

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

539.3/.6(07) п  
И425

В.А.Икрин

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

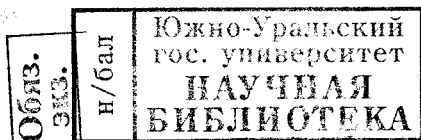
Часть I

РАСТЯЖЕНИЕ, КРУЧЕНИЕ, ИЗГИБ

Учебник для студентов

архитектурно-строительного факультета

47 22



Челябинск

Издательство ЮУрГУ

2001

539.3/.6(07) п И425

УДК 539.3/6(07)

В.А.Икрин. Сопротивление материалов. Часть I. Растяжение, кручение, изгиб: Учебник для студентов архитектурно-строительного факультета. – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2001. –160 с.

Составлен в соответствии со следующими документами:

– Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования, введенным в действие с 1 сентября 1994 года;

– Требованиями к минимуму содержания и уровня подготовки инженера по специальности 290300 – “Промышленное и гражданское строительство”;

– Рабочей программой дисциплины “Сопротивление материалов” для подготовки дипломированных специалистов по специальности 290300.

Приведены экспериментально-теоретические основы курса, методы расчетов стержневых элементов конструкций на простейшие виды нагружения. Теоретический материал проиллюстрирован примерами.

Ориентирован на студентов специальности “Промышленное и гражданское строительство”. Может быть использован на других архитектурно-строительных специальностях.

Ил. 141, табл. 10.

Одобен учебно-методической комиссией архитектурно-строительного факультета.

Рецензенты: И.А.Иванов, В.И.Симонов.

ISBN 5-696-01677-4

© Издательство ЮУрГУ, 2001

Право тиражирования принадлежит автору и охраняется законом РФ.

## Оглавление

Предисловие.....	7
Основные буквенные обозначения .....	8
1. Введение	
1.1. Задача науки о сопротивлении материалов .....	10
1.2. Классификация тел по геометрическому признаку. Объект изучения в сопротивлении материалов.....	11
1.3. Методы науки .....	12
1.4. Место сопротивления материалов среди других наук.....	13
1.5. Реальный объект и расчетная схема.....	14
1.6. Основные физические гипотезы, используемые в сопротивлении материалов.....	15
1.7. Идеализация внешних сил при выборе расчетной схемы... ..	17
1.8. Идеализация связей при выборе расчетной схемы .....	18
2. Геометрические характеристики плоских фигур	
2.1. Основные геометрические характеристики, используемые в сопротивлении материалов .....	19
2.2. Статические моменты. Центр тяжести фигуры.....	21
2.3. Моменты инерции простейших геометрических фигур.....	22
2.3.1. Прямоугольник .....	22
2.3.2. Треугольники .....	22
2.3.3. Круг.....	23
2.3.4. Кольцо.....	24
2.4. Изменения моментов инерции при переносе координатной системы .....	24
2.4.1. Изменения осевых и центробежного моментов инерции при параллельном переносе осей .....	25

2.4.2. Изменения осевых и центробежного моментов инерции при повороте координатной системы .....	26
2.5. Главные оси. Главные центральные оси .....	26
2.6. Главные моменты инерции.....	28
2.7. Пояснения к таблицам геометрических характеристик прокатных профилей .....	29
2.8. Примеры определения положения главных центральных осей и величин главных моментов инерции .....	30
2.8.1. Симметричные фигуры.....	30
2.8.2. Составная фигура общего очертания.....	33
3. Внутренние силы. Внутренние силовые факторы	
3.1. Внешние и внутренние силы .....	35
3.2. Понятия напряжений и напряженного состояния .....	36
3.3. Обобщенные силы в сечении. Внутренние силовые факторы	
3.3.1. Понятия и термины.....	37
3.3.2. Геометрические представители стержня в расчетной схеме.....	38
3.3.3. Метод сечений .....	39
3.4. Эпюры внутренних силовых факторов .....	42
3.4.1. Продольные силы .....	43
3.4.2. Крутящие моменты.....	44
3.4.3. Внутренние силовые факторы в балках.....	45
3.4.3.1. Дифференциальные зависимости при изгибе .....	46
3.4.3.2. Примеры построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов .....	47
3.4.3.3. Некоторые закономерности очертания эпюр поперечных сил и изгибающих моментов .....	52
3.4.4. Внутренние силовые факторы в плоских системах.....	53
3.4.5. Внутренние силовые факторы в общем случае.....	56
4. Плоское напряженное состояние .....	59
4.1. Постановка задачи .....	59
4.2. Теорема о парности касательных напряжений.....	61
4.3. Напряжения в наклонных площадках .....	61
4.4. Нормальные напряжения, действующие во взаимно перпендикулярных площадках ..	62
4.5. Главные площадки и главные напряжения.....	63

4.6. Наибольшее касательное напряжение .....	65
4.7. Виды напряженного состояния .....	66
5. Растяжение и сжатие .....	67
5.1. Испытания материалов на растяжение.	
Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали .....	67
5.2. Сравнение диаграмм растяжения различных материалов .....	70
5.3. Испытания на сжатие .....	71
5.4. Закон Гука при одноосном напряженном состоянии .....	74
5.5. Испытания на растяжение и сжатие при сложных программах нагружения .....	76
5.6. Понятие о нормативном и расчетном сопротивлении материала. Условие прочности .....	78
5.7. Влияние температуры и длительности действия нагрузки на механические характеристики и свойства материалов .....	80
5.8. План решения основной задачи сопротивления материалов	84
5.9. Напряжения в поперечном сечении стержня при растяжении и сжатии. Теоретическое решение задачи ...	86
5.10. Критический анализ формулы нормальных напряжений. Принцип Сен-Венана. Понятие о концентрации напряжений	88
5.11. Напряженное состояние стержня. Расчет на прочность при растяжении и сжатии .....	89
5.12. Равнонапряженный сжатый стержень .....	93
5.13. Деформации при растяжении и сжатии .....	94
5.14. Перемещения при растяжении и сжатии. Расчет на жесткость .....	97
5.15. Работа внешних и внутренних сил. Потенциальная энергия деформации при растяжении и сжатии .....	99
5.16. Понятие о коэффициенте запаса .....	101
6. Кручение .....	103
6.1. Испытания на сдвиг.	
Расчетное сопротивление материала на срез.	
Условие прочности .....	103
6.2. Напряжения в круглом или кольцевом поперечном сечении стержня .....	105
6.3. Напряженное состояние при кручении. Расчет на прочность .....	108

6.4. Деформации и перемещения при кручении. Расчет на жесткость .....	110
6.5. Потенциальная энергия деформации при кручении.....	112
6.6. Кольцо – оптимальная форма сечения при кручении.....	112
6.7. Понятие о свободном и стесненном кручении. Мембранная аналогия.....	114
6.8. Свободное кручение стержней массивного сечения. Прямоугольное сечение.....	115
6.9. Свободное кручение тонкостенных стержней открытого профиля.....	117
6.10. Напряжения в поперечном сечении тонкостенного стержня закрытого профиля при свободном кручении.....	118
6.11. Деформации тонкостенных стержней закрытого профиля при свободном кручении .....	120
7. Прямой изгиб .....	123
7.1. Напряжения в поперечном сечении балки при чистом изгибе .....	123
7.2. Нормальные напряжения в сечении балки при поперечном изгибе.....	129
7.3. Касательные напряжения в балке прямоугольного сечения (вывод формулы Журавского) .....	130
7.4. Касательные напряжения в сечении двутавровой балки. Обобщение формулы Журавского на другие типы сечений	133
7.5. Оценка нормальных напряжений в горизонтальных сечениях балок .....	136
7.6. Напряженное состояние балок при поперечном изгибе.....	137
7.7. Понятие о траекториях главных напряжений .....	142
7.8. Расчет на прочность при поперечном изгибе.....	144
7.9. Рациональные типы сечений балок .....	150
7.10. Понятие о балках равного сопротивления .....	151
7.11. Потенциальная энергия деформации при поперечном изгибе.....	152
7.12. Перемещения при прямом изгибе. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки. Расчет на жесткость .....	154
Приложения .....	159

---

---

## Предисловие

Этот выпуск является переоформленным вариантом учебника, изданного в 1997 году<sup>1</sup>. В процессе подготовки ко второму изданию внесены незначительные изменения:

- исправлены замеченные опечатки;
- откорректированы некоторые предложения из соображений тематической и смысловой компоновки учебника;
- изменены некоторые рисунки с целью улучшения их информативности.

Тематическое содержание учебника осталось без изменений. Сохранены заголовки и их нумерация. Исключен лишь предметный указатель.

Автор выражает благодарность директору ООО “Уральская строительная компания” А.В.Котову за спонсорскую помощь, обеспечившую возможность подготовки, оформления и издания учебника, и безвозмездную его передачу в фонд библиотеки университета.

---

<sup>1</sup> В.А.Икрин. Соппротивление материалов. Учебник для студентов архитектурно-строительного факультета. Часть I. Растяжение, кручение, изгиб. – Челябинск: Изд-во ЧГТУ, 1997. – 160 с.

## Основные буквенные обозначения

- $A$  – площадь;
- $C$  – константа;
- $D$  – диаметр;
- $E$  – модуль упругости;
- $F$  – сила;
- $G$  – модуль сдвига;
- $J$  – момент инерции;
- $M$  – момент;
- $N$  – продольная сила;
- $Q$  – поперечная сила;
- $R$  – сопротивление материала;
- $S$  – статический момент;
- $T$  – температура; сила;
- $U$  – потенциальная энергия деформации;
- $V$  – объем;
- $W$  – момент сопротивления; работа;
- $X, Y, Z$  – опорные реакции; проекции сил на оси.
- $b$  – ширина; символ изгиба;
- $c$  – центр тяжести; символ сжатия;
- $d$  – диаметр; толщина стенки прокатного профиля; дифференциал;
- $e$  – символ упругости;
- $g$  – ускорение свободного падения;
- $h$  – высота; толщина;
- $i$  – номерной индекс;
- $k$  – номерной индекс;
- $l$  – длина;



$m$  – интенсивность момента;  
 $n$  – коэффициент запаса прочности; количественный индекс;  
 $p$  – давление; полное напряжение; символ полярного;  
символ пластичности;  
 $q$  – интенсивность нагрузки, распределенной по линии;  
 $r$  – полярный радиус; радиус кривизны;  
 $s$  – окружная координата в цилиндрической системе; символ сдвига;  
 $t$  – время; толщина; символ кручения; символ растяжения;  
 $u$  – координата (аналог  $x$ ); перемещение вдоль оси  $x$ ;  
удельная потенциальная энергия деформации;  
символ предельного;  
 $v$  – координата (аналог  $y$ ); перемещение вдоль оси  $y$ ; прогиб балки;  
 $w$  – удельная работа; перемещение вдоль оси  $z$ ;  
 $x, y, z$  – декартовы координаты;  
главная координатная система стержня.

