рис. 2.5

Геометрические характеристики прокатных профилей, в том числе площади и размеры, определяющие положение центров тяжести, приведены в справочных таблицах (см. приложение). Приняв в качестве вспомогательных осей x и y , по табл. 3 находим для уголка $A_1 = 15,6 \text{ см}^2$, $x^{(1)} = -2,75 \text{ см}$, $y^{(1)} = 2,75 \text{ см}$. Аналогично с помощью табл. 2 для швеллера $x^{(2)} = 12 \text{ см}$, $y^{(2)} = 10 - 2,42 = 7,58 \text{ см}$, $A_2 = 30,6 \text{ см}^2$.

По формулам (2.5) находим:

$$x^c = \frac{A_1 x^{(1)} + A_2 x^{(2)}}{A_1 + A_2} = \frac{15,6 \cdot (-2,75) + 30,6 \cdot 12}{15,6 + 30,6} = 7,02 \text{ см,}$$

$$y^c = \frac{A_1 y^{(1)} + A_2 y^{(2)}}{A_1 + A_2} = \frac{15,6 \cdot 2,75 + 30,6 \cdot 7,58}{15,6 + 30,6} = 5,95 \text{ см.}$$

Центр тяжести фигуры на рис. 2.5 отмечен буквой *c*.

2.4. Задачи для самостоятельного решения

Определить положения центров тяжести фигур, изображенных на рис. 2.6–2.8. Задача 2.1 – рис. 2.6. Задача 2.2 – рис. 2.7. Задача 2.3 – рис. 2.8.

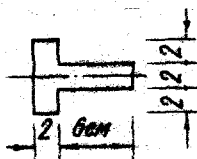


Рис. 2.6

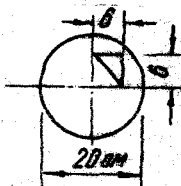


Рис. 2.7

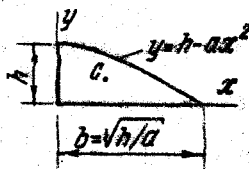


Рис. 2.8

3. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРОСТЕЙШИХ ФИГУР

В этой главе проиллюстрируем различные приемы определения моментов инерции непосредственным интегрированием соответствующих выражений на равенств (1.2)–(1.4). Решая задачи в общем виде, получим результаты, которыми в дальнейшем будем пользоваться как формулами.

3.1. Прямоугольник

Найдем осевые моменты инерции прямоугольника (рис. 3.1) относительно осей *x* и *y*. Выделим в прямоугольнике элементарную полоску на расстоянии *y* от оси *x*. Площадь полоски $dA = bdy$.

По формуле (1.2) $J_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 bdy = bh^3/12$. Итак,

$$J_x = bh^3/12. \quad (3.1)$$

Аналогично

$$J_y = hb^3/12. \quad (3.2)$$

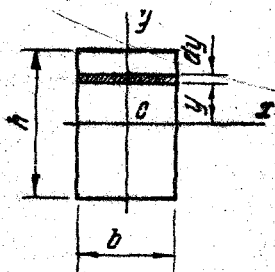


Рис. 3.1

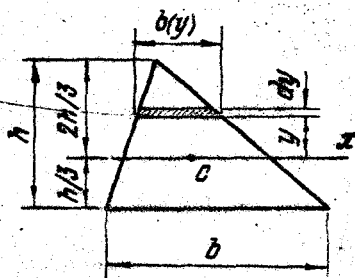


Рис. 3.2

3.2. Треугольники

3.2.1. Определим осевой момент инерции треугольника произвольного очертания (рис. 3.2) относительно центральной оси x , параллельной основанию b .

Выделив элементарную полоску, параллельную оси x , шириной $b(y)$, имеем $dA = b(y)dy$. Из подобия треугольников (заданного и расположенного выше выбранной полоски) следует $b(y)/b = ((2h/3) - y)/h$, т.е. $b(y) = b((2h/3) - y)/h$. Теперь $dA = b((2h/3) - y)dy/h$. Подставляя в соответствующую формулу (1.2) выражение dA , получаем $J_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/3}^{2h/3} y^2 \frac{b}{h} ((2h/3) - y) dy$. После интегрирования приходим к результату

$$J_x = bh^3/36. \quad (3.3)$$

Отметим, что при выводе формулы (3.3) не потребовался размер, определяющий положение вершины треугольника по ширине. Это значит, что разные треугольники с равными основаниями и равными высотами имеют одинаковые моменты инерции.

3.2.2. Найдем момент инерции равнобедренного треугольника относительно оси симметрии y (рис. 3.3).

Выделим элементарную полоску, параллельную оси y , высотой $h(x)$. Из подобия треугольников следует $h(x)/h = ((b/2) - x)/(b/2)$. Теперь $h(x) = 2h((b/2) - x)/b$, $dA = h(x)dx = 2h((b/2) - x)dx/b$.

Момент инерции $J_y = \int_A x^2 dA = 2 \int_0^{b/2} x^2 2h((b/2) - x) dx / b$.

Интегрируя, находим $J_y = hb^3/48. \quad (3.4)$

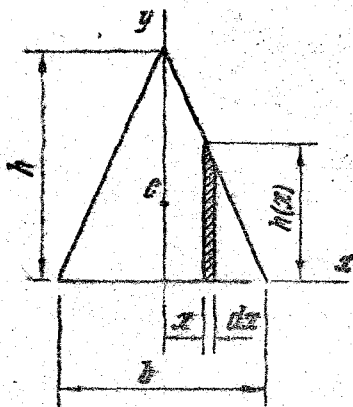


Рис. 3.3

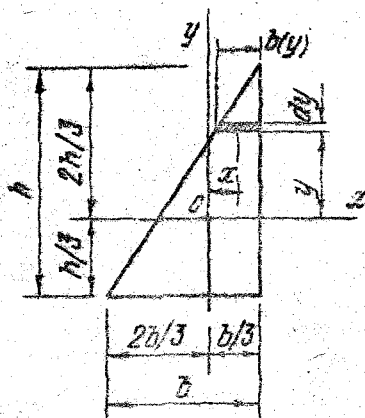


Рис. 3.4

3.3. Найдем центральный момент инерции прямоугольного треугольника относительно центральных осей, параллельных катетам (рис. 3.4).

Как следует из рисунка, $b(y) = b \left(\frac{2h/3 - y}{2h/3} \right)$ (3) -
 $-b(y)/2 = (b/3) - b((2h/3) - y)/2$ (4)
 $dA = b(y) dy = b((2h/3) - y) dy / h$. Тогда (1.3)

$$J_{xy} = \int_A xy dA = \int_{-h/3}^{2h/3} \left((b/3) - b((2h/3) - y)/2 \right) y dy / h.$$

Выполнив интегрирование, находим

$$J_{xy} = b^2 h^2 / 72. \quad (3.5)$$

Если в данном примере y из осей вынесем в обратную сторону, J_{xy} станет отрицательным. Изменим x и y в случае поворота треугольника на 180° вокруг любой точки $-x$ или $-y$.

3.3. Круг и кольцо

3.3.1. Найдем вначале осевые моменты инерции круга J_x и J_y (рис. 3.5).

Выделив элементарную полоску, видим, что $dA = 2b(y) dy$. Но $b(y) = 0,5D \cos \alpha$. Кроме того, $y = 0,5D \sin \alpha$, $dy = 0,5D \cos \alpha d\alpha$.

$$J_x = \int_A y^2 dA = 0,125 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D^2 \sin^2 \alpha D^2 \cos^2 \alpha d\alpha. \text{ Выполнив необходимые преобразования и интегрирование, получаем } J_x = \pi D^4 / 64. \text{ Ясно, что } J_x = J_y.$$

$$J_x = J_y = \pi D^4 / 64. \quad (3.6)$$

Найдем теперь полярный момент инерции круга относительно его центра. Согласно равенству (1.5) $J_p = J_x + J_y = 2J_x$. Итак,

$$J_p = \pi D^4 / 32. \quad (3.7)$$

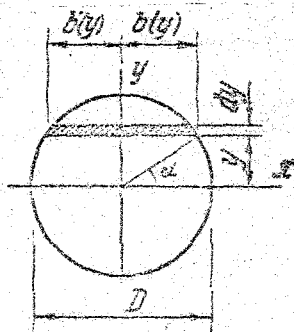


Рис. 3.5

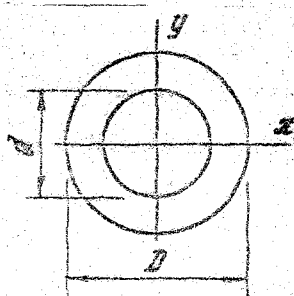


Рис. 3.6

3.3.2. Найдем осевой момент инерции кольца (рис. 3.6) относительно центральной оси. Он может быть получен как разность моментов инерции большого и малого кругов: $J_x = J_x^{(1)} - J_x^{(2)} = \pi D^4 / 64 - \pi d^4 / 64 = \pi D^4 (1 - (d/D)^4) / 64$. Обозначив $d/D = c$, получаем

$$J_x = \pi D^4 (1 - c^4) / 64. \quad (3.8)$$

Ясно, что осевой момент инерции кольца для любой центральной оси принимает значение (3.8).

Полярный момент инерции кольца в два раза больше осевого:

$$J_p = \pi D^4 (1 - c^4) / 32.$$

3.4. Пояснения к таблицам геометрических характеристик прокатных профилей

Для изготовления строительных конструкций широко применяются прокатные профили. По своему очертанию они настолько сложны, что вычисление геометрических характеристик для них приведенными выше способами становится невозможным. Поэтому для сечений прокатных профилей составлены специальные таблицы. Наиболее распространенные из них приведены в приложениях^{2*}. Кроме геометрических

*Таблицы приведены с сокращениями. В них не включены величины, которые в задачах сопротивления материалов используются редко или не используются вообще.