$\Delta$  – символ приращения;  
 $\Sigma$  – знак суммы;  
 $\Omega$  – площадь;  
 $\alpha$  – угол; коэффициент;  
 $\beta$  – ширина (аналог лат.  $b$ ); угол; коэффициент;  
 $\gamma$  – относительный сдвиг; коэффициент;  
 $\delta$  – отношение внутреннего диаметра кольца к наружному;  
относительное остаточное удлинение при разрыве;  
перемещение;  
 $\varepsilon$  – относительное удлинение;  
 $\xi, \eta, \zeta$  – декартовы координаты (аналог  $x, y, z$ );  
 $\theta$  – относительный угол закручивания;  
угол поворота сечения балки; угол;  
 $\mu$  – коэффициент формы сечения;  
 $\nu$  – коэффициент Пуассона;  
 $\rho$  – плотность;  
 $\sigma$  – нормальное напряжение;  
 $\tau$  – касательное напряжение;  
 $\varphi$  – угол поворота; угол закручивания;  
 $\psi$  – относительное остаточное сужение при разрыве.

## 1. Введение

### 1.1. Задача науки о сопротивлении материалов

В ходе проектирования инженеру приходится решать много вопросов, связанных с будущей работой объекта: выбирать материал, назначать размеры элементов, виды и способы соединений конструкций между собой и т.п. Главная цель – обеспечить *прочность*<sup>1</sup> сооружения. Оно должно выдерживать действующие на него нагрузки как в ходе строительства, так и в период эксплуатации. Кроме того, нельзя допустить чрезмерного *деформирования*<sup>2</sup> конструкций – они должны быть достаточно *жесткими*<sup>3</sup>. Наконец, необходимо обеспечить *устойчивость*<sup>4</sup> сооружения и отдельных его частей.

Простейший путь выполнения этих требований – увеличение поперечных размеров конструкций. Однако это ведет к перерасходу материалов. Надежность и экономия противоречат друг другу. *Противоречие надежности и экономии является главным фактором, обуславливающим развитие науки о сопротивлении материалов.* Для проектирования надежных и экономичных сооружений нужно знать механические свойства материалов и уметь прогнозировать поведение конструкций в возможных неблагоприятных ситуациях.

<sup>1</sup> **Прочность** – способность выдерживать нагрузки. Здесь и далее при первом знакомстве с термином дано лишь качественное его толкование. Количественные меры той или иной способности будут введены в месте ее детального изучения.

<sup>2</sup> **Деформация** – изменение формы и (или) размеров.

<sup>3</sup> **Жесткость** – способность сохранять форму и размеры под нагрузкой.

<sup>4</sup> **Устойчивость** – способность сохранять состояние при малых возмущениях внешнего воздействия.

Ориентируясь на названные потребности, наука о сопротивлении материалов изучает процессы деформирования и разрушения твердых тел и разрабатывает методы расчетов элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

## 1.2. Классификация тел по геометрическому признаку. Объект изучения в сопротивлении материалов

Экспериментально и теоретически установлено, что возможность применения того или иного расчетного метода зависит от соотношения размеров тела. Отсюда вытекает необходимость в классификации тел по геометрическому признаку.

В зависимости от соотношения основных габаритных размеров (длина  $l$ , ширина  $b$  и высота  $h$ ) тело относят к одной из категорий (рис 1.1):

**Стержень** (рис. 1.1 а) – тело, два размера которого ( $b$  и  $h$ ) одного порядка<sup>1</sup> и значительно<sup>2</sup> меньше третьего ( $l$ ); представителями стержня являются его ось и поперечное сечение.

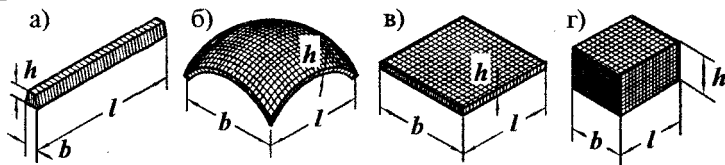


Рис. 1.1

**Оболочка** (рис. 1.1 б) – тело, два размера которого одного порядка и значительно больше третьего; в расчетной схеме оболочку представляют срединной поверхностью (поверхностью, расположенной посередине толщины) и толщиной.

**Пластика** – оболочка, срединная поверхность которой является плоскостью (рис. 1.1 в).

**Массив** (рис. 1.1 г) – тело, все три размера которого одного порядка.

<sup>1</sup> Мерой порядка в сопротивлении материалов обычно служит число 10: два размера (в данном случае  $b$  и  $h$ ) имеют один порядок, если их отношение лежит в пределах  $0,1 \leq b/h \leq 10$ .

<sup>2</sup> Мерой значительного преобладания одного размера над другим также служит число 10; у стержня  $b$  и  $h \leq 0,1l$ .

Приведенная классификация является в известной мере условной. Тем не менее она позволяет установить, какой метод для данного тела способен дать достоверные результаты расчета.

*Объектом изучения в сопротивлении материалов является стержень.*

Существенно, что в основу данной классификации положено соотношение, а не величины размеров. Поэтому в сопротивлении материалов к стержням могут быть отнесены и такие строительные конструкции, как многометровые колонны зданий, балки перекрытий, пояса, стойки и раскосы ферм, и (для сравнения) бытовая швейная игла.

### 1.3. Методы науки

Методы науки определяются задачами, решаемыми ею. Изучение процессов деформирования и разрушения тел невозможно без лабораторных испытаний. Поэтому в сопротивлении материалов экспериментальные методы занимают ведущее положение. Анализ внутренних процессов заставляет привлекать физические представления о строении тел и взаимодействии его частиц.

С другой стороны, рассматривая стержневые элементы в состоянии равновесия или в режиме движения, приходится использовать законы механики. Необходимость вычислительного прогнозирования естественно вовлекает в методы сопротивления материалов математический аппарат.

Как отмечено выше, сопротивление материалов разрабатывает практические методы расчетов элементов конструкций, основанные на упрощенных представлениях о внутренних процессах. Упрощения процессов порождают погрешность предсказываемого результата. В сопротивлении материалов для оценки погрешностей вновь привлекают эксперимент. Выполняя в подобных случаях контрольные функции, эксперимент является критерием корректности предлагаемых методов расчетов.

Методы сопротивления материалов характеризуются

- экспериментально-теоретическим подходом к задачам;
- применением законов физики, механики и математического аппарата;
- широким использованием упрощающих предпосылок.

#### 1.4. Место сопротивления материалов среди других наук

Характеризуя место сопротивления материалов, следует рассмотреть его связь с тремя группами наук:

- фундаментальными для сопротивления материалов;
- родственными по решаемым задачам;
- профилирующими для инженера-строителя.

Первая группа. Фундаментальными для сопротивления материалов являются названные выше математика, физика и механика. Они вооружают используемые методы возможностями решения поставленных задач.

Вторая группа. Задачи, рассматриваемые в сопротивлении материалов, в той или иной мере решаются и в других науках. По исследованиям процессов деформирования и разрушения сопротивление материалов соприкасается с циклом дисциплин, входящих в группу материаловедения (для строительных материалов это теории металлов, бетона, пластмасс, древесины и т.п.). В них устанавливаются специфические особенности деформирования названных материалов и применяются, в основном, экспериментальные методы.

Другой цикл наук той же группы объединяет механика твердого деформируемого тела (теории упругости, пластичности и ползучести). Она рассматривает те же процессы, но, главным образом, с теоретических позиций и в рамках более строгих предпосылок.

Задачи о прочности, жесткости и устойчивости также рассматриваются в других дисциплинах: в строительной механике, теориях упругости, пластичности и ползучести.

Третья группа наук – профилирующая. Сюда входят металлические, каменные, бетонные, железобетонные конструкции, конструкции из древесины и пластмасс. Для них сопротивление материалов является базовой дисциплиной. Установленные в нем принципиальные закономерности деформирования материалов, методы оценки прочности, способы определения внутренних сил дополняются в профилирующих дисциплинах спецификой поведения конкретных материалов и положениями нормативных документов.

Следует отметить, что границы и между указанными дисциплинами весьма нечетки, а связи многообразны. Поэтому описанное соотношение наук отражено в известной мере условно.

## 1.5. Реальный объект и расчетная схема

Полный учет всех свойств реального объекта при его расчете принципиально невозможен в силу бесконечной их сложности. Поэтому первым шагом при анализе работы конструкции является упрощение задачи. *Реальный объект заменяют расчетной схемой.*

Чтобы выбрать расчетную схему, нужно из множества внешних воздействий, геометрических особенностей объекта и физических свойств материала выделить наиболее существенные в данной задаче и отбросить слабо влияющие на результат анализа. Степень упрощений зависит от требуемой точности, математических возможностей, а также от того, какая сторона явления рассматривается в задаче.

При выборе расчетной схемы приходится идеализировать геометрические параметры объекта, физические свойства материала, внешнее воздействие, опоры и связи.

Трудно назвать все приемы, которые используют при выборе расчетной схемы. В конкретных условиях появляются конкретные возможности, определяющие необходимую и допустимую степень идеализации объекта. Нередко оказывается, что предпосылки, пригодные для расчета одних конструкций, неприменимы для других.

Отметим, что для одного и того же объекта возможен выбор различных расчетных схем в зависимости от поставленной задачи. Например, при определении усилий в ферме стержни считают соединенными шарнирно. Основанное на этом решение вполне достоверно для усилий на средних участках стержней. Если же интерес представляют усилия в местах соединения стержней, необходимо точнее отразить силовое взаимодействие сочлененных элементов.

С другой стороны, одной и той же расчетной схеме может быть поставлено в соответствие несколько разных объектов. Скажем, растянутый стержень может моделировать и канаты подъемных машин, и стойки, раскосы, пояса ферм, и т.п.

Переход от реального объекта к расчетной схеме является важным шагом, так как от введенных предпосылок зависит результат расчета. Выбор схемы осложняется еще и тем, что во многих случаях трудно заранее оценить степень влияния той или иной особенности конструкции. Приходится полагаться на интуицию, а иногда рассчитывать конструкцию, применяя разные расчетные схемы.

Нужно усвоить, что расчет состоит не только в выборе расчетных формул и вычислениях по ним. Нельзя забывать о первом шаге – идеализации реальных свойств, который неизбежно в определенной степени отразится на конечном результате. С какой бы точностью ни производились вычисления, результат оказывается приближенным. Поэтому получаемые решения всегда необходимо оценивать критически на фоне использованных предпосылок.

## 1.6. Основные физические гипотезы, используемые в сопротивлении материалов

Важным шагом при выборе расчетной схемы является отражение механических свойств материала. Отказ от понятия жесткого тела потребовал введения гипотез, описывающих эти свойства. Нет такой физической модели, которая бы достаточно хорошо отражала поведение всех материалов. Для одних пригодны одни предпосылки, для других – другие. Тем не менее есть некоторые общие гипотезы, используемые в большинстве задач сопротивления материалов.

**Гипотеза континуальности.** Согласно ей считают, что *материал занимает объем тела сплошь – без разрывов и пустот.*

Такое предположение, строго говоря, противоречит физическому учению об атомно-молекулярном строении тел. Однако гипотеза континуальности позволила использовать теорию непрерывных функций – сравнительно простой и эффективный математический аппарат – и в то же время получать вполне удовлетворительные решения, сглаживая силовые взаимодействия между микрообъектами.