ких характеристик, рассматриваемых в настоящем пособии, в таблицах содержатся и другие величины, применяемые в курсе сопротивления материалов.

В таблицах даны необходимые размеры и площади сечений, моменты инерции относительно различных осей и расстояния, определяющие положения центров тяжести сечений. Указаны обозначения, размерности, приведены поясняющие рисунки.

Для двутавров (табл. 1) и швеллеров (табл. 2) кроме необходимых размеров и осевых моментов инерции в таблицы включены такие величины, как W_x , i_x , S_x , W_y и i_y . Они будут использованы в последующих разделах курса. Там же будут даны необходимые пояснения к ним.

Для равнобоких уголков (табл. 3) в силу симметрии сечения моменты инерции относительно вертикальных осей (центральной, а также проходящей по левому краю сечения) не указаны. Они равны соответственно J_x и $J_{x'}$. По этой же причине в таблице дана лишь одна координата центра тяжести.

Наличие таблиц, содержащих необходимые геометрические характеристики, позволяет рассматривать сечения прокатных профилей как "простейшие" фигуры, для которых требуются в расчетах исходные данные известны.

В заключение отметим, что со временем нормативы на прокатные профили пересматриваются, составляются новые таблицы. Кроме того, имеются профили, не охваченные приведенными таблицами. Поэтому возможно несоответствие табличных значений, включенных в настоящее пособие, с содержащимися в других источниках.

4. ГЛАВНЫЕ ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СИММЕТРИЧНЫХ ФИГУР

4.1. Понятие о главных осях. Главные центральные оси.

Главные моменты инерции

Главными осями называются взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю.

Главными центральными осями называются главные оси, проходящие через центр тяжести фигуры.

Ясно, что относительно главных центральных осей и центробежный, и статические моменты фигуры равны нулю.

Остановимся вначале на частном случае — симметричных фигурах (рис. 4.1). В них для любой элементарной площадки (например, правой) найдется симметричная в другой половине фигуры. Сумма произведений $xydA$ для правой площадки и $-xydA$ для левой равна нулю. Отсюда следует, что и для всей фигуры $J_{xy} = \int_A xydA = 0$. Таким образом, ось симметрии и любая перпендикулярная ей ось являются главными.

Главными моментами инерции называются осевые моменты инерции относительно главных центральных осей.^Ж

Использование в сопротивлении материалов главных центральных осей значительно упрощает математические выкладки, доказательства и расчетные формулы. Поэтому важно научиться находить положение главных центральных осей и величины главных моментов инерции.

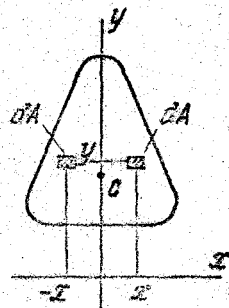


Рис. 4.1

4.2. Изменение моментов инерции при параллельном переходе от центральных осей к нецентральной

Примеры, приведенные в предыдущей главе, продемонстрировали определение моментов инерции методом непосредственного интегрирования. Этот метод может быть использован для вычисления геометрических характеристик при любом взаимном расположении фигуры и координатной системы. Однако такой путь связан с громоздкими выкладками и не всегда удобен для практического пользования. В таких условиях целесообразно установить, каким образом изменяются моменты инерции при переносе координатных осей. Это позволяет, вычислив моменты инерции в одной координатной системе, найти их в любой другой, минуя интегрирование.

Переход от одной координатной системы к другой можно осуществить в два этапа — параллельный перенос осей с последующим их

^ЖТочнее, главные центральные моменты инерции. Но такой термин многословен. Для краткости обычно пользуются сокращенным вариантом, приведенным выше.

поворотом (рис. 4.2). Рассмотрим вначале изменение моментов инерции при параллельном переносе осей.

Пусть нам известны площадь фигуры A , осяз J_{ξ} и J_{η} и центробежный $J_{\xi\eta}$ моменты инерции относительно центральных осей ξ и η (рис. 4.3). Заданы координатные оси u и v , параллельные центральным. Взаимное положение координатных систем определяется координатами u^c и v^c . Требуется найти осяз J_u и J_v и центробежный J_{uv} моменты инерции фигуры относительно нецентральных осей.

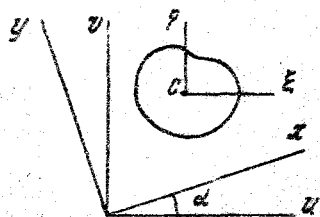


Рис. 4.2

Как видно из рис. 4.3, $v = \eta + v^c$. Учитывая это, находим

$$J_u = \int_A v^2 dA = \int_A (\eta + v^c)^2 dA = \int_A \eta^2 dA + 2v^c \int_A \eta dA + (v^c)^2 \int_A dA.$$

Интеграл в первом слагаемом есть J_{ξ} , во втором — S_{ξ} (он равен нулю, так как ось ξ центральная), в третьем слагаемом — A . Итак,

$$J_u = J_{\xi} + (v^c)^2 A. \quad (4.1)$$

Точно так же найдем

$$J_v = J_{\eta} + (u^c)^2 A. \quad (4.2)$$

Осяз момент инерции относительно оси, параллельной центральной оси, равен первому моменту инерции относительно центральной оси плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями.

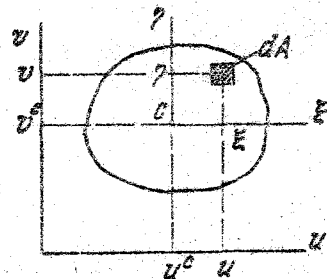


Рис. 4.3

Из формул (4.1), (4.2) следует, что в семействе параллельных осей центральная ось сообщает осязному моменту инерции минимальное значение.

Найдем теперь центробежный момент инерции

$$J_{uv} = \int_A uv dA = \int_A (\xi + u^c)(\eta + v^c) dA = \int_A \xi\eta dA + u^c \int_A \eta dA + v^c \int_A \xi dA + u^c v^c \int_A dA.$$

Интегралы во втором и третьем слагаемых равны нулю, так как являются статическими моментами относительно центральных

осей. Учитывая, что $\int_A \xi^2 dA = J_{\xi\xi}$, а $\int dA = A$, получаем

$$J_{uv} = J_{\xi\xi} + u^c v^c A. \quad (4.3)$$

Центробежный момент инерции относительно пары осей, параллельной центральной паре, равен центробежному моменту инерции относительно центральных осей плюс произведение площади фигуры и координат центра тяжести в осьях осей. При определении центробежного момента инерции по формуле (4.3) следует учитывать знаки координат u^c и v^c .

4.3. Контрольные вопросы

1. Какие оси называются главными?
2. Какие оси являются главными для фигуры, имеющей ось симметрии?
3. Какие оси называются главными центральными? Какими свойствами они обладают?
4. Как определить положение главных центральных осей для фигуры, имеющей ось симметрии?
5. Какие оси являются главными центральными у фигуры, имеющей две оси симметрии?
6. Чему равны главные моменты инерции прямоугольника?
7. Чему равны главные моменты инерции равнобедренного треугольника?
8. Чему равны главные моменты инерции круга и кольца?
9. Чему равен осевой момент инерции фигуры относительно оси, параллельной центральной оси?
10. Относительно какой из параллельных осей осевой момент инерции будет минимальным?
11. Чему равен центробежный момент инерции фигуры относительно осей, параллельных центральным осям?

4.4. Примеры определения главных моментов инерции симметричных фигур

Пример 4.1. Определить положение главных центральных осей и вычислить главные моменты инерции фигуры, изображенной на рис. 4.4.

Фигура имеет две оси симметрии. Они и являются главными центральными осями. Эти же оси являются главными центральными

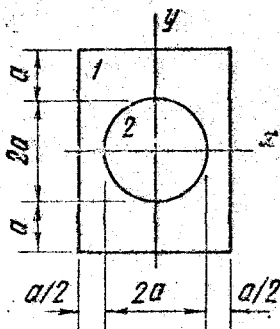


Рис. 4.4

осями прямоугольника и круга, составляющих данную фигуру. Поэтому для вычисления моментов инерции этих фигур относительно осей x и y можно воспользоваться формулами (3.1), (3.2) и (3.6), в которых следует принять $b = 3a$, $h = 4a$; $D = 2a$. Итак,

$$J_x^{(1)} = 3a(4a)^3/12 = 16a^4;$$

$$J_y^{(1)} = 4a(3a)^3/12 = 9a^4;$$

$$J_x^{(2)} = J_y^{(2)} = \pi(2a)^4/64 = 0,8a^4.$$

Главные моменты инерции всей фигуры найдем как разность соответствующих значений для прямоугольника и для круга, т.е.

$$J_x = J_x^{(1)} - J_x^{(2)} = 16a^4 - 0,8a^4 = 15,2a^4;$$

$$J_y = J_y^{(1)} - J_y^{(2)} = 9a^4 - 0,8a^4 = 8,2a^4.$$

Пример 4.2. Определить положение главных центральных осей и вычислить главные моменты инерции фигуры, изображенной на

рис. 4.5.

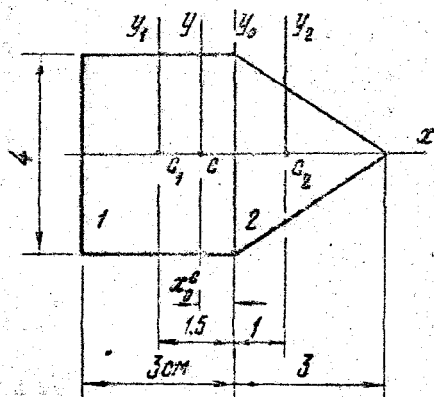


Рис. 4.5

Найдем вначале положение центра тяжести фигуры в системе координат x, y . Предварительно находим:

$$x_0^{(1)} = -1,5 \text{ см}, A_1 = 12 \text{ см}^2;$$

$$x_0^{(2)} = 1 \text{ см}, A_2 = 6 \text{ см}^2.$$

Теперь

$$x_0^c = \frac{A_1 x_0^{(1)} + A_2 x_0^{(2)}}{A_1 + A_2} = \frac{12(-1,5) + 6 \cdot 1}{12 + 6} = -0,67 \text{ см}.$$

Главные центральные оси фигуры - ось симметрии x и центральная ось y .

Введем дополнительно оси y_1 и y_2 , являющиеся главными центральными осями соответственно для прямоугольника и треугольника. Вычислим моменты инерции каждой из этих фигур относительно собственных главных центральных осей, используя формулы (3.1)–(3.4):

$$J_{x_1}^{(1)} = 3 \cdot 4^3 / 12 = 16 \text{ см}^4; \quad J_{y_1}^{(1)} = 4 \cdot 3^3 / 12 = 9 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_2}^{(2)} = 3 \cdot 4^3 / 48 = 4 \text{ см}^4; \quad J_{y_2}^{(2)} = 4 \cdot 3^3 / 36 = 3 \text{ см}^4.$$

Определим моменты инерции относительно оси y каждой из составленных фигур, используя формулу параллельного переноса (4.2):

$$J_y^{(1)} = J_{y_1}^{(1)} + (x_o^{(1)} - x_o^c)^2 A_1 = 9 + (-1,5 + 0,67)^2 \cdot 12 = 17,3 \text{ см}^4;$$

$$J_y^{(2)} = J_{y_2}^{(2)} + (x_o^{(2)} - x_o^c)^2 A_2 = 3 + (1 + 0,67)^2 \cdot 6 = 19,7 \text{ см}^4.$$

Главные моменты инерции всей фигуры J_x и J_y найдем как суммы соответствующих моментов инерции прямоугольника и треугольника: $J_x = J_{x_1}^{(1)} + J_{x_2}^{(2)} = 16 + 4 = 20 \text{ см}^4$; $J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)} = 17,3 + 19,7 = 37 \text{ см}^4$.

Пример 4.3. Определить положение главных центральных осей и вычислить главные моменты инерции симметричной фигуры, составленной из сечений прокатного двутавра № 12 и швеллера № 16а и изображенной на рис. 4.6.

По табл. 1 и 2 сортамента (см. приложение) находим площадь двутавра $A_1 = 14,7 \text{ см}^2$ и швеллера $A_2 = 19,5 \text{ см}^2$. Оттуда же берем размеры, определяющие положения центров тяжести этих фигур; размеры указаны на рисунке.

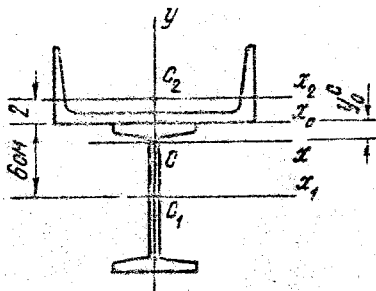


Рис. 4.6

Введем вспомогательную ось x_o . В этом случае $y_o^{(1)} = -6 \text{ см}$, $y_o^{(2)} = 2 \text{ см}$. Координата общего центра тяжести

$$y_o^c = \frac{A_1 y_o^{(1)} + A_2 y_o^{(2)}}{A_1 + A_2} = \frac{14,7(-6) + 19,5 \cdot 2}{14,7 + 19,5} = -1,44 \text{ см}.$$

Главные центральные оси фигуры – ось симметрии y и центральная ось x .

По табл. I сортамента находим моменты инерции двутавра $J_{x_1}^{(1)} = 350 \text{ см}^4$, $J_y^{(1)} = 27,9 \text{ см}^4$; по табл. 2 для швеллера $J_{x_2}^{(2)} = 78,8 \text{ см}^4$, $J_y^{(2)} = 823 \text{ см}^4$.

Вычислим моменты инерции обеих фигур относительно оси x , используя формулу параллельного переноса (4.1):

$$J_x^{(1)} = J_{x_1}^{(1)} + (y_0^{(1)} - y_0^c)^2 A_1 = 350 + (-6 + 1,44)^2 \cdot 14,7 = 656 \text{ см}^4;$$

$$J_x^{(2)} = J_{x_2}^{(2)} + (y_0^{(2)} - y_0^c)^2 A_2 = 78,8 + (2 + 1,44)^2 \cdot 19,5 = 310 \text{ см}^4.$$

Главные моменты инерции:

$$J_x = J_x^{(1)} + J_x^{(2)} = 656 + 310 = 966 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)} = 27,9 + 823 = 851 \text{ см}^4.$$

Пример 4.4. Определить положение главных центральных осей и вычислить главные моменты инерции фигуры, составленной из полуокруга и равнобедренного треугольника (рис. 4.7).

Определим положение центра тяжести фигуры в системе осей x_0, y : $y_0^{(1)} = 0,424 \cdot 10 = 4,24 \text{ см}$ (см. пример 2.3), $A_1 = \pi \cdot 10^2 / 2 = 157 \text{ см}^2$; $y_0^{(2)} = -10 \text{ см}$, $A_2 = 20 \cdot 30 / 2 = 300 \text{ см}^2$.

$$y_0^c = \frac{A_1 y_0^{(1)} + A_2 y_0^{(2)}}{A_1 + A_2} = \frac{157 \cdot 4,24 + 300 \cdot (-10)}{157 + 300} = -5,11 \text{ см}.$$

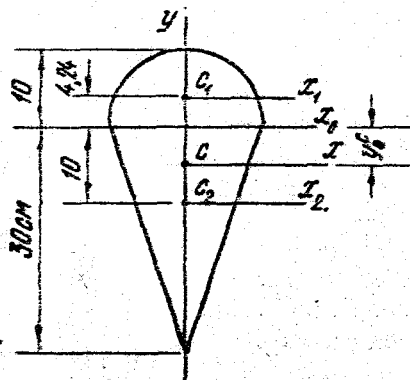


Рис. 4.7

Главные центральные оси фигуры x и y показаны на рис. 4.7.

Введем главные центральные оси полуокруга - x_1 и треугольника - x_2 . Вычислим моменты инерции этих фигур относительно их главных центральных осей.

Моменты инерции полуокруга относительно осей x_0 и y в два раза меньше момента инерции соответствующего круга, т.е.

$$J_{x_0}^{(1)} = J_y^{(1)} = \pi \cdot 20^4 / (2 \cdot 64) = 3927 \text{ см}^4 \text{ (см. формулу (3.6)).}$$

Чтобы вычислить момент инерции полуокруга относительно оси x_1 , воспользуемся формулой (4.1), но сделаем обратный переход - от нецентральной оси к центральной -

$$J_{x_1}^{(1)} = J_{x_0}^{(1)} - (y_0^{(1)})^2 A_1 = 3927 - 4,24^2 \cdot 157 = 1105 \text{ см}^4$$

Моменты инерции треугольника относительно его главных центральных осей вычислим по формулам (3.3) и (3.4).

$$J_{x_2}^{(2)} = 20 \cdot 30^3 / 36 = 15000 \text{ см}^4, \quad J_{y_2}^{(2)} = 30 \cdot 20^3 / 48 = 5000 \text{ см}^4.$$

Вычислим моменты инерции полукруга и треугольника относительно главной центральной оси фигуры x . Для этого еще раз воспользуемся формулой (4.1):

$$J_x^{(1)} = J_{x_1}^{(1)} + (y_0^{(1)} - y_0^c)^2 A_1 = 1105 + (4,24 + 5,11)^2 \cdot 157 = 14830 \text{ см}^4;$$

$$J_x^{(2)} = J_{x_2}^{(2)} + (y_0^{(2)} - y_0^c)^2 A_2 = 15000 + (-10 + 5,11)^2 \cdot 300 = 22170 \text{ см}^4.$$

Главные моменты инерции всей фигуры равны сумме односторонних моментов инерции полукруга и треугольника:

$$J_x = J_x^{(1)} + J_x^{(2)} = 14830 + 22170 = 37000 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)} = 3927 + 5000 = 8927 \text{ см}^4.$$

4.5. Задачи для самостоятельного решения

Найти положения главных центральных осей и вычислить величины главных моментов инерции фигур, изображенных на рис. 4.8 - 4.10. Задача 4.1 - рис. 4.8. Задача 4.2 - рис. 4.9. Задача 4.3 - рис. 4.10.

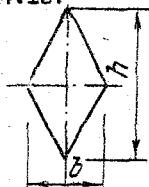


Рис. 4.8

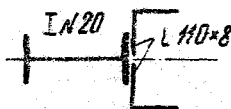


Рис. 4.9

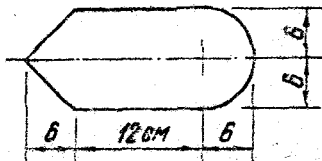


Рис. 4.10

5. ГЛАВНЫЕ ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ФИГУР

5.1. Изменение моментов инерции при повороте координатных осей

Рассмотрим, как изменяются моменты инерции при повороте осей координат. Пусть известны осевые J_u и J_v и центробежный

J_{uv} моменты инерции относительно исходных осей координат (рис. 5.1). Найдем моменты инерции относительно осей x и y , повернутых к исходным под углом α .