**Гипотеза о ненапряженном начальном состоянии.** В соответствии этой гипотезой *в ненагруженном теле внутренних сил нет.*

В действительности в любом теле всегда действуют межатомные внутренние силы. Они обеспечивают существование тела как геометрической единицы. Игнорирование внутренних сил, действующих в ненагруженном теле, приводит к тому, что в расчетах определяются не сами внутренние силы, а добавки к ним, вызванные внешним воздействием. Использование этой гипотезы оправдывается тем, что механические характеристики материалов также определяются без учета начальных сил.

**Гипотеза однородности.** *Однородным называется такое тело, свойства которого во всех точках одинаковы.*

В природе нет однородных тел, хотя бы в силу атомно-молекулярного их строения. Однако с некоторым приближением свойства материала осредненно можно считать одинаковыми во всем объеме. Гипотеза однородности освобождает от необходимости учета изменчивости механических свойств по объему, чем упрощает расчёты.

Обсуждаемая гипотеза применима не ко всем материалам. В тех случаях, когда свойства тела в разных точках существенно различны, его считают *неоднородным* и вводят в расчёты соответствующие механические характеристики.

**Гипотеза изотропии.** *Изотропным называется такой материал, свойства которого во всех направлениях одинаковы.*

Предпосылка об изотропии является приближенной. Тем не менее для большинства материалов в силу хаотичной структурной ориентации можно считать свойства не зависящими от направления. К изотропным материалам можно отнести металлы, естественные и искусственные камни, некоторые виды пластмасс и т.п.

Материал, свойства которого в разных направлениях различны, называют *анизотропным*. Примерами анизотропных материалов служат древесина, ориентировано армированные пластмассы и т.п.

**Гипотеза упругости.** *Тело, которое после устранения внешнего воздействия восстанавливает свои размеры и форму, называется упругим.*

Реальные тела и материалы, строго говоря, не являются упругими. После каждого воздействия в них остаются некоторые отклонения от начальных размеров. Величины этих отклонений зависят от величин нагрузок. При небольших усилиях остаточные деформации невелики, материал можно считать упругим. При больших — существенны, наделять материал свойством упругости нельзя.

В упругом теле внутренние силы и деформации зависят только от тех нагрузок, которые действуют в рассматриваемый момент; от предшествующих воздействий никаких последствий не остается.

В сопротивлении материалов используют много различных предпосылок, имеющих локальное значение. Поэтому изложение их здесь преждевременно и более оправдано в месте введения.



## 1.7. Идеализация внешних сил при выборе расчетной схемы

Внешняя нагрузка, фигурирующая в расчетной схеме, – это силы, с которыми исключенные из анализа конструкции действуют на рассматриваемую. Любые силы взаимодействия распределены в пределах контактных поверхностей. Установить распределения этих сил практически невозможно. По этой причине внешнюю нагрузку также идеализируют. В зависимости от размеров площади загрузки усилие относят к одной из следующих категорий.

*Сосредоточенные силы.* Ими представляют давления, передаваемые через площадку, размеры которой малы по сравнению с размерами исследуемой области. Количественные меры сосредоточенных сил –  $H$ ,  $кН$ ,  $МН$  и т.п.

*Нагрузки, распределенные по линии.* Так схематизируют давления, передаваемые по поверхности, длина которой, с одной стороны, значительно превышает ширину, с другой, соизмерима с большим размером тела. Величину такой нагрузки измеряют интенсивностью в  $H/м$ ,  $кН/м$ ,  $МН/м$  и т.п.

Если размеры поверхности, по которой передается нагрузка, соизмеримы с размерами тела, то идеализируют характер ее распределения. Интенсивность *распределенной по поверхности нагрузки* измеряют давлением в  $H/м^2$  ( $Па$ ),  $кН/м^2$  ( $кПа$ ),  $МН/м^2$  ( $МПа$ ) и т.п.

В том случае, когда нагрузку можно представить парой сил с малым плечом, ее изображают в виде *сосредоточенного момента*, имеющего размерность  $Нм$ ,  $кНм$ ,  $МНм$  и т.п.

Приведенная классификация сил дана по такому признаку как размеры контактной поверхности. Можно разделить силы и по другим показателям. Скажем, по

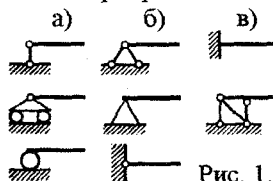
- характеру распределения (равномерные, неравномерные);
- месту действия (поверхностные и объемные);
- положению точки приложения (неподвижные и подвижные);
- изменению во времени (постоянные, переменные) и т.д.

Детальное обсуждение этих категорий приведено в курсах физики, механики, спецдисциплинах и здесь представляется излишним.

## 1.8. Идеализация связей при выборе расчетной схемы

Связи, фигурирующие в расчетной схеме, – это элементы соседних конструкций, накладывающие ограничения на перемещения соединяемых точек. Кинематическое и силовое действие связей сложно и многообразно. Поэтому их также идеализируют. В зависимости от преобладающей стороны кинематического влияния элемента, заменяемого связью, его абсолютизируют.

*Шарнирно-подвижная опора* (примеры ее изображения приве-



дены на рис. 1.2 а). Ее выбирают при слабом сопротивлении реальной связи повороту вокруг опорной точки и смещению в каком-либо направлении, но практически исключению перемещения в другом направлении, перпендикулярном первому.

Рис. 1.2

*Шарнирно-неподвижная опора* (рис. 1.2. б). Так имитируют реальную опору при сильном сопротивлении линейному перемещению в любом направлении, но при слабом препятствии повороту.

*Защемление* (рис. 1.2 в). Эту связь вводят, когда заменяемый ею элемент практически исключает перемещения места соединения.

В приведенном кратком перечне рассмотрены примеры плоских связей. Нет необходимости подробного описания других их типов, введенных и используемых в курсе механики. Здесь они позаимствованы для приближенной имитации взаимодействия реальных тел.

Идеализация связей влечет за собой и идеализацию реакций, однозначно определяемых способом закрепления элемента.

Таким образом, в расчетной схеме должны быть представлены:

- геометрические параметры (размеры и очертание оси, данные о поперечном сечении);
- связи, наложенные на стержень;
- механическая модель материала (оговорены используемые физико-механические гипотезы);
- внешнее воздействие.

Отмеченные в настоящем разделе характерные особенности сопротивления материалов позволяют рассматривать его как *общинженерную экспериментально-теоретическую науку о прочности, жесткости и устойчивости стержневых элементов конструкций.*

## 2. Геометрические характеристики плоских фигур

### 2.1. Основные геометрические характеристики, используемые в сопротивлении материалов

Прочность, жесткость и устойчивость стержня зависят не только от материала, но и от формы и размеров поперечного сечения. Эти зависимости проявляются через различные геометрические характеристики. Познакомимся с некоторыми из них.

Рассмотрим плоскую фигуру (поперечное сечение стержня), связанную с осями  $x$  и  $y$  (рис. 2.1). Обозначим площадь фигуры буквой  $A^1$ . Выделим в произвольной точке элементарную площадку  $dA$ .

*Интеграл произведений элементарных площадок и их координат, отсчитываемых от данной оси, называется статическим<sup>2</sup> моментом* фигуры относительно оси:

$$\int_A y dA = S_x, \quad \int_A x dA = S_y. \quad (2.1)$$

$S_x$  — статический момент фигуры относительно оси  $x$ ;  $S_y$  — относительно  $y$ . Индекс "A" под интегралом означает, что интегрирование ведется по всей площади фигуры.

Размерность статических моментов —  $см^3, м^3$  и т. п.

Из подынтегральных произведений, входящих в равенства (2.1), видно, что статический момент может быть и положительным, и отрицательным, а следовательно, и равным нулю.

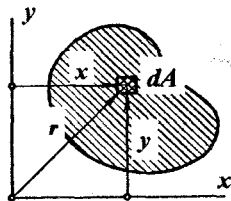


Рис. 2.1

<sup>1</sup> От англ. *area* — площадь.

<sup>2</sup> От англ. *statical* — статический.

Интеграл произведений элементарных площадок и квадратов их расстояний от оси, называется осевым моментом инерции<sup>1</sup> фигуры относительно данной оси:

$$\int_A y^2 dA = J_x, \int_A x^2 dA = J_y. \quad (2.2)$$

$J_x$  — осевой момент инерции фигуры относительно оси  $x$ ;  $J_y$  — относительно  $y$ . По равенствам (2.2) нетрудно установить, что осевые моменты инерции всегда положительны.

Интеграл произведений элементарных площадок и их координат, называется центробежным моментом инерции фигуры относительно данных осей:

$$\int_A xy dA = J_{xy}. \quad (2.3)$$

В зависимости от положения фигуры на координатной плоскости центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и в частном случае равным нулю.

Интеграл произведений элементарных площадок и квадратов расстояний их от фиксированной точки называется полярным моментом инерции фигуры относительно данного полюса:

$$\int_A r^2 dA = J_p. \quad (2.4)$$

Полярный момент инерции всегда положителен.

Размерность моментов инерции —  $\text{см}^4$ ,  $\text{м}^4$  и т.п.

Если полюс совпадает с началом координат, то

$$J_p = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = J_x + J_y; \quad (2.5)$$

полярный момент инерции равен сумме осевых моментов инерции.

Так как определенный интеграл — это сумма, статический момент или момент инерции фигуры, составленной из  $n$  частей, равен сумме вычисленных в той же координатной системе одноименных геометрических характеристик  $i$ -х составляющих фигур.

$$S_x = \sum_{i=1}^n S_x^i, \quad S_y = \sum_{i=1}^n S_y^i, \quad J_x = \sum_{i=1}^n J_x^i, \quad J_y = \sum_{i=1}^n J_y^i, \quad J_{xy} = \sum_{i=1}^n J_{xy}^i, \quad J_p = \sum_{i=1}^n J_p^i. \quad (2.6)$$

Приведенный перечень не охватывает все геометрические характеристики, используемые в сопротивлении материалов. Ниже будут введены новые понятия, опирающиеся на приведенные выше или аналогичные им.

<sup>1</sup> От англ. *inertia* — инерция. Подобные интегралы фигурируют в динамике, отсюда и перешло их название.

## 2.2. Статические моменты.

### Центр тяжести фигуры

Рассмотрим горизонтальную пластинку произвольного очертания (рис. 2.2). Вес элементарного параллелепипеда с основанием  $dA$  равен  $\rho gh dA$  ( $\rho$  – плотность материала,  $g$  – ускорение свободного падения). Сумму моментов этих сил относительно оси  $x$  запишем так:  $M = \int_A y \rho gh dA$ . С другой стороны, согласно теореме Вариньона момент системы сил равен моменту равнодействующей. Вес пластинки – это  $\rho gh A$ ; плечо относительно оси  $x$  равно  $y_c$ ; момент  $M = \rho gh A y_c$ . Приравниваем выражения момента:  $\int_A y \rho gh dA = \rho gh A y_c$ . Вынося  $\rho gh$  из под интеграла и сокращая на них, согласно обозначению (2.1) имеем

$$S_x = A y_c. \quad (2.7)$$

Аналогично,  $S_y = A x_c. \quad (2.8)$

Статический момент равен произведению площади фигуры на координату ее центра тяжести, определяющую расстояние между центром и осью.