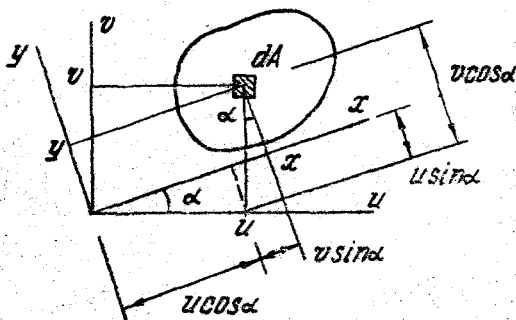


Рис. 5.1

Из вспомогательного построения на рис. 5.1 следует:

$$x = u \cos \alpha + v \sin \alpha, \quad y = v \cos \alpha - u \sin \alpha.$$

Теперь $J_x = \int_A y^2 dA = \int_A (v \cos \alpha - u \sin \alpha)^2 dA = \cos^2 \alpha \int_A v^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A u^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A uv dA$. Интеграл в первом слагаемом есть J_u , во втором — J_v , в третьем — J_{uv} . Таким образом,

$$J_x = J_u \cos^2 \alpha + J_v \sin^2 \alpha - J_{uv} \sin 2\alpha. \quad (5.1)$$

$$\text{Аналогично } J_y = J_u \sin^2 \alpha + J_v \cos^2 \alpha + J_{uv} \sin 2\alpha. \quad (5.2)$$

Для центробежного момента инерции $J_{xy} = \int_A xy dA = \int_A (u \cos \alpha + v \sin \alpha)(v \cos \alpha - u \sin \alpha) dA = \sin \alpha \cos \alpha (\int_A v^2 dA - \int_A u^2 dA) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_A uv dA$. После преобразований:

$$J_{xy} = 0,5 (J_u - J_v) \sin 2\alpha + J_{uv} \cos 2\alpha. \quad (5.3)$$

При использовании формул (5.1)–(5.3) нужно иметь в виду, что положительный угол α откладывается против хода часовой стрелки.

Итак, формулы (3.1)–(3.8) и табл. I-3 позволяют найти моменты инерции относительно центральных осей; равенства (4.1)–

(4.3) устанавливают, как изменяются моменты инерции при параллельном переносе осей, а (5.1)-(5.3) - при повороте осей координат. В совокупности эти выражения дают возможность вычислить моменты инерции фигуры относительно любых осей.

5.2. Главные ос. Главные центральные оси

Согласно определению, данному в главе 4, центробежный момент инерции фигуры относительно главных осей равен нулю. Установим, под каким углом по отношению к осям u и v следует расположить оси x и y , чтобы они стали главными. Воспользуемся формулой (5.3), обозначив искомым углом α_0 .

$$J_{xy} = 0,5(J_u - J_v) \sin 2\alpha_0 + J_{uv} \cos 2\alpha_0 = 0.$$

Отсюда
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{uv}}{J_v - J_u}. \quad (5.4)$$

Поскольку тангенс - периодическая функция с периодом 180° , уравнению (5.4) удовлетворяют значения угла α_0 , отличающиеся на величину, кратную 90° . Поэтому формула (5.4) определяет положение двух взаимно перпендикулярных главных осей. Чтобы провести главные оси, достаточно найти меньший по абсолютному значению угол α_0 и отложить его против хода часовой стрелки, если угол положительный, и по ходу - если отрицательный.

В том случае, когда оси u и v - центральные, формула (5.4) определяет положение главных центральных осей.

Главных (нецентральных) осей для любой фигуры можно найти бесчисленное множество, главных же центральных - в общем случае только одну пару. Таким образом, главные центральные оси - координатная система, однозначно определяемая формой и размерами фигуры.

5.3. Главные моменты инерции.

Экстремальные свойства главных моментов инерции

Величины главных моментов инерции могут быть вычислены по формулам (5.1) и (5.2) после определения угла α_0 из равенства (5.4). Таким образом, указанных формул достаточно для определения главных моментов инерции.

Тем не менее исследуем равенства (5.1) и (5.2) с целью иллюстрации еще одного свойства главных центральных осей. Просуммируем выражения. Получим $J_x + J_y = J_u + J_v$. Сумма осевых моментов инерции при повороте координатной системы остается постоянной*. Это значит, что, изменяясь при повороте осей, моменты инерции одновременно достигают один максимума, другой минимума.

Исследуем теперь момент инерции J_x на экстремум. Для этого продифференцируем его по α и приравняем производную нулю.

$$dJ_x/d\alpha = -2J_u \cos\alpha \sin\alpha + 2J_v \sin\alpha \cos\alpha - 2J_{uv} \cos 2\alpha = 0.$$

Отсюда находим $\operatorname{tg} 2\alpha = 2J_{uv}/(J_v - J_u)$. Полученный результат совпадает с формулой (5.4). Из совпадения следует. Из семейства осей, проходящих через общее начало координат одна главная ось составляет осевому моменту инерции максимум, другая - минимум.

Для упрощения формул главных моментов инерции с помощью равенства (5.4) исключим α_0 из выражений (5.1) и (5.2). По формулам тригонометрии и (5.4) последовательно находим:

$$\cos 2\alpha_0 = \pm 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0} = \pm (J_u - J_v)/\sqrt{(J_u - J_v)^2 + 4J_{uv}^2};$$

$$\sin 2\alpha_0 = \operatorname{tg} 2\alpha_0 \cos 2\alpha_0 = \mp 2J_{uv}/\sqrt{(J_u - J_v)^2 + 4J_{uv}^2};$$

$$\cos^2 \alpha_0 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha_0) = 0,5(1 \pm (J_u - J_v)/\sqrt{(J_u - J_v)^2 + 4J_{uv}^2})$$

$$\sin^2 \alpha_0 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha_0) = 0,5(1 \mp (J_u - J_v)/\sqrt{(J_u - J_v)^2 + 4J_{uv}^2}).$$

Подставив эти выражения в равенство (5.1), после преобразований

$$\text{получаем } J_{\max/\min} = \frac{J_u + J_v}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(J_u - J_v)^2 + 4J_{uv}^2}. \quad (5.5)$$

Знак "+" перед радикалом относится к J_{\max} , а "-" - к J_{\min} .

Формула (5.5) не устанавливает, к какой оси относится J_{\max} , к какой J_{\min} . Можно показать, что ось максимума составляет меньший угол с той из осей u или v , относительно которой осевой момент инерции имеет большее значение.

5.4. Контрольные вопросы

1. Как изменяются осевые и центробежный моменты инерции при повороте осей координат?

* Это свойство следует и из равенства (1.5).

2. Для каких осей координат осевые моменты инерции принимают экстремальные значения? Чему равен в этом случае центробежный момент инерции?

3. Как определяется, к какой из главных осей относится J_{max} и какой J_{min} ?

4. Какие проверки могут быть выполнены при определении положения главных центральных осей и вычислении главных моментов инерции?

5.5. Примеры определения положения главных центральных осей и величины главных моментов инерции

Пример 5.1. Определить положение главных центральных осей и вычислить главные моменты инерции прямоугольного треугольника, показанного на рис. 5.2.

В качестве исходных центральных осей примем оси u и v , параллельные катетам. Для этих осей по формуле (3.3)

$$J_u = 3 \cdot 4^3 / 36 = 5,33 \text{ см}^4,$$

$$J_v = 4 \cdot 3^3 / 36 = 3,00 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент вычислим по формуле (3.5). При этом учтем, что по сравнению с треугольником, изображенным на рис. 3.4, для которого была выведена формула (3.5), данный в этом примере треугольник повернут на 100° вокруг оси v . Поэтому изменим знак центробежного момента:

$$J_{uv} = -3^2 \cdot 4^2 / 72 = -2,00 \text{ см}^4.$$

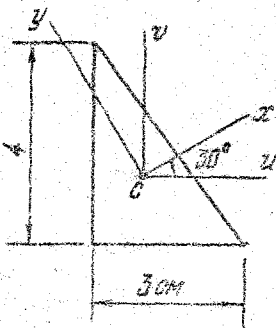


Рис. 5.2

Положение главных центральных осей найдем по формуле (5.4)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2J_{uv} / (J_v - J_u) = 2(-2,00) / (3,00 - 5,33) = 1,72.$$

$$2\alpha_0 = 60^\circ, \quad \alpha_0 = 30^\circ.$$

Главные моменты инерции (5.5)

$$J_{\frac{max}{min}} = 0,5(J_u + J_v) \pm \sqrt{(J_u - J_v)^2 + 4J_{uv}^2} = 0,5(5,33 + 3,00) \pm \sqrt{(5,33 - 3,00)^2 + 4 \cdot 2,00^2} = 4,17 \pm 2,31. \quad J_{max} = 6,48 \text{ см}^4, \quad J_{min} = 1,86 \text{ см}^4.$$

Учитывая, что $J_u > J_v$, $J_{max} = J_x = 6,48 \text{ см}^4$, $J_y = 1,86 \text{ см}^4$.

Пример 5.2. Найти положение главных центральных осей и величины главных моментов инерции фигуры, изображенной на рис.5.3.

Разобьем фигуру на два прямоугольника, как показано на рисунке. После этого $u_0^{(1)} = 1,5$ см, $v_0^{(1)} = 11,5$ см, $A_1 = 39$ см²; $u_0^{(2)} = 5$ см, $v_0^{(2)} = 2,5$ см, $A_2 = 50$ см².