Формулы (2.7) и (2.8) позволяют вычислить статические моменты, если известны площадь и положение центра тяжести фигуры. А поскольку из этих равенств следует

$$x_c = S_y / A, \quad y_c = S_x / A, \quad (2.9)$$

то положение центра тяжести может быть установлено, если известны площадь и статические моменты фигуры.

На практике нередко приходится находить центр тяжести сложной фигуры, составленной из простых<sup>1</sup> частей. В таких случаях удобно пользоваться формулами (2.9) в ином виде. Учитывая, что  $A = \sum_{i=1}^n A_i$ ,  $S_x = \sum_{i=1}^n S_x^i$ ,  $S_y = \sum_{i=1}^n S_y^i$ , и записывая  $S_x^i = A_i y_i$ ,  $S_y^i = A_i x_i$ ,

получаем 
$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad (2.10)$$

где  $x_c$  и  $y_c$  – координаты центра тяжести сложной фигуры;  $x_i$ ,  $y_i$  и  $A_i$  – координаты центра тяжести и площадь  $i$ -й составляющей фигуры.

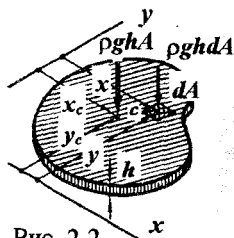


Рис. 2.2

<sup>1</sup> Фигур с известными площадями и положениями центров тяжести.

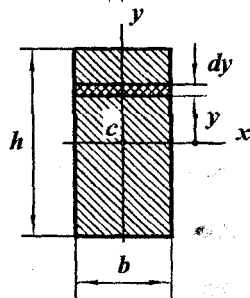
Важную роль в сопротивлении материалов играют так называемые *центральные оси* – оси, проходящие через центр тяжести фигуры. Из формул (2.7) и (2.8) следует, что *статический момент* фигуры относительно центральной оси равен нулю.

### 2.3. Моменты инерции простейших геометрических фигур

Ознакомимся с методами определения моментов инерции некоторых геометрических фигур и выведем соответствующие формулы.

#### 2.3.1. Прямоугольник

Найдем осевые моменты инерции  $J_x$  и  $J_y$  прямоугольника (рис. 2.3) относительно осей симметрии  $x$  и  $y$ .



Воспользуемся первой формулой из (2.2). На расстоянии  $y$  выделим элементарную полоску высотой  $dy$ . Площадь ее  $dA = bdy$ . Теперь

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = bh^3/12.$$

Итак,  $J_x = bh^3/12.$  (2.11)

Аналогично,  $J_y = hb^3/12.$  (2.12)

#### 2.3.2. Треугольники

Рис. 2.3 2.3.2.1. Найдем момент инерции треугольника относительно центральной оси  $x$ , параллельной основанию  $b$  (рис. 2.4).

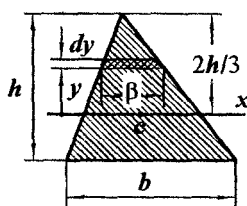


Рис. 2.4

Выделив элементарную полоску, имеем  $dA = \beta dy$ . Из подобия треугольников (заданного и расположенного выше полоски) следует  $\beta/b = (2h/3 - y)/h$ . Теперь

$$dA = b(2h/3 - y)dy/h.$$

Момент инерции

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/3}^{2h/3} y^2 b(2h/3 - y)dy/h. \text{ После ин-}$$

тегрирования имеем

$$J_x = bh^3/36. \quad (2.13)$$

Результат (2.13) не зависит от положения вершины по ширине. У разных треугольников с равными  $b$  и равными  $h$  равны и моменты инерции относительно осей  $x$ , параллельных основаниям  $b$ .

2.3.2.2. Найдем момент инерции равнобедренного треугольника относительно оси симметрии  $y$  (рис. 2.5).

Выделим элементарную полоску, параллельную оси  $y$ , высотой  $\eta$ . Из подобия треугольников следуют равенства:

$$\eta/h = (b/2 - x)/(b/2), \quad \eta = 2h(b/2 - x)/b;$$

$$dA = \eta dx = 2h(b/2 - x)dx/b.$$

$$\text{Момент инерции } J_y = \int_A x^2 dA = 2 \int_0^{b/2} x^2 2h(b/2 - x)dx/b.$$

В итоге 
$$J_y = hb^3/48. \quad (2.14)$$

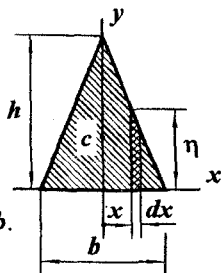


Рис. 2.5

2.3.2.3. Выведем формулу центрбежного момента инерции прямоугольного треугольника относительно центральных осей, параллельных катетам (рис. 2.6).

Как и прежде,  $\beta = b(2h/3 - y)/h$ ,

площадка  $dA = \beta dy = b(2h/3 - y)dy/h$ .

Абсцисса  $x = b/3 - \beta/2 = b/3 - b(2h/3 - y)/(2h)$ .

По выражению (2.3)  $J_{xy} = \int_A xy dA =$

$$= \int_{-h/3}^{2h/3} ((b/3 - b(2h/3 - y)/(2h))yb(2h/3 - y)dy/h.$$

Результат: 
$$J_{xy} = b^2 h^2 / 72. \quad (2.15)$$

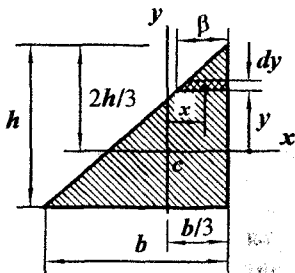


Рис. 2.6

Если при данном положении треугольника изменить направление какой-либо оси, знак центрбежного момента изменится. Изменится знак  $J_{xy}$  и в случае поворота треугольника на  $180^\circ$  вокруг любой из осей.

### 2.3.3. Круг

Выведем формулы осевых  $J_x$  и  $J_y$  и полярного  $J_p$  моментов инерции круга (рис. 2.7).

У элементарной площадки  $dA = 2\beta dy$ ,

$\beta = 0,5D \cos \alpha$ . Но  $y = 0,5D \sin \alpha$ , дифференциал

$dy = 0,5D \cos \alpha d\alpha$ . Момент инерции  $J_x = \int_A y^2 dA =$

$$= 0,125 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D^2 \sin^2 \alpha D^2 \cos^2 \alpha d\alpha = \pi D^4 / 64. \quad \text{Ясно,}$$

что  $J_x = J_y$ . Итак, 
$$J_x = J_y = \pi D^4 / 64. \quad (2.16)$$

По равенству (2.5) 
$$J_p = \pi D^4 / 32. \quad (2.17)$$

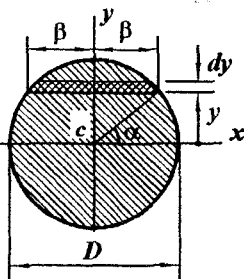


Рис. 2.7

### 2.3.4. Кольцо

Найдем осевые  $J_x$ ,  $J_y$  и полярный  $J_p$  моменты инерции кольца (рис. 2.8).

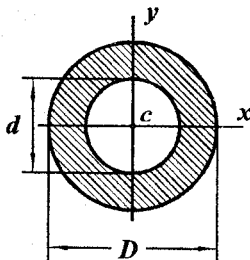


Рис. 2.8

Аналогично,

Кольцо можно рассматривать как разность кругов. Поэтому согласно свойствам (2.6)  $J_x = J_x^1 - J_x^2$  (верхний индекс "1" относится к большому кругу, "2" – к малому). В соответствии с формулой (2.16)

$$J_x = \pi D^4/64 - \pi d^4/64.$$

Обозначив  $d/D = \delta$  и учитывая, что у кольца  $J_x = J_y$ , запишем формулы в виде

$$J_x = J_y = \pi D^4(1 - \delta^4)/64. \quad (2.18)$$

$$J_p = \pi D^4(1 - \delta^4)/32. \quad (2.19)$$

### 2.4. Изменения моментов инерции при переносе координатной системы

Приведенные примеры проиллюстрировали методы определения моментов инерции, основанные на непосредственном интегрировании. Эти способы могут быть использованы при любом взаимном расположении фигуры и координатной системы. Однако такой путь связан с громоздкими выкладками. Поэтому целесообразно установить закономерности изменения моментов инерции при переносе осей. Это позволит, найдя моменты инерции в некоторой базовой системе, определить их в любой другой, минуя интегрирование. Обычно в качестве базовых принимают оси из семейства центральных осей.

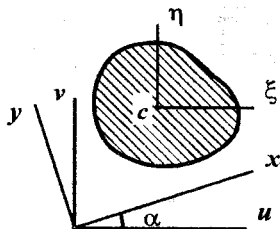


Рис. 2.9

Переход от одной системы координат ( $\xi\eta$  на рис. 2.9) к другой ( $xу$ ) можно осуществить в два этапа – параллельный перенос осей до положения  $uv$  с последующим поворотом на угол  $\alpha$  в позицию  $xу$ .

Рассмотрим изменения осевых и центрбежного моментов инерции фигуры на каждом из указанных этапов переноса осей.



## 2.4.1. Изменения осевых и центробежного моментов инерции при параллельном переносе осей

Пусть задана фигура и связанные с ней оси  $u$  и  $v$  (рис. 2.10). Проведем центральные оси  $\xi$  и  $\eta$ , параллельные заданным. Взаимное положение систем задано координатами центра тяжести  $u_c, v_c$ .

Считаем известными площадь фигуры  $A$ , осевые  $J_\xi, J_\eta$  и центробежный  $J_{\xi\eta}$  моменты инерции относительно центральных осей.

Найдем осевые  $J_u, J_v$  и центробежный  $J_{uv}$  моменты инерции.

Из рисунка видно, что  $v = \eta + v_c$ . Учитывая это, находим

$$J_u = \int_A v^2 dA = \int_A (\eta + v_c)^2 dA = \int_A \eta^2 dA + 2v_c \int_A \eta dA + v_c^2 \int_A dA.$$

Интегралы в последних трех слагаемых: в первом —  $J_\xi$ , во втором —  $S_\xi$  ( $S_\xi = 0$ , так как ось  $\xi$  центральная), в третьем —  $A$ . Итак,

$$J_u = J_\xi + v_c^2 A. \quad (2.20)$$

Аналогично, при  $u = \xi + u_c$  получаем

$$J_v = J_\eta + u_c^2 A. \quad (2.21)$$

Осевой момент инерции относительно произвольной оси равен осевому моменту инерции относительно параллельной ей центральной оси плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями.

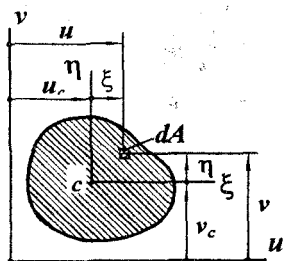


Рис. 2.10

Из формул (2.20) и (2.21) следует, что в семействе параллельных осей центральная ось сообщает осевому моменту инерции минимум.

Найдем теперь центробежный момент инерции:

$$J_{uv} = \int_A uv dA = \int_A (\xi + u_c)(\eta + v_c) dA = \int_A \xi\eta dA + u_c \int_A \eta dA + v_c \int_A \xi dA + u_c v_c \int_A dA.$$

Интегралы во втором и третьем слагаемых равны нулю, так как являются статическими моментами относительно центральных осей.