Координаты общего центра тяжести

$$u_0^c = \frac{A_1 u_0^{(1)} + A_2 u_0^{(2)}}{A_1 + A_2} =$$

$$= \frac{39 \cdot 1,5 + 50 \cdot 5}{39 + 50} = 3,47 \text{ см};$$

$$v_0^c = \frac{A_1 v_0^{(1)} + A_2 v_0^{(2)}}{A_1 + A_2} =$$

$$= \frac{39 \cdot 11,5 + 50 \cdot 2,5}{39 + 50} = 6,44 \text{ см}.$$

Найдем моменты инерции составляющих прямоугольников относительно их главных центральных осей:

$$J_{u_1}^{(1)} = 3 \cdot 13^3 / 12 = 549,2 \text{ см}^4,$$

$$J_{v_1}^{(1)} = 13 \cdot 3^3 / 12 = 29,2 \text{ см}^4.$$

$J_{u_2}^{(2)} = 10 \cdot 5^3 / 12 = 104,2 \text{ см}^4$, $J_{v_2}^{(2)} = 5 \cdot 10^3 / 12 = 416,7 \text{ см}^4$. Центробежные моменты инерции прямоугольников относительно их главных центральных осей равны нулю.

Определим моменты инерции всей фигуры относительно обеих центральных осей J_u и J_v .

$$J_u = J_{u_1}^{(1)} + J_{u_2}^{(2)} + (v_0^{(1)} - v_0^c)^2 A_1 + (v_0^{(2)} - v_0^c)^2 A_2 = 549,2 + 104,2 + (11,5 - 6,44)^2 \cdot 39 + (2,5 - 6,44)^2 \cdot 50 = 2428 \text{ см}^4.$$

$$J_v = J_{v_1}^{(1)} + J_{v_2}^{(2)} + (u_0^{(1)} - u_0^c)^2 A_1 + (u_0^{(2)} - u_0^c)^2 A_2 = 29,2 + 416,7 + (1,5 - 3,47)^2 \cdot 39 + (5 - 3,47)^2 \cdot 50 = 714,4 \text{ см}^4.$$

$$J_{uv} = J_{u_1 v_1}^{(1)} + J_{u_2 v_2}^{(2)} + (v_0^{(1)} - v_0^c)(u_0^{(1)} - u_0^c) A_1 + (v_0^{(2)} - v_0^c)(u_0^{(2)} - u_0^c) A_2 = 0 + (11,5 - 6,44)(1,5 - 3,47) \cdot 39 + 0 + (2,5 - 6,44) \cdot 50 = -690,2 \text{ см}^4.$$

Положение главных центральных осей фигуры найдем по формуле $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2J_{uv} / (J_u - J_v) = 2(-690,2) / (714,4 - 2428) = 0,403$. Отсюда $\alpha_0 = 19^\circ$. На рис. 5.3 главные центральные оси обозначены x и y .

Величины главных моментов инерции:

$$J_{\max} = 0,5(J_u + J_v \pm \sqrt{(J_u - J_v)^2 + 4J_{uv}^2}) = 0,5(2428 + 714,4 \pm \sqrt{(2428 - 714,4)^2 + 4(-690,2)^2}) = \frac{2671}{471,2} \text{ см}^4.$$

Поскольку $J_u > J_v$, то момент инерции $J_{\max} = J_x$ (ось x ближе расположена к оси u). Итак, $J_x = 2671 \text{ см}^4$, $J_y = 471,2 \text{ см}^4$.

Пример 5.3. Определить центробежный момент инерции уголка 80·8 относительно осей u и v (рис. 5.4).

Вспользуемся формулой (5.1): $J_x = J_u \cos^2 \alpha + J_v \sin^2 \alpha - J_{uv} \sin 2\alpha$. В ней (табл. 3) $J_x = J_{\min} = 30,3 \text{ см}^4$, $J_u = J_v = 73,4 \text{ см}^4$; $\alpha = 45^\circ$. Разрешая записанное выражение относительно искомого центробежного момента и подставляя в него численные значения входящих геометрических величин, находим $J_{uv} = J_u \cos^2 45^\circ + J_v \sin^2 45^\circ - J_x = J_u - J_x = 73,4 - 30,3 = 43,1 \text{ см}^4$.

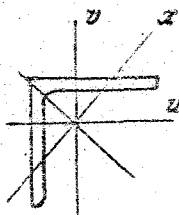


Рис. 5.4

Обратим внимание на то, что центробежный момент инерции может быть и положительным, и отрицательным. Чтобы в расчетах подобного типа не допустить ошибку, нужно учитывать знак угла поворота осей. В рассмотренном примере угол принят положительным, поскольку поворот осей u и v произведен против хода часовой стрелки.

Пример 5.4. Определить положение главных центральных осей и вычислить величины главных моментов инерции фигуры, составленной из сечений прокатного швеллера № 20 и равнобокого уголка 250·30 (рис. 5.5).

Проведем вспомогательные оси u_0 и v_0 . По табл. 2 находим: $u_0^{(1)} = -10 \text{ см}$, $v_0^{(1)} = 2,07 \text{ см}$, $A_1 = 23,4 \text{ см}^2$. По табл. 3 $u_0^{(2)} = v_0^{(2)} = 7,31 \text{ см}$, $A_2 = 142 \text{ см}^2$. Вычислим координаты центра тяжести: $u_0^c = \frac{A_1 u_0^{(1)} + A_2 u_0^{(2)}}{A_1 + A_2} = \frac{23,4(-10) + 142 \cdot 7,31}{23,4 + 142} = 4,86 \text{ см};$

$$v_0^c = \frac{A_1 v_0^{(1)} + A_2 v_0^{(2)}}{A_1 + A_2} = \frac{23,4 \cdot 2,07 + 142 \cdot 7,31}{23,4 + 142} = 6,57 \text{ см.}$$

Проведем через центр тяжести фигуры (точку C) оси u и v .

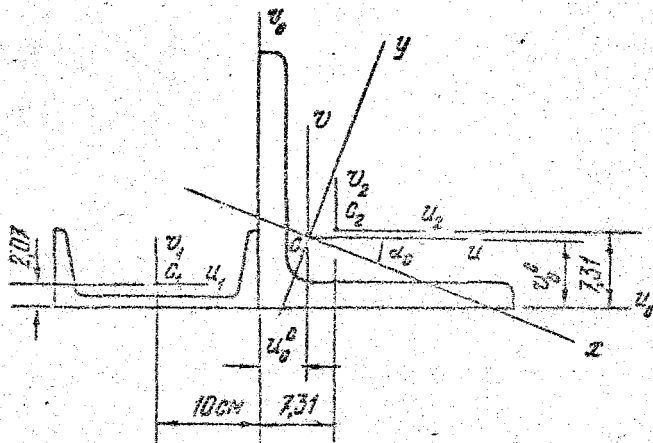


Рис. 5.5

Вычислим осевые и центробежные моменты инерции фигуры относительно осей u и v .

По табл. 2 $J_{u_1}^{(1)} = 113 \text{ см}^4$, $J_{v_1}^{(1)} = 1520 \text{ см}^4$. Центробежный момент инерции швеллера $J_{u_1 v_1}^{(1)} = 0$, так как оси u_1 и v_1 для него главные.

По табл. 3 $J_{u_2}^{(2)} = J_{v_2}^{(2)} = 8177 \text{ см}^4$. Численное значение центробежного момента инерции уголка равно $J_{u_2 v_2}^{(2)} - J_{min}^{(2)} = 8177 - 3389 = 4788 \text{ см}^4$

(см. пример 5.3). Однако для уголка, изображенного на рис. 5.5, он будет отрицательным, так как большая часть уголка расположена во втором и третьем квадрантах, где произведения $u_2 v_2 dA_2 < 0$ (ср. также положения уголков на рис. 5.4 и 5.5). Итан, $J_{u_2 v_2}^{(2)} = -4788 \text{ см}^4$. Теперь

$$J_u = J_{u_1}^{(1)} + J_{u_2}^{(2)} = J_{u_1}^{(1)} + (v_0^{(1)} - v_0^c)^2 A_1 + J_{u_2}^{(2)} + (v_0^{(2)} - v_0^c)^2 A_2 = 113 + (2,07 - 6,57)^2 23,4 + 8177 + (7,31 - 6,57)^2 142 = 8842 \text{ см}^4;$$

$$J_v = J_{v_1}^{(1)} + J_{v_2}^{(2)} = J_{v_1}^{(1)} + (u_0^{(1)} - u_0^c)^2 A_1 + J_{v_2}^{(2)} + (u_0^{(2)} - u_0^c)^2 A_2 = 1520 + (-10 - 4,86)^2 23,4 + 8177 + (7,31 - 4,86)^2 142 = 15720 \text{ см}^4;$$

$$J_{uv} = J_{uv}^{(1)} + J_{uv}^{(2)} = J_{u_1v_1}^{(1)} + (v_0^{(1)} - v_0^{(2)})(u_0^{(1)} - u_0^{(2)})A_1 + J_{u_2v_2}^{(2)} + (v_0^{(2)} - v_0^{(1)})(u_0^{(2)} - u_0^{(1)})A_2 = 0 + (2,07 - 6,57)(-10 - 4,86) \cdot 23,4 - 4788 + (7,31 - 6,57)(7,31 - 4,86) \cdot 142 = -2966 \text{ см}^4.$$

Определим положение главных центров тяжести.