Учитывая, что  $\int_A \xi\eta dA = J_{\xi\eta}$ , а  $\int_A dA = A$ , получаем

$$J_{uv} = J_{\xi\eta} + u_c v_c A. \quad (2.22)$$

Центробежный момент инерции относительно пары осей равен центробежному моменту инерции относительно центральной параллельной пары плюс произведение площади фигуры и координат центра тяжести в новых осях. При использовании формулы (2.22) необходимо учитывать знаки координат  $u_c$  и  $v_c$ .

## 2.4.2. Изменения осевых и центробежного моментов инерции при повороте координатной системы

Установим закономерности изменения моментов инерции при повороте осей (рис. 2.11). Будем считать известными осевые  $J_u, J_v$  и центробежный  $J_{uv}$  моменты инерции. Повернем оси  $u$  и  $v$  до положения  $x, y$  и найдем моменты инерции  $J_x, J_y$  и  $J_{xy}$ .

Из вспомогательного построения  $x = u \cos \alpha + v \sin \alpha$ ,

$$y = v \cos \alpha - u \sin \alpha.$$

Теперь  $J_x = \int_A y^2 dA =$

$$\text{Рис. 2.11} \quad = \int_A (v \cos \alpha - u \sin \alpha)^2 dA =$$

$$= \cos^2 \alpha \int_A v^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A u^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A uv dA.$$

Интеграл в первом слагаемом есть  $J_v$ , во втором  $J_u$ , в третьем  $J_{uv}$ .

Итак,  $J_x = J_u \cos^2 \alpha + J_v \sin^2 \alpha - J_{uv} \sin 2\alpha. \quad (2.23)$

Аналогично,  $J_y = J_u \sin^2 \alpha + J_v \cos^2 \alpha + J_{uv} \sin 2\alpha. \quad (2.24)$

Центробежный момент инерции:  $J_{xy} = \int_A xy dA =$

$$= \int_A (u \cos \alpha + v \sin \alpha)(v \cos \alpha - u \sin \alpha) dA =$$

$$= \sin \alpha \cos \alpha \left( \int_A v^2 dA - \int_A u^2 dA \right) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_A uv dA.$$

После преобразований получаем

$$J_{xy} = 0,5(J_u - J_v) \sin 2\alpha + J_{uv} \cos 2\alpha. \quad (2.25)$$

При использовании формул (2.23) ... (2.25) нужно иметь в виду, что положительный угол  $\alpha$  откладывается против хода часовой стрелки.

Итак, формулы (2.20) – (2.25) позволяют, определив моменты инерции фигуры относительно центральных осей, перейти к любой координатной системе, минуя трудоемкое интегрирование.

## 2.5. Главные оси. Главные центральные оси

Расчетные формулы сопротивления материалов намного упрощаются, если при решении задач использовать так называемые главные центральные оси.

*Главными* называются такие оси, относительно которых *центробежный момент инерции равен нулю*.

Установим, под каким углом по отношению к осям *и* и *ν* следует расположить оси *x* и *y* (рис. 2.11), чтобы они стали главными. Для этого воспользуемся формулой (2.25). Обозначив искомый угол  $\alpha_0$ , запишем:  $J_{xy} = 0,5(J_u - J_\nu)\sin 2\alpha_0 + J_{uv}\cos 2\alpha_0 = 0$ . Отсюда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2J_{uv}/(J_\nu - J_u). \quad (2.26)$$

Поскольку тангенс – периодическая функция с периодом  $180^\circ$ , равенству (2.26) удовлетворяют два значения угла  $\alpha_0$ , отличающиеся на  $90^\circ$ . Поэтому формула (2.26) определяет положение двух взаимно перпендикулярных главных осей.

*Главными центральными* называются главные оси, проходящие через центр тяжести. Если в качестве *и* и *ν* взять центральные оси, то формула (2.26) определит положение главных центральных осей.

У любой фигуры существует бесчисленное множество главных (нецентральных) осей. Центральные (неглавные) осей также бесчисленное множество. Осей же главных центральных в общем случае – только одна пара. Таким образом, *главные центральные оси – это геометрический объект, однозначно определяемый формой и размерами фигуры и жестко связанный с ней*. Отмеченное свойство главных центральных осей имеет важное методическое значение, поскольку позволяет использовать их в качестве обобщенных представителей фигуры (поперечного сечения стержня).

Выделим частные случаи.

У симметричной фигуры (рис. 2.12) любой элементарной площадке в одной половине найдется симметричная в другой. Произведения  $xy dA$  у этих площадок равны по величине, но обратны по знаку. Центробежный момент инерции (2.3) фигуры будет равен нулю. Таким образом, ось симметрии и любая перпендикулярная ей ось являются главной парой.

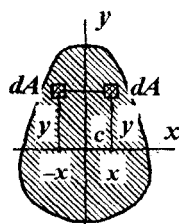


Рис. 2.12

*Ось симметрии и перпендикулярная ей центральная ось являются главными центральными осями симметричной фигуры*.

У фигуры, имеющей две оси симметрии, центр тяжести лежит в точке их пересечения, так что, *оси симметрии и являются главными центральными*.

## 2.6. Главные моменты инерции

*Главными<sup>1</sup> моментами инерции называются моменты инерции относительно главных центральных осей.*

После определения угла  $\alpha_0$  по равенству (2.26) главные моменты инерции могут быть вычислены по формулам (2.23) и (2.24).

С целью иллюстрации важного свойства главных моментов инерции исследуем равенства (2.23) и (2.24). Просуммируем их:

$$J_u + J_v = J_x + J_y. \quad (2.27)$$

*Сумма осевых моментов инерции при повороте координатных осей остается постоянной<sup>2</sup>.*

Теперь исследуем момент инерции  $J_x$  (2.23) на экстремум — продифференцируем его по  $\alpha$  и приравняем производную нулю:

$$dJ_x/d\alpha = -2J_u \cos\alpha \sin\alpha + 2J_v \sin\alpha \cos\alpha - 2J_{uv} \cos 2\alpha = 0.$$

Прежде чем делать выводы, преобразуем полученное выражение.

$$dJ_x/d\alpha = -2(J_u \cos\alpha \sin\alpha - J_v \sin\alpha \cos\alpha + J_{uv} \cos 2\alpha) = -2J_{xy} \text{ (см. (2.25)).}$$

Итак, 
$$dJ_x/d\alpha = -2J_{xy}. \quad (2.28)$$

Из равенства (2.28) следует, что главные моменты инерции принимают экстремальные значения в тех взаимно перпендикулярных осях, которые обращают в нуль центробежный момент. Добавляя к сказанному свойство (2.27), видим, что одна главная ось доставляет осевому моменту инерции максимум, другая минимум.

Наконец, наличие минуса в равенстве (2.28) определяет:

— если  $J_{uv} > 0$ , то первая главная ось при положительном отсчете угла  $\alpha$  сообщает моменту инерции минимум;

— если же  $J_{uv} < 0$ , — максимум.

Для уменьшения объема вычислений при определении главных моментов инерции преобразуем формулы (2.23), (2.24) и (2.26). По формулам тригонометрии и равенству (2.26) имеем:

$$\cos 2\alpha_0 = \pm 1/\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha_0} = \pm (J_u - J_v)/\sqrt{(J_u - J_v)^2 + 4J_{uv}^2};$$

$$\sin 2\alpha_0 = \operatorname{tg} 2\alpha_0 \cos 2\alpha_0 = \mp 2J_{uv}/\sqrt{(J_u - J_v)^2 + 4J_{uv}^2};$$

$$\cos^2 \alpha_0 = (1 + \cos 2\alpha_0)/2 = (1 \pm (J_u - J_v)/\sqrt{(J_u - J_v)^2 + 4J_{uv}^2})/2;$$

$$\sin^2 \alpha_0 = (1 - \cos 2\alpha_0)/2 = (1 \mp (J_u - J_v)/\sqrt{(J_u - J_v)^2 + 4J_{uv}^2})/2.$$

<sup>1</sup> Ради краткости термина определение "центральными" опущено.

<sup>2</sup> Это равенство, впрочем, вытекает и из соотношения (2.5).

Заменяя тригонометрические функции в равенствах (2.23) и (2.24) представленными здесь выражениями, приходим к формулам

$$J_{\max/\min} = (J_u + J_v \pm \sqrt{(J_u - J_v)^2 + 4J_{uv}^2})/2. \quad (2.29)$$

## 2.7. Пояснения к таблицам геометрических характеристик прокатных профилей

Для строительных конструкций широко применяются прокатные профили. По очертанию они настолько сложны, что вычисление геометрических характеристик для них описанными выше способами практически невозможно. Поэтому для прокатных профилей составлены специальные таблицы. Наиболее распространенные из таблиц включены в приложения<sup>1</sup>.

В них приведены

- поясняющие рисунки;
- необходимые размеры;
- площади сечений;
- расстояния, определяющие положения центров тяжести;
- моменты инерции относительно различных осей;
- обозначения;
- размерности.

Кроме геометрических характеристик, рассматриваемых в настоящем разделе, таблицы содержат и другие величины, применяемые в курсе сопротивления материалов.

Для двутавров и швеллеров приведены такие величины как  $W_x$ ,  $i_x$ ,  $S_x$ ,  $W_y$  и  $i_y$ . Они будут использоваться в последующих разделах курса. Там же будут даны необходимые пояснения к ним.

Для равнобоких уголков в силу симметрии сечения даны лишь

- одна координата центра тяжести сечения;
- моменты инерции  $J_x$  и  $J_{x'}$ .

Они равны соответствующим величинам, связанным с вертикальной осью.

<sup>1</sup> Таблицы приведены с сокращениями. В них не включены характеристики, которые в сопротивлении материалов используются редко или не используются вообще. В таблицах сохранены стандартные обозначения, отличающиеся от используемых здесь.

Наличие таблиц, содержащих необходимые геометрические характеристики, позволяет рассматривать прокатные профили как "простые" фигуры, для которых требуемые в расчетах величины известны.

В заключение отметим, что со временем нормативы на прокатные профили пересматриваются, составляются новые таблицы. Поэтому возможно несовпадение значений, приведенных ниже, с содержащимися в других источниках.

## 2.8. Примеры определения положения главных центральных осей и величин главных моментов инерции

Находить положение главных центральных осей и величины главных моментов инерции приходится во многих задачах сопротивления материалов. С целью иллюстрации решения подобных задач приведем примеры.

### 2.8.1. Симметричные фигуры

**Пример 2.1.** Найдем положение главных центральных осей и величины главных моментов инерции фигуры, изображенной на рис. 2.13.

Фигура имеет две оси симметрии —  $x$  и  $y$ . Они и являются главными центральными осями.

Заданная фигура имеет сложное очертание, но составлена из двух простых частей — прямоугольника и круга. Поэтому искомые моменты инерции найдем как разности:  $J_x = J_x^1 - J_x^2$ ,  $J_y = J_y^1 - J_y^2$  (верхний индекс 1 относится к прямоугольнику, 2 — к кругу).

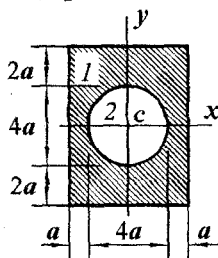


Рис. 2.13

Для вычисления моментов инерции названных частей относительно осей  $x$  и  $y$  воспользуемся формулами (2.11), (2.12) и (2.16), приняв в них  $b = 6a$ ,  $h = 8a$ ;  $D = 4a$ . Итак,

$$J_x^1 = 6a(8a)^3/12 = 256a^4, \quad J_y^1 = 8a(6a)^3/12 = 144a^4;$$

$$J_x^2 = J_y^2 = \pi(4a)^4/64 = 12,6a^4.$$

Главные моменты инерции

$$J_x = J_x^1 - J_x^2 = 256a^4 - 12,6a^4 = 243,4a^4;$$

$$J_y = J_y^1 - J_y^2 = 144a^4 - 12,6a^4 = 131,4a^4.$$

**Пример 2.2.** Найдем положение главных центральных осей и величины главных моментов инерции фигуры, показанной на рис. 2.14.

Поскольку фигура симметрична, центр тяжести лежит на оси  $x$ .

Определим координату центра тяжести в системе  $xu^0$ . Для этого разделим фигуру на две части: 1 – прямоугольник и 2 – треугольник и воспользуемся формулой из (2.10), которая при двух составляющих принимает вид  $x_c^0 = (A_1 x_1^0 + A_2 x_2^0) / (A_1 + A_2)$ . В ней  $A_1 = 12 \text{ см}^2$ ,  $x_1^0 = -1,5 \text{ см}$ ;  $A_2 = 6 \text{ см}^2$ ,  $x_2^0 = 1 \text{ см}$ . Теперь

$$x_c^0 = (A_1 x_1^0 + A_2 x_2^0) / (A_1 + A_2) = (12(-1,5) + 6 \cdot 1) / (12 + 6) = -0,67 \text{ см}.$$

Главные центральные оси фигуры – ось симметрии  $x$  и центральная ось  $y$ .

Вычислим вначале момент инерции  $J_x$ . Так как фигура состоит из двух частей, то  $J_x = J_x^1 + J_x^2$ . По формуле (2.11)  $J_x^1 = 3 \cdot 4^3 / 12 = 16 \text{ см}^4$ . У треугольника  $J_x^2 = 3 \cdot 4^3 / 48 = 4 \text{ см}^4$  (ось  $x$  является осью симметрии равнобедренного треугольника, поэтому используем формулу (2.14)). Суммируя, получаем  $J_x = J_x^1 + J_x^2 = 16 + 4 = 20 \text{ см}^4$ .

Момент инерции  $J_y$ . Он также равен сумме:  $J_y = J_y^1 + J_y^2$ . Но главная центральная ось фигуры  $y$  и для прямоугольника, и для треугольника является осью общего положения. Готовой формулы для вычисления составляющих моментов инерции нет. Поэтому проведем главные центральные оси прямоугольника  $y^1$  и треугольника  $y^2$  и воспользуемся формулой (2.21), которую применительно к используемым в задаче обозначениям запишем так: для прямоугольника  $J_{y^1}^1 = J_{y^1}^1 + (x_1^0 - x_c^0)^2 A_1$ ; для треугольника  $J_{y^2}^2 = J_{y^2}^2 + (x_2^0 - x_c^0)^2 A_2$ .

Первые слагаемые в записанных формулах – моменты инерции составляющих фигур относительно собственных центральных осей:  $J_{y^1}^1 = 4 \cdot 3^3 / 12 = 9 \text{ см}^4$  (форм. (2.12));  $J_{y^2}^2 = 4 \cdot 3^3 / 36 = 3 \text{ см}^4$  ((2.13), т.к. ось  $y^2$  – центральная и параллельная стороне треугольника).

Вторые слагаемые – изменения моментов инерции при переходе от центральных осей к нецентральному, равные произведениям площадей составляющих фигур на квадраты расстояний от оси  $y$  до осей  $y^1$  и  $y^2$  соответственно. Теперь

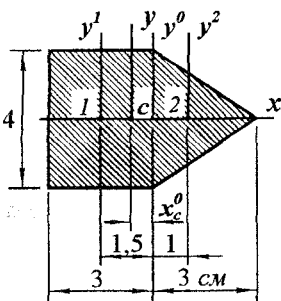


Рис. 2.14

$$J_y^1 = J_{y_1}^1 + (x_1^0 - x_c^0)^2 A_1 = 9 + (-1,5 - (-0,67))^2 12 = 17,3 \text{ см}^4;$$

$$J_y^2 = J_{y_2}^2 + (x_2^0 - x_c^0)^2 A_2 = 3 + (1 - (-0,67))^2 6 = 19,7 \text{ см}^4.$$

В итоге  $J_y = J_y^1 + J_y^2 = 17,3 + 19,7 = 37 \text{ см}^4.$

**Пример 2.3.** Найдем положение главных центральных осей и величины главных моментов инерции симметричного сечения, состоящего из прокатного двутавра № 12 и швеллера № 16а (рис. 2.15).

Ось симметрии  $y$  – главная центральная. Вторую ось найдем, определив положение центра тяжести  $c$ .

Проведем вспомогательную ось  $x^0$ . По таблицам сортамента (см. табл. 1 и 2 приложения) находим

$$A_1 = 14,7 \text{ см}^2, y_1^0 = -6 \text{ см};$$

$$A_2 = 19,5 \text{ см}^2, y_2^0 = 2 \text{ см}.$$

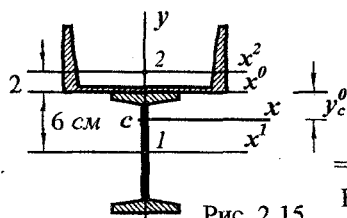


Рис. 2.15

Ордината точки  $c$

$$y_c^0 = (A_1 y_1^0 + A_2 y_2^0) / (A_1 + A_2) =$$

$$= (14,7(-6) + 19,5 \cdot 2) / (14,7 + 19,5) = -1,44 \text{ см}.$$

Вторая главная центральная ось – ось  $x$ .

Главные моменты инерции.

Момент  $J_x = J_x^1 + J_x^2$ . Поскольку ось  $x$  не является центральной ни для швеллера, ни для двутавра, то

$$J_x^1 = J_{x_1}^1 + (y_1^0 - y_c^0)^2 A_1, J_x^2 = J_{x_2}^2 + (y_2^0 - y_c^0)^2 A_2,$$

где  $J_{x_1}^1$  и  $J_{x_2}^2$  – соответственно моменты инерции двутавра и швеллера относительно центральных осей  $x^1$  и  $x^2$ . По тем же таблицам находим  $J_{x_1}^1 = 350 \text{ см}^4$ , и  $J_{x_2}^2 = 78,8 \text{ см}^4$  (в табл. 2 это число расположено в колонке, соответствующей  $J_y$ , так как "табличная" ось  $y$  занимает в швеллере такое же положение, что и ось  $x^2$  в рассматриваемом примере). Теперь

$$J_x = J_{x_1}^1 + (y_1^0 - y_c^0)^2 A_1 + J_{x_2}^2 + (y_2^0 - y_c^0)^2 A_2 =$$

$$= 350 + (-6 - (-1,44))^2 14,7 + 78,8 + (2 - (-1,44))^2 19,5 = 966 \text{ см}^4.$$

Момент инерции  $J_y = J_y^1 + J_y^2$ . Ось  $y$  – главная центральная и для двутавра, и для швеллера, и для всего сечения. Поэтому согласно таблицам  $J_y^1 = 27,9 \text{ см}^4$ ,  $J_y^2 = 823 \text{ см}^4$ . Итак,

$$J_y = J_y^1 + J_y^2 = 27,9 + 823 = 851 \text{ см}^4.$$



## 2.8.2. Составная фигура общего очертания

**Пример 2.4.** Найдем положение главных центральных осей и величины главных моментов инерции сечения, составленного из прокатных швеллера № 20 и равнобокого уголка 250·30 (рис. 2.16).

Найдем положение центра тяжести  $c$ .

Введем оси  $u^0$  и  $v^0$ .

Координаты точки  $c$ :

$$u_c^0 = (A_1 u_1^0 + A_2 u_2^0) / (A_1 + A_2),$$

$$v_c^0 = (A_1 v_1^0 + A_2 v_2^0) / (A_1 + A_2).$$

По табл. 2 и 3 находим:

$$u_1^0 = -10 \text{ см},$$

$$v_1^0 = 2,07 \text{ см},$$

$$A_1 = 23,4 \text{ см}^2;$$

$$u_2^0 = v_2^0 = 7,31 \text{ см},$$

$$A_2 = 142 \text{ см}^2.$$

Теперь

$$u_c^0 = (A_1 u_1^0 + A_2 u_2^0) / (A_1 + A_2) =$$

$$= (23,4(-10) + 142 \cdot 7,31) / (23,4 + 142) = 4,86 \text{ см};$$

$$v_c^0 = (A_1 v_1^0 + A_2 v_2^0) / (A_1 + A_2) =$$

$$= (23,4 \cdot 2,07 + 142 \cdot 7,31) / (23,4 + 142) = 6,57 \text{ см}.$$

Через центр тяжести сечения проведем оси  $u$  и  $v$ .

Осевые моменты инерции.

Проведем центральные оси швеллера  $u^1, v^1$  и уголка  $u^2, v^2$ .

$$J_u = J_u^1 + J_u^2 = J_{u^1}^1 + (v_1^0 - v_c^0)^2 A_1 + J_{u^2}^2 + (v_2^0 - v_c^0)^2 A_2.$$

По табл. 2 и 3  $J_{u^1}^1 = 113 \text{ см}^4, J_{u^2}^2 = 8177 \text{ см}^4$ . Теперь

$$J_u = 113 + (2,07 - 6,57)^2 23,4 + 8177 + (7,31 - 6,57)^2 142 = 8842 \text{ см}^4.$$

Второй осевой момент инерции

$$J_v = J_v^1 + J_v^2 = J_{v^1}^1 + (u_1^0 - u_c^0)^2 A_1 + J_{v^2}^2 + (u_2^0 - u_c^0)^2 A_2.$$

Из тех же таблиц  $J_{v^1}^1 = 1520 \text{ см}^4, J_{v^2}^2 = 8177 \text{ см}^4$ , так что

$$J_v = 1520 + (-10 - 4,86)^2 23,4 + 8177 + (7,31 - 4,86)^2 142 = 15720 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции  $J_{uv} = J_{uv}^1 + J_{uv}^2$ . В соответствии с равенством (2.22) и приведенной там же формулировкой

$$J_{uv}^1 = J_{u^1 v^1}^1 + (u_1^0 - u_c^0)(v_1^0 - v_c^0) A_1.$$

Так как оси  $u^1$  и  $v^1$  являются главными центральными осями швеллера (фигура симметричная),  $J_{u^1 v^1}^1 = 0$ .