$\text{tg } 2\alpha_0 = 2J_{uv} / (J_v - J_u) = 2(-2966) / (15720 - 8842) = -0,862$; $\alpha_0 = -20,4^\circ$. Главные центральные оси фигуры (рис. 5.5) обозначены буквами x и y .

Главные моменты инерции:

$$J_{max/min} = 0,5(J_u + J_v \pm \sqrt{(J_u - J_v)^2 + 4J_{uv}^2}) = 0,5(8842 + 15720 \pm \sqrt{(8842 - 15720)^2 + 4(-2966)^2}) = \frac{16822}{7739} \text{ см}^4.$$

Ось x ближе к центру тяжести, следовательно, $J_x = 7739 \text{ см}^4$, $J_y = 16822 \text{ см}^4$.

Для самостоятельного решения:

Задача 5.6. Определить положение главных осей инерции и вычислить главные моменты инерции фигуры (рис. 5.6).

Задача 5.7. Показать, что абсолютная величина минимального момента инерции равнобедренного и равноугольного треугольника относительно центральных осей, параллельных сторонам, минимизируется по равенству $|J_x - J_y| = J_z$, $J_z = 0,5(J_x + J_y)$.

Задача 5.8. Определить значения наибольшего и наименьшего равнобедренного треугольника относительно центральных осей, параллельных сторонам (рис. 5.7).

Задача 5.9. Определить положение главных центров тяжести и вычислить главные моменты инерции изогнутой фигуры (рис. 5.8) относительно осей x и y и центрального момента инерции относительно оси z .

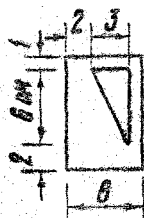


Рис. 5.6

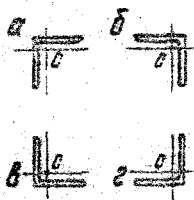


Рис. 5.7

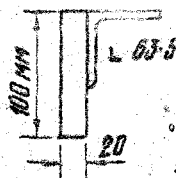


Рис. 5.8

5.7. Программа определения положения главных центральных осей и величины главных моментов инерции

5.7.1. Для вычисления координат главных центральных осей и величины главных моментов инерции составных фигур разработана программа "PRAU". Она написана на языке Фортран и ориентирована на мини-ЭВМ СМ и персональные компьютеры.

Исходными данными для работы программы являются количество составляющих фигур n ($n \leq 9$), а также координаты центров тяжести в произвольно выбранной системе осей U_0 и V_0 , площади, осевые и центробежные моменты инерции каждой простой фигуры относительно ее центральных осей, параллельных U_0 и V_0 . Ввод исходных данных осуществляется с помощью дисплея в режиме диалога.

5.7.2. Текст программы.

```
C *****
C *
C *      ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ГЛАВНЫХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ОСЕЙ *
C *      И ГЛАВНЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПЛОСКИХ ФИГУР *
C *
C *  М А С С И В Ы :  А - ПЛОЩАДИ ПРОСТЫХ ФИГУР; *
C *  U,V - КООРДИНАТЫ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТИ ПРОСТЫХ ФИГУР В *
C *  СИСТЕМЕ ОСЕЙ UB,VB; *
C *  JUI, JVI, JUVI - ОСЕВЫЕ И ЦЕНТРОБЕЖНЫЕ МОМЕНТЫ *
C *  ИНЕРЦИИ ПРОСТЫХ ФИГУР ОТНОСИТЕЛЬНО СОБСТВЕННЫХ *
C *  ЦЕНТРАЛЬНЫХ ОСЕЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЯМ UB, VB. *
C *  П Е Р Е М Е Н Н Ы Е :  AS - ПЛОЩАДЬ ВСЕЙ ФИГУРЫ; *
C *  UC, VC - КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ФИГУРЫ ОТНОСЬТЕЛ- *
C *  НО ОСЕЙ UB, VB; *
C *  JU, JV, JUV - ОСЕВЫЕ И ЦЕНТРОБЕЖНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ *
C *  ФИГУРЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРАЛЬНЫХ ОСЕЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ *
C *  UB И VB; *
C *  JX, JY - МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ГЛАВНЫХ *
C *  ЦЕНТРАЛЬНЫХ ОСЕЙ; *
C *  ALFA - УГОЛ МЕЖДУ ЦЕНТРАЛЬНЫМИ И ГЛАВНЫМИ ЦЕНТРАЛЬ- *
C *  НЫМИ ОСЯМИ; *
C *  D, N, DN, NK - ПЕРЕМЕННЫЕ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ДЛЯ ОРГАНИ- *
C *  ЗАЦИИ ДИАЛОГА. *
C *
C *
C *
C *      С.Б.ШАТКОВ  28.04.88 *
C *****
```

DIMENSION A(9),U(9),V(9),JUI(9),JVI(9),JUIVI(9)

IMPLICIT REAL*4 (J)

LOGICAL*1 D,H,DM

DATA D/'D',H/'H'/'

1000 TYPE 1001

1001 FORMAT(///

* 10X, ' ЧЕЛЯБИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ' //
* 10X, ' ИМ. ЛЕНИНСКОГО КОМСОМОЛА' //
* 10X, ' КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ' // // //
* 10X, ' П Р О Г Р А М М А < P R A X >' // //
* 10X, ' ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ГЛАВНЫХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ОСЕЙ'
* /10X, ' И ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПЛОСКИХ',
* ' ФИГУР' // // //
* 18X, ' РАЗРАБОТЧИК: ДОЦ., К.Т.Н. С.Б. ШМАТКОВ' // //
* 10X, ' Ч Е Л Я Б И Н С К 1988 Г.' //
* ' ДЛЯ ПЕРЕХОДА К СЛЕДУЮЩЕМУ КАДРУ НАЖМИТЕ КЛАВИШУ',
* ' < BK > - ВОЗВРАТ КАРЕТКИ.' // //

ACCEPT 6, BK

100 TYPE 101

101 FORMAT(///10X,

* ' И Н С Т У К Ц И Я' // // //18X,
* ' П О Р А Б О Т Е С П Р О Г Р А М М О Й < P R A X >' // //
* ' П Р Е Д В А Р И Т Е Л Ь Н О Н Е О Б Х О Д И М О:' // //
* ' Р А З Б И Т Ь С О С Т А В Н У Ю Ф И Г У Р У Н А N П Р О С Т Ы Х Ф И Г У Р',
* ' (N < 10) ;' // //
* ' О П Р Е Д Е Л И Т Ь К О О Р Д И Н А Т Ы Ц Е Н Т Р О В Т Я Ж Е С Т И К А Ж Д О Й И З',
* ' П Р О С Т Ы Х Ф И Г У Р В Н Е К О Т О Р О Й /
* ' П Р О И З В О Л Ь Н О В Ы Б Р А Н Н О Й С И С Т Е М Е К О О Р Д И Н А Т',
* ' U0, V0:' //
* ' В Ы Ч И С Л И Т Ь О С Е В Ы Е И Ц Е Н Т Р О Б Е Ж Н Ы Е М О М Е Н Т Ы И Н Е Р Ц И И',
* ' К А Ж Д О Й И З П Р О С Т Ы Х Ф И Г У Р' //
* ' О Т Н О С И Т Е Л Ь Н О С О Б С Т В Е Н Н Ы Х Ц Е Н Т Р А Л Ь Н Ы Х О С Е Й U I, ',
* ' V I, П А Р А Л Л Е Л Ь Н Ы Х И С Х О Д Н Ы М О С Е Я М' //
* ' U0, V0.' // //
* ' В С Е И С Х О Д Н Ы Е Д А Н Н Ы Е Д О Л Ж Н Ы И М Е Т Ь О Д Н У',
* ' Р А З М Е Р Н О С Т Ь Д Л И Н Ы . Р Е З У Л Ь Т Р А С Ч Е Т А' //
* ' В Ы Р А Ж А Е Т С Я В Э Т О Й Ж Е Р А З М Е Р Н О С Т И.' //

- * ПРИ НАБОРЕ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ ЦЕЛАЯ ЧАСТЬ ЧИСЛА ,
- * ОТДЕЛЯЕТСЯ ОТ ДРОБНОЙ ТОЧКОЙ. //
- * ДЛЯ ВВОДА НАБРАННОЙ ИНФОРМАЦИИ НЕОБХОДИМО НАЖАТЬ ,
- * КЛАВИШУ < BK > - ВОЗВРАТ //
- * КАРЕТКИ. ')

TYPE 102

102 FORMAT(1X,75('-'))//

11
C

*** 1 ***

TYPE 10

10 FORMAT(' ВВЕДИТЕ ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ. '//

- * КОЛИЧЕСТВО ПРОСТЫХ ФИГУР ',T36,'N =',8)

ACCEPT *,N

IF (N.GE.1.AND.N.LE.9) GO TO 13

TYPE 12,N

12 FORMAT(' НЕДОПУСТИМОЕ ЗНАЧЕНИЕ N=',I3/

- * ДЛЯ ВВОДА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ НАЖМИТЕ КЛАВИШУ < BK >. ',8)

ACCEPT 6,BK

GO TO 100

13 DO 11 I=1,N

TYPE 14,I,I

14 FORMAT(/I3,'-Я ФИГУРА: '// ПЛОЩАДЬ',T35,'A',I1,' =',8)

ACCEPT *,A(I)

TYPE 15,I

15 FORMAT(' КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ',T35,'U',I1,' =',8)

ACCEPT *,U(I)

TYPE 16,I

16 FORMAT(T35,'V',I1,' =',8)

ACCEPT *,V(I)

TYPE 17,I

17 FORMAT(' ОСЕВЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ',T34,'JU',I1,' =',8)

ACCEPT *,JU(I)