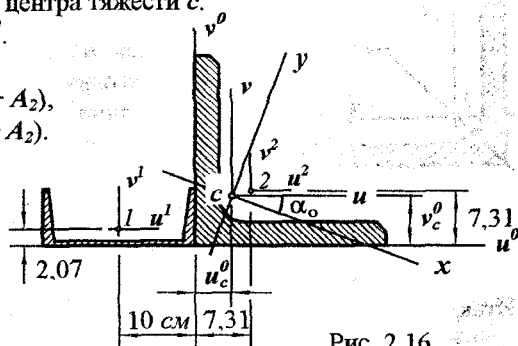


Рис. 2.16

У уголка также  $J_{uv}^2 = J_{u^2v^2} + (u_2^0 - u_c^0)(v_2^0 - v_c^0)A_2$ . Но  $J_{u^2v^2} \neq 0$ , поскольку оси  $u^2$  и  $v^2$  не являются главными для уголка. В таблице 3 центробежного момента инерции уголка нет. Поэтому определение  $J_{u^2v^2}$  выливается в самостоятельную задачу.

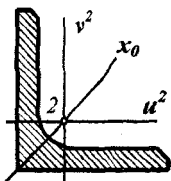


Рис. 2.17

Изобразим уголок отдельно (рис. 2.17).

Кроме осей  $u^2$  и  $v^2$  проведем главную центральную ось уголка  $x_0$ .

В соответствии с формулой (2.23) и фигурирующими в примере обозначениями

$$J_{x_0}^2 = J_{u^2}^2 \cos^2 \alpha + J_{v^2}^2 \sin^2 \alpha - J_{u^2v^2} \sin 2\alpha.$$

Здесь  $J_{x_0}^2 = 12965 \text{ см}^4$ ,  $J_{u^2}^2 = J_{v^2}^2 = 8177 \text{ см}^4$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .

Подставляя числовые значения, имеем  $12965 = 8177 \cos^2 45 + 8177 \sin^2 45 - J_{u^2v^2} \sin(2 \cdot 45)$ , откуда  $J_{u^2v^2} = -4788 \text{ см}^4$ .

Итак,

$$\begin{aligned} J_{uv} &= J_{uv}^1 + J_{uv}^2 = \\ &= J_{u^1v^1} + (u_1^0 - u_c^0)(v_1^0 - v_c^0)A_1 + J_{u^2v^2} + (u_2^0 - u_c^0)(v_2^0 - v_c^0)A_2 = \\ &= 0 + (-10 - 4,86)(2,07 - 6,57)23,4 - \\ &= -4788 + (7,31 - 4,86)(7,31 - 6,57)142 = -2966 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Угол  $\alpha_0$ , на который нужно повернуть оси  $u$  и  $v$ , чтобы они, оставаясь центральными, стали главными, найдем по формуле (2.26):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2J_{uv} / (J_v - J_u) = 2(-2966) / (15720 - 8842) = -0,862; \alpha_0 = -20,4^\circ.$$

Главные центральные оси, повернутые к  $u$  и  $v$  по ходу часовой стрелки, обозначим  $x$  и  $y$ .

Главные моменты инерции.

В соответствии с формулой (2.29)

$$\begin{aligned} J_{\max(\min)} &= (J_u + J_v \pm \sqrt{(J_u - J_v)^2 + 4J_{uv}^2}) / 2 = \\ &= (8842 + 15720 \pm \sqrt{(8842 - 15720)^2 + 4 \cdot 2966^2}) / 2 = 16820 \text{ (7739) см}^4. \end{aligned}$$

Поскольку центробежный момент инерции  $J_{uv}$  отрицателен, главный момент  $J_y = J_{\max}$  ( $y$  — первая ось при положительном отсчете угла  $\alpha$ ), а  $J_x = J_{\min}$ .

Итак,  $J_x = 7739 \text{ см}^4$ ,  $J_y = 16820 \text{ см}^4$ .

Вычисление геометрических характеристик поперечных сечений стержней является, как правило, одним из этапов задачи прочности, жесткости или устойчивости стержня. Поэтому важно усвоить этот материал и развить прочные расчетные навыки.

### 3. Внутренние силы. Внутренние силовые факторы

#### 3.1. Внешние и внутренние силы

В сопротивлении материалов, как и во многих других разделах механики, силы подразделяют на внешние и внутренние. Поскольку рассматриваемые ниже силы могут фигурировать как в том, так и в другом ранге, остановимся на признаках их подразделения.

С философской точки зрения силы являются мерой механического взаимодействия объектов единой системы и поэтому они всегда внутренние. Однако в задачах анализа обычно фигурирует конкретный элемент системы. Его мысленно выделяют. Но для сохранения условий существования анализируемого объекта воспроизводят влияние на него со стороны отброшенной части системы. Это влияние и представляет собою внешнее воздействие.

В соответствии с отмеченным *внешними называются силы действия отброшенных тел на рассматриваемое.*

*Силы же взаимодействия разных частей одного тела являются внутренними.*

Выделим из конструкции стержневой элемент (рис. 3.1). Действие отброшенных частей конструкции заменим силами (на рисунке — это  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$ ). Показанные силы — внешние для рассматриваемого стержня.

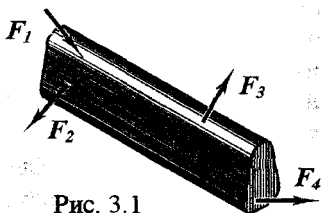


Рис. 3.1

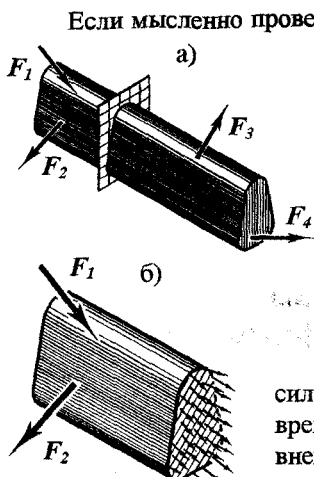


Рис. 3.2

Если мысленно провести сечение в стержне (рис. 3.2 а), силы взаимодействия в нем являются внутренними. В то же время, если отбросить часть стержня (например, правую) и заменить действие на оставшуюся часть силами (рис. 3.2 б), последние перейдут в категорию внешних. Таким образом, силы, действующие в сечении, являются внутренними для стержня и внешними для его части, ограниченной этим сечением.

В дальнейшем возникающие в сечении силы будем называть внутренними и в то же время на рисунках изображать их в виде внешних.

### 3.2. Понятия напряжений и напряженного состояния

Внутренние силы в сечении стержня действуют в каждой точке. Они распределены по сечению. Введем количественную меру внутренних сил.

Выделим в произвольной точке сечения малую площадку  $\Delta A$  (рис. 3.3 а). Равнодействующую сил, возникающих в ней, обозначим  $\Delta F$ . Средняя интенсивность внутренних сил в рассматриваемой площадке равна отношению  $\Delta F / \Delta A$ . Стянув площадку в точку, получим истинное значение интенсивности:  $\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta F / \Delta A = p$ ;  $p$  носит название *напряжения*.

В сопротивлении материалов *количественной мерой интенсивности внутренних сил в точке является напряжение*.

Поскольку направление напряжения  $p$  может быть произвольным, его обычно заменяют составляющими  $\sigma$  и  $\tau$ . Перпендикулярную сечению часть полного напряжения  $\sigma$  называют *нормальным напряжением* и отмечают индексом  $z$ , соответствующим параллельной оси (нормали к площадке). Лежащую в плоскости сечения составляющую полного напряжения обычно обозначают буквой  $\tau$  с тем же индексом и называют *касательным напряжением*.

Касательное напряжение  $\tau_z$  также может быть разложено на составляющие  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{zy}$ , параллельные координатным осям (рис. 3.3 б). Второй индекс у напряжения соответствует параллельной оси.

Размерность напряжений –  $H/M^2$  (Па) и т.п.

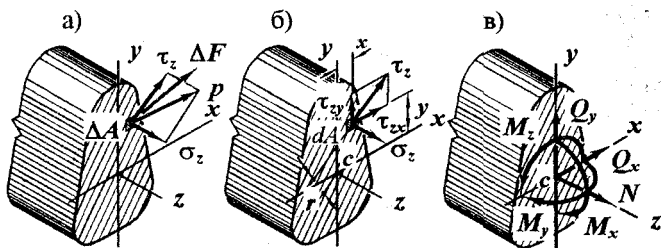


Рис. 3.3

Величины напряжений зависят не только от положения точки, но и от ориентации в пространстве проведенного через нее сечения. Важнейшим в сопротивлении материалов является понятие *напряженного состояния*. *Напряженное состояние в точке характеризуется совокупностью напряжений, действующих во всевозможных площадках, проходящих через данную точку*. Ниже будут введены методы оценки и количественные характеристики напряженного состояния.

### 3.3. Обобщенные силы в сечении.

#### Внутренние силовые факторы

##### 3.3.1. Понятия и термины

Распределенные по сечению силы образуют пространственную систему и приводятся к статически эквивалентным им главному вектору и главному моменту – обобщенным усилиям. Эти усилия могут быть представлены составляющими, связанными с координатными осями (рис. 3.3 в). В сопротивлении материалов, характеризуя усилия в стержне, обычно рассматривают поперечные сечения, а обобщенные усилия представляют в главной координатной системе, где оси  $x$  и  $y$  – главные центральные оси поперечного сечения (естественно, в этом случае  $z$  является продольной осью).

Проекции главного вектора и главного момента внутренних сил, возникающих в поперечном сечении, на главные координатные оси называются *внутренними силовыми факторами*.

Итак, количественной мерой внутренних сил, возникающих в поперечном сечении, являются внутренние силовые факторы. Обозначения и термины для них:

$N$  – продольная сила (иногда ее называют нормальной силой);

$Q_x$  и  $Q_y$  – поперечные (перерезывающие) силы;

$M_z$  – крутящий момент;

$M_x$  и  $M_y$  – изгибающие моменты.

Выбранный способ разложения главного вектора и главного момента позволяет выделить их составляющие, связанные с простейшими видами нагружения:  $N$  – осевым растяжением или сжатием;  $Q_x$  и  $Q_y$  – срезом (этот вид еще называют сдвигом и скальванием);  $M_z$  – кручением;  $M_x$  и  $M_y$  – изгибом.

Поскольку напряжения и обобщенные силы являются мерами одной и той же системы сил, между ними существует связь. Для внутренних силовых факторов эта связь выглядит так:

$$N = \int_A \sigma_z dA, \quad Q_x = \int_A \tau_{zx} dA, \quad Q_y = \int_A \tau_{zy} dA;$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA, \quad M_y = \int_A \sigma_z x dA, \quad M_z = \int_A \tau r dA \quad \text{или} \quad M_z = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA. \quad (3.1)$$

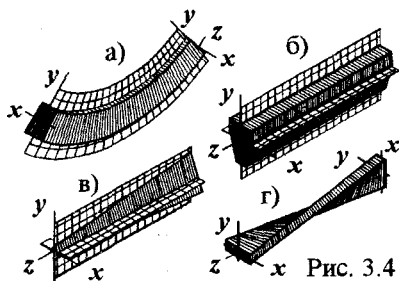
Подынтегральные выражения в равенствах (3.1) представляют собой элементарные внутренние усилия. Так,  $\sigma_z dA$ ,  $\tau_{zx} dA$ ,  $\tau_{zy} dA$ , являются элементарными продольной и поперечными силами;  $\sigma_z y dA$ ,  $\sigma_z x dA$ ,  $\tau r dA$  – элементарные изгибающие и крутящий моменты, а  $\tau_{zy} x dA$  и  $\tau_{zx} y dA$  – элементарные моменты относительно оси  $z$  вертикальной и горизонтальной составляющих касательного напряжения.