TYPE 18,I

18 FORMAT(T34,'JV',I1,' =',8)

ACCEPT *,JV(I)

TYPE 19,I,I

19 FORMAT(' ЦЕНТРОБЕЖНЫЙ МОМЕНТ ИНЕРЦИИ',T32,'JU',I1,'V',

- * I1,' =',8)

36 ACCEPT *,JUIVI(I)

```

11 CONTINUE
    TYPE 1
1   FORMAT(20(//) ' ПРОВЕРЬТЕ ПРАВИЛЬНОСТЬ ИСХОДНЫХ
*   ' ДАННЫХ. '//)
    TYPE 2
2   FORMAT(1X,78('-'))
    TYPE 3
3   FORMAT(' : :',11X,' : КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА :',35X,
*   '://': NO--: ПЛОЩАДЬ :',8X,' ТЯЖЕСТИ',8X,' :',
*   ' М О М Е Н Т Ы   И Н Е Р Ц И И   ://': МЕР:',11X,' :',
*   23('-'),':',35('-'),'://': :',4X,' AI',5X,' :',4X,' UI'
*   ,5X,' :',4X,' VI',5X,' :',4X,' JUI',4X,' :',4X,' JVI',4X,' :',
*   3X,' JUIVI',3X,' :')
    TYPE 2
4   FORMAT(' :',12,' :',6(611.4,' :'))
    DD 3 I=1,N
8   TYPE 4,I,A(I),U(I),V(I),JUI(I),JVI(I),JUIVI(I)
    TYPE 2
7   TYPE 5
5   FORMAT(//// ' ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ВВЕДЕНЫ ПРАВИЛЬНО ?
*   '( Д/Н ) ',8)
    ACCEPT 6,DN
6   FORMAT(A1)
    IF (DN.EQ.D) GO TO 24
    IF (DN.EQ.H) GO TO 100
    GO TO 7
C
C           *** 2 ***
24  AS=0.
    DK 20 I=1,N
20  AS=AS+A(I)
    IF (AS.GT.1E-30) GO TO 22
    TYPE 21,AS
21  FORMAT(' ПЛОЩАДЬ ВСЕЙ ФИГУРЫ ИМЕЕТ НЕДОПУСТИМОЕ',
*   ' ЗНАЧЕНИЕ A=',612.3//
*   ' ОШИБКА В ИСХОДНЫХ ДАННЫХ. '//
*   ' ДЛЯ ВВОДА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ НАЖМИТЕ КЛАВИШУ < BK >.',8)
    ACCEPT 6,BK
    GO TO 100

```

```

22      UC=0.
        VC=0.
        DO 23 I=1,N
          UC=UC+A(I)*U(I)/AS
23      VC=VC+A(I)*V(I)/AS
        TYPE 102
        TYPE 25,UC,VC
25      FORMAT(23(//)' КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ТРИКЕТИ ФИГУРЫ: ',
*        UC =',612.5,' VC =',612.5/)
C
C
C
C
        *** 3 ***
        JU=0.
        JV=0.
        JUV=0.
        DO 30 I=1,N
          JU=JU+JUI(I)+A(I)*(V(I)-VC)**2
          JV=JV+JVI(I)+A(I)*(U(I)-UC)**2
30      JUV=JUV+JUIVI(I)+A(I)*(U(I)-UC)*(V(I)-VC)
        IF (JU.GT.1E-20.AND.JV.GT.1E-20) GO TO 40
        TYPE 31,JU,JV
31      FORMAT(' ОСЕВЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ВСЕЙ ФИГУРЫ',
*        ' ОТНОСИТЕЛЬНО ЕЕ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ОСЕЙ, '//
*        ' ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЯМ ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ',
*        ' РАВНЫ: '//
*        10X,'JU =',612.5,3X,'JV =',612.5/
*        ' ЭТИ ВЕЛИЧИНЫ ДОЛЖНЫ БЫТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ.',
*        ' ОШИБКА В ИСХОДНЫХ ДАННЫХ. '//
*        ' ДЛЯ ВВОДА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ НАЖМИТЕ КЛАВИШУ < BK >',X)
        ACCEPT 6,BK
        GO TO 100
C
C
C
C
        *** 4-5 ***
40      IF (ABS(JU-JV)/JU.GT.0.0001) GO TO 80
        IF (ABS(JUV)/JU.GT.0.0001) GO TO 70
C
C
C
        *** 6 ***
        TYPE 60,JU
60      FORMAT(' ФИГУРА ИМЕЕТ БЕСКОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО ГЛАВНЫХ',
*        ' ЦЕНТРАЛЬНЫХ ОСЕЙ. '//

```

```

* ' ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ РАВНЫ МЕЖДУ СОБОЙ ',
* ' JMAX = JMIN = ',612.5/////

STOP

C
C          *** 7 ***
70 ALFA=3.1415926/4.
GO TO 90

C
C          *** 8 ***
80 ALFA=0.5*ATAN(2.*JUV/(JV-JU))

C
C          *** 9 ***
90 C2=(COS(ALFA))**2
S2=(SIN(ALFA))**2
S2A=SIN(2.*ALFA)
JX=JU*C2+JV*S2-JUV*S2A
JY=JV*C2+JU*S2+JUV*S2A
ALFA=ALFA*180./3.1415926
TYPE 91,ALFA,JX,JY
91 FORMAT(' ГЛАВНЫЕ ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ОСИ X, Y РАСПОЛОЖЕНЫ ',
* ' ПОД УГЛОМ ALFA0 = ',F7.3,' ГРАДУСОВ' /
* ' К ЦЕНТРАЛЬНЫМ ОСЯМ ФИГУРЫ U, V, ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ОСЯМ ',
* ' U0, V0 ( ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ /
* ' НАПРАВЛЕНИЕ ПРОТИВ ЧАСОВОЙ СРЕЛКИ ). '
* '// ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ: JX = ',612.5,3X,
* ' JY = ',612.5,/
* ' ( ОСЬ X - БЛИЖАЙШАЯ К ОСИ U; Y - К ОСИ V )')
IF (JX.LE.1E-20.AND.JY.LE.1E-20) GO TO 94
TYPE 93
STOP

92 FORMAT('// ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ДОЛЖНЫ БЫТЬ ',
* ' ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ. ' /
* ' ОШИБКА В ИСХОДНЫХ ДАННЫХ. '//
* ' ДЛЯ ВВОДА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ НАЖМИТЕ КЛАВИШУ < BK >.',)
93 FORMAT(/////)
94 TYPE 92
ACCEPT 6,BK
GO TO 100
END

```

5.7.3. Контрольный пример. Найти положение главных центральных осей и величины главных моментов инерции фигуры, изображенной на рис. 5.9.

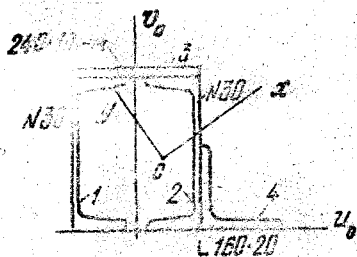


Рис. 5.9

Предварительная нумерация фигур и вспомогательные оси U_0 и V_0 приведены на рисунке. Содержание каталога, текст диалога, вводимая и выводимая на экран информация проиллюстрированы прилагаемой распечаткой.

Положение главных центральных осей, установленное выполненным расчетом, показано на рис. 5.9.

ЧЕЛЯБИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМ. ЛЕНИНСКОГО КОМСОМОЛА

КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

ПРОГРАММА < P R A X >

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ГЛАВНЫХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ОСЕЙ
И ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПЛОСКИХ ФИГУР

РАЗРАБОТЧИК: ДОЦ., К.Т.Н. С.Б. ШМАТКОВ

Ч Е Л Я Б И Н С К 1988 Г.

ДЛЯ ПЕРЕХОДА К СЛЕДУЮЩЕЙ КАДРУ НАЖИТЕ КЛАВИШУ < BK > -
ВОЗВРАТ КАРЕТКИ.

И Н С Т У К Ц И Я

ПО РАБОТЕ С ПРОГРАММОЙ < P R A X >

ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НЕОБХОДИМО:

РАЗБИТЬ СОСТАВНУЮ ФИГУРУ НА N ПРОСТЫХ ФИГУР ($N \leq 10$);

ОПРЕДЕЛИТЬ КООРДИНАТЫ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТИ КАЖДОЙ ИЗ ПРОСТЫХ ФИГУР
В НЕКОТОРОЙ ПРОИЗВОЛЬНО ВЫБРАННОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ U_0, V_0 ;

ВЫЧИСЛИТЬ ОСЕВЫЕ И ЦЕНТРОБЕЖНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ КАЖДОЙ ИЗ
ПРОСТЫХ ФИГУР ОТНОСИТЕЛЬНО СОБСТВЕННЫХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ОСЕЙ U_i, V_i ,
ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ИСХОДНЫМ ОСЯМ U_0, V_0 .

ВСЕ ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДОЛЖНЫ ИМЕТЬ ОДНУ РАЗМЕРНОСТЬ ДЛИНЫ.
РЕЗУЛЬТАТ РАСЧЕТА ВЫРАЖАЕТСЯ В ЭТОЙ ЖЕ РАЗМЕРНОСТИ.

ПРИ НАБОРЕ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ ЦЕЛАЯ ЧАСТЬ ЧИСЛА ОТДЕЛЯЕТСЯ ОТ
ДРОБНОЙ ТОЧКОЙ.

ДЛЯ ВВОДА НАБРАННОЙ ИНФОРМАЦИИ НЕОБХОДИМО НАЖАТЬ КЛАВИШУ
< BK > ВОЗВРАТ КАРЕТКИ.

ВВЕДИТЕ ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ.

КОЛИЧЕСТВО ПРОСТЫХ ФИГУР N = 4

1-я ФИГУРА:

ПЛОЩАДЬ A1 = 40.5
КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ U1 = -9.48
V1 = 15
ОСЕВЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ JU1 = 5810
JV1 = 327
ЦЕНТРОБЕЖНЫЙ МОМЕНТ ИНЕРЦИИ JU1V1 = 0

2-я ФИГУРА:

ПЛОЩАДЬ A2 = 40.5
КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ U2 = 9.48
V2 = 15
ОСЕВЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ JU2 = 5810
JV2 = 327
ЦЕНТРОБЕЖНЫЙ МОМЕНТ ИНЕРЦИИ JU2V2 = 0

3-я ФИГУРА:

ПЛОЩАДЬ A3 = 24
КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ U3 = 0
V3 = 30.5
ОСЕВЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ JU3 = 2
JV3 = 1152
ЦЕНТРОБЕЖНЫЙ МОМЕНТ ИНЕРЦИИ JU3V3 = 0

4-я ФИГУРА:

ПЛОЩАДЬ A4 = 60.4
КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ U4 = 16.7
V4 = 4.7
ОСЕВЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ JU4 = 1419
JV4 = 1419
ЦЕНТРОБЕЖНЫЙ МОМЕНТ ИНЕРЦИИ JU4V4 = -829.5

ПРОВЕРЬТЕ ПРАВИЛЬНОСТЬ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ.

№	ПЛОЩАДЬ	КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ			МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ		
МЕР	Ai	Ui	Vi	JUi	JVi	JU1Vi	
1	40.50	-9.480	15.00	5810.	327.0	0.0000	
2	40.50	9.480	15.00	5810.	327.0	0.0000	
3	24.00	0.0000	30.50	2.000	1152.	0.0000	
4	60.40	16.70	4.700	1419.	1419.	-829.5	

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ВВЕДЕНЫ ПРАВИЛЬНО? (Д/Н) Д

КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ФИГУРЫ: UC = 6.0984
VC = 13.488

ГЛАВНЫЕ ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ОСИ X, Y РАСПОЛОЖЕНЫ ПОД УГЛОМ ALPHA = 39.685 ГРАДУСОВ К ЦЕНТРАЛЬНЫМ ОСЯМ ФИГУРЫ U, V, ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ОСЯМ U0, V0 (ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ ПРОТИВ ЧАСОВОЙ СТРЕЛКИ).

ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ: JX = 32880. JY = 13155.
(ОСЬ X - БЛИЖАЙШАЯ К ОСИ U; Y - К ОСИ V)

STOP

6. ОТВЕТЫ

6.1. Ответы на контрольные вопросы к главе I

На вопрос 6. S_{x_1} - наибольший, S_{x_2} - наименьший (при сравнении учтено, что $S_{x_1} > 0$, а $S_{x_2} < 0$).

7. S_{x_1} - наименьший, S_{x_2} - наибольший.

8. J_{x_1} - наибольший, J_{x_2} - наименьший.

9. Ответ не изменится.

10. $J_x > J_y$.

11. Ответ не изменится.

12. Поскольку у этой фигуры преобладают произведения $x y dA$ даже положительные слагаемые, то для всей фигуры $J_{xy} > 0$.

13. $J_{xy} < 0$.

14. $J_{xy} < 0$.

15. $J_x + J_y = J_u + J_v = J_p$.

6.2. Ответы к задачам для самостоятельного решения

К задаче 2.1. Центр тяжести находится на оси симметрии в 3 см от левого края фигуры.

К задаче 2.2. Центр тяжести фигуры находится на расстоянии 0,243 см влево и 0,243 см вниз от центра круга.

К задаче 2.3. Координаты центра тяжести: $x^c = 3b/8$, $y^c = 2h/5$.

К задаче 4.1. Главные центральные оси - оси симметрии. Моменты инерции относительно горизонтальной и вертикальной осей соответственно равны $bh^3/48$ и $hb^3/48$.

К задаче 4.2. Главные центральные оси - горизонтальная ось симметрии x и вертикальная ось y , стоящая на 17,31 см от левого края фигуры; $J_x = 2713 \text{ см}^4$, $J_y = 4782 \text{ см}^4$.

К задаче 4.3. Главные центральные оси - ось симметрии x и y , стоящая на 12,82 см от левой точки фигуры; $J_x = 2453 \text{ см}^4$, $J_y = 8218 \text{ см}^4$.

К задаче 5.1. В осях, касающихся фигуры снизу и слева, $u_0^c = 2,8 \text{ см}$, $v_0^c = 4,2 \text{ см}$. Главные моменты инерции $J_x = 323 \text{ см}^4$, $J_y = 146 \text{ см}^4$. Ось x наклонена к горизонтали под углом $\alpha_0 = 3,8^\circ$.

К задаче 5.2. В примере 5.3 показано, что $|J_{uv}| = J_u - J_{min}$.
 Учтем, что для равнобокого уголка $J_u = J_v$. Кроме того, $J_{max} + J_{min} = J_u + J_v = 2J_u$. Теперь справедливо $|J_{uv}| = J_u - J_{min} = J_u - (2J_u - J_{max}) = J_{max} - J_u = J_{max} - 0,5(J_{max} + J_{min}) = 0,5(J_{max} - J_{min})$.

К задаче 5.3. а - "+"; б - "-"; в - "-"; г - "+".

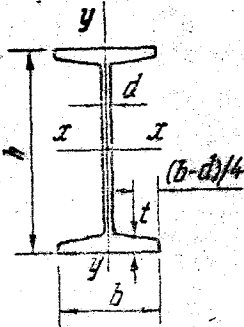
К задаче 5.4. В осях u_0 и v_0 , касающихся фигуры слева и снизу, $u_0^c = 1,64$ см, $v_0^c = 5,76$ см; $\alpha_0 = -16,2^\circ$ (от горизонтали до оси x). $J_x = J_{max} = 255,8$ см⁴, $J_y = 48,9$ см⁴.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сопротивление материалов / А.Ф.Смирнов, А.В.Александров, Н.И.Монахов и др.; Под ред. А.Ф.Смирнова. 3-е изд. - М.: Высшая школа, 1975. - 480 с.
2. Иврин В.А. Конспект лекций по сопротивлению материалов: Учебное пособие. - Челябинск: ЧПИ, 1971. - Ч. I. - 92 с.
3. Степин П.А. Сопротивление материалов. - 8-е изд. - М.: Высшая школа, 1988. - 368 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

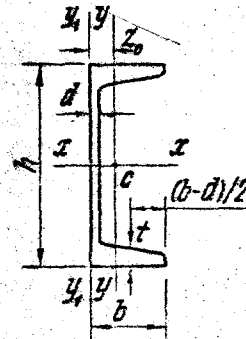
Сортамент прокатной стали в соответствии с ГОСТ 8239-72, 8240-72, 8509-72*
(СТ СЭВ 104-74)



Двутавры

Таблица I

№ про- филя	Размеры				Пло- щадь се- чения	Справочные величины для осей							
	h	b	d	t		X-X				Y-Y			z ₀
						J _x	W _x	I _x	S _x	J _y	W _y	I _y	
						см ⁴	см ³	см	см ⁴	см ⁴	см ³	см	
мм				см ²	см ⁴	см ³	см	см ⁴	см ⁴	см ³	см	см	
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	
50	500	170	10,0	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	
55	550	180	11,0	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39	
60	600	190	12,0	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54	



Швеллеры

Таблица 2

№ про- филя	Размеры*			Пло- щадь се- чения	Справочные величины для осей							z ₀
	b	d	t		X-X				Y-Y			
					J _x	W _x	I _x	S _x	J _y	W _y	I _y	
					см ⁴	см ³	см	см ⁴	см ⁴	см ³	см	
мм			см ²	см ⁴	см ³	см	см ⁴	см ⁴	см ³	см	см	
5	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,00	1,53	1,54
14	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	5,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,90	121	187	30,0	2,55	2,46
24	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	110	7,5	12,6	53,4	10200	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

* Высота швеллера в см совпадает с номером профиля.

№ про- филь	Размеры		Пло- щадь сече- ния	Справочные величины для осей							z ₀
	b	d		x-x		x ₀ -x ₀		y ₀ -y ₀		x ₁ -x ₁	
				J _x	i _x	J _{x₀} макс	i _{x₀} макс	J _{y₀} мин	i _{y₀} мин	J _{x₁}	
	мм	мм		см ⁴	см	см ⁴	см	см ⁴	см	см ⁴	
18	180	II	38,8	I216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
		I2	42,2	I317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89
20	200	I2	47,1	I823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		I3	50,9	I961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		I4	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		I6	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07		
22	220	I4	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
		I6	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5561	6,02
25	250	I6	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
		I8	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23
30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31		

Тем. план 1988 г., п. 152

Владимир Андреевич Икрин,
Сергей Борисович Шматков

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ПЛОСКИХ ФИГУР

Учебное пособие
для самостоятельной работы

Редактор Н.А. Гаврилова
Техн. редактор А.В. Миних

Редакционно-издательский отдел
Челябинского политехнического института,
имени Ленинского комсомола

Подписано к печати 17.05.88. Формат 60x90 1/16. Печ. л. 3.
Уч.-изд. л. 3. Тираж 500 экз. Заказ 218/1084. Цена 14 к.

УОП ЧПИ. 454044. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.