При известных напряжениях по формулам (3.1) можно найти внутренние силовые факторы. Однако решить обратную задачу – определить из равенств (3.1) напряжения по внутренним силовым факторам – нельзя. В этом случае нужно знать, как распределены напряжения по сечению.

### 3.3.2. Геометрические представители стержня в расчетной схеме

Геометрическими характеристиками стержня являются длина, очертание оси, форма, размеры и ориентация поперечных сечений. В зависимости от них различают стержни постоянного (рис. 3.4 а, б, г) и переменного (рис. 3.4 в) сечения, прямые (рис. 3.4 б, в, г) и кривые (рис. 3.4 а), выделяют естественно закрученные стержни (рис. 3.4 г).

Введем понятие **главной плоскости стержня** — плоскости, образованной совокупностью одноименных главных центральных осей. Стержень, изображенный на рис. 3.4 а, имеет одну главную плоскость, на 3.4 б, в — по две, у естественно закрученного стержня (рис. 3.4 г) главных плоскостей нет.



При изображении расчетной схемы, будем, как правило, указывать лишь ось стержня и, если особо не оговаривается, подразумевать, что главная его плоскость совпадает с плоскостью чертежа.

### 3.3.3. Метод сечений

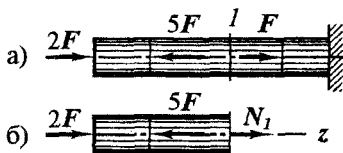
Определение величин и направлений внутренних силовых факторов производится из условий равновесия части стержня. Такой метод носит название **метода сечений**. Он позволяет перевести внутренние силовые факторы в категорию внешних и, подчинив условиям равновесия, определить их величины и направления.

Метод сечений включает следующие действия:

- поперечной плоскостью разрезают стержень в том месте, где требуется найти внутренние силовые факторы;
- отбрасывают одну часть стержня;
- действие отброшенной части на оставленную заменяют силами — внутренними силовыми факторами;
- из условий равновесия рассматриваемой части стержня находят величины и направления внутренних силовых факторов.

Рассмотрим примеры.

**Пример 3.1.** Определим внутренние силовые факторы и установим вид нагружения стержня (рис. 3.5 а) в сечении  $l$ .



Используем метод сечений.

Разрежем стержень поперечной плоскостью  $l$ .

Рис. 3.5

Отбросим правую часть (вообще, можно отбрасывать любую из двух, но здесь правая часть несвободна, поэтому отбрасываем ее).

Действие правой части на левую заменим силами. Так как линии действия сил совпадают с осью стержня, в сечении  $l$  возникнет лишь продольная сила (рис. 3.5 б). Направим ее вправо.

Запишем условие равновесия<sup>1</sup>:  $\Sigma Z = 0$ :  $2F - 5F + N_l = 0$ ,  $\Rightarrow N_l = 3F$ . Положительный результат подтверждает правильность выбранного направления силы  $N_l$ .

Итак, в сечении  $l$  стержень растянут силой  $3F$ .

**Пример 3.2.** Определим величину и направление крутящего

момента в сечении  $l$  стержня, подверженного сосредоточенным и распределенным моментам, действующим вокруг оси  $z$  (рис. 3.6 а).

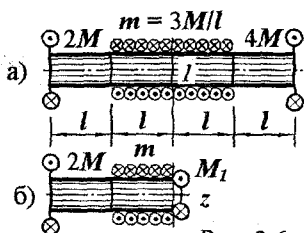


Рис. 3.6

Выполнив первые три операции метода сечений, приходим к рис. 3.6 б. Из условия  $\Sigma M_z = 0$  имеем  $2M - m \cdot l + M_l = 0$ ,  $\Rightarrow M_l = 3M - 2M = M$ . Момент  $M_l$  направлен как показано на рисунке.

**Пример 3.3.** Найдем величины и направления поперечной силы и изгибающего момента в сечении  $l$  балки, показанной на рис. 3.7 а.

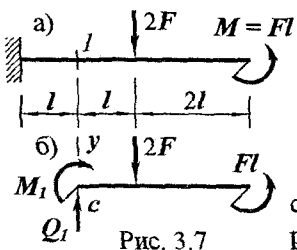


Рис. 3.7

Разрезав балку сечением  $l$ , отбросив левую часть и приложив силу  $Q_l$  и момент  $M_l$  (рис. 3.7 б), записываем условия равновесия:  $\Sigma Y = Q_l - 2F = 0$ ,  $\Rightarrow Q_l = 2F$ .  $\Sigma M_c = M_l + 2F \cdot l - Fl = 0$ ,  $\Rightarrow M_l = -Fl$ .

Направление силы  $Q_l$  совпадает с действительным; момент  $M_l$  направлен в сторону, обратную показанной на рис. 3.7 б.

**Пример 3.4.** Найдем внутренние силовые факторы в сечении  $l$  плоской рамы (рис. 3.8 а).

Разрезав раму, отбрасываем правую часть, заменяем ее действие силами  $N_l$ ,  $Q_l$ ,  $M_l$ , составляем и решаем уравнения равновесия:

<sup>1</sup> При записи уравнений равновесия нет необходимости вводить правила знаков проекций сил, связанные с направлением осей. Проекции разных направлений будем включать в уравнения с разными знаками. Так же будем поступать и при суммировании моментов.



$$\Sigma Z = N_1 + q \cdot 2l = 0, \Rightarrow N_1 = -2ql; \Sigma Y = Q_1 + ql = 0, \Rightarrow Q_1 = -ql;$$

$$\Sigma M_c = M_1 + q \cdot 2l \cdot l - ql \cdot l = 0, \Rightarrow M_1 = -ql^2.$$

Выбранные направления  $N_1$ ,  $Q_1$  и  $M_1$  оказались ошибочными. Действительные силы направлены в стороны, обратные показанным на рис. 3.8 б.

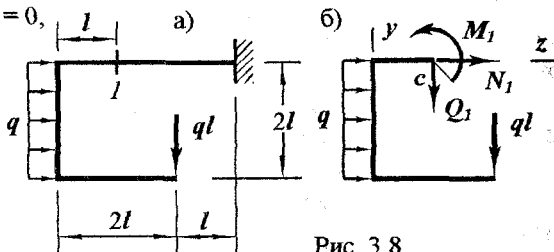


Рис. 3.8

**Пример 3.5.** Определим внутренние силовые факторы в сечении  $l$  пространственной рамы, показанной на рис. 3.9 а.

Часть рамы, рассматриваемая в равновесии, изображена на рис. 3.9 б.

Система действующих на нее сил – произвольная пространственная. Соответствующие этой системе уравнения статики и их решения:

$$\Sigma X = ql - Q_x = 0, \Rightarrow Q_x = ql.$$

$$\Sigma Y = Q_y = 0.$$

$$\Sigma Z = N + q \cdot 4l = 0, \Rightarrow N = -4ql.$$

$$\Sigma M_x = M_x + q \cdot 4l \cdot 2l = 0, \Rightarrow M_x = -8ql^2.$$

$$\Sigma M_y = M_y + q \cdot 4l \cdot 3l - ql \cdot 2l = 0, \Rightarrow M_y = -10ql^2.$$

$$\Sigma M_z = M_z + ql \cdot 4l = 0, \Rightarrow M_z = -4ql^2.$$

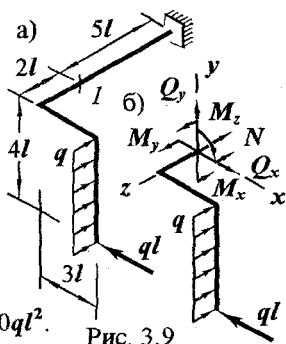


Рис. 3.9

Отрицательные знаки у  $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$  указывают на ошибочность принятых направлений этих внутренних силовых факторов. Действительные их направления противоположны изображенным на рисунке.

Приведенные примеры проиллюстрировали технику определения величин и направлений внутренних силовых факторов в конкретных сечениях. Эти же действия лежат в основе решения более сложных задач – анализа распределения обобщенных сил в конструкции.

### 3.4. Эпюры внутренних силовых факторов

При расчетах конструкций часто приходится строить графики, показывающие зависимость внутренних силовых факторов от положения сечения. Такие графики называют эпюрами.

В отличие от обычных графиков изображение эпюр сопровождается некоторыми особенностями:

- нулевая линия эпюры повторяет очертание оси стержня;
- ординаты эпюры откладываются перпендикулярно оси в местах расположения соответствующих сечений;
- изображение и обозначение координатных осей, в которых строится эпюра, как правило, опускается;
- ординаты эпюры откладываются согласно правилу знаков;
- при необходимости на эпюре ставят знак, определяющий направление внутреннего силового фактора;
- из декоративных соображений на эпюру наносят штриховку.

Для построения эпюры могут быть использованы разные приемы построения графиков. На начальном этапе освоения этой темы воспользуемся простейшим способом, опирающимся на

- понятие внутреннего силового фактора;
- правило знаков для него;
- метод сечений;
- аппарат элементарной алгебры.

При решении задач будем выполнять такие действия:

- 1) Определение опорных реакций (при необходимости<sup>1</sup>).
- 2) Деление конструкции на участки в зависимости от ее геометрической схемы и вида внешней нагрузки.
- 3) Построение эпюры внутреннего силового фактора на участке:
  - выбор сечения произвольного положения;
  - определение величины и направления (знака) внутреннего силового фактора с помощью метода сечений;
  - графическое оформление эпюры.

<sup>1</sup> Так как при определении величины внутреннего силового фактора достаточно знать внешние силы, приложенные только с одной стороны от сечения, некоторые опорные реакции можно не находить. Более того, иногда вообще отпадает необходимость в определении опорных реакций (см. приведенные выше примеры).

### 3.4.1. Продольные силы

Если линии действия внешних сил, приложенных к стержню, совпадают с его осью (рис. 3.10), в поперечных сечениях возникают только продольные силы.



Рис. 3.10

**Правило знаков:**

Продольную силу будем считать

– положительной, если она направлена от сечения (растягивающая) (рис. 3.11а),

– отрицательной, если к сечению (сжимающая) (рис. 3.11б).

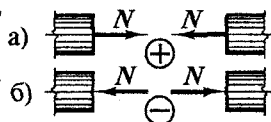


Рис. 3.11

**Пример 3.6.** Построим эпюру силы  $N$  в стержне, показанном на рис. 3.12а.

На стержне два участка.

Левый участок ( $0 < z < 2l$ ).

Рассечем стержень поперечной плоскостью  $I$  произвольного положения.

Отбросим правую часть.

Действие правой части на левую заменим силой  $N(z)$ , предположив, ее растягивающей<sup>1</sup> (рис. 3.12 б).

Из условия равновесия левого отрезка стержня следует  $3F - N(z) = 0$ ,  $\Rightarrow N(z) = 3F$ . Сила постоянна.

Правый участок ( $2l < z < 5l$ ).

Действуя аналогично (рис. 3.12 в), имеем  $3F - 5F - N(z) = 0$ ,  $\Rightarrow N(z) = -2F$  – постоянна.

Итак, на левом участке стержень растянут силой  $3F$ , на правом сжат силой  $2F$ . Эпюра  $N$  изображена на рис. 3.12 г.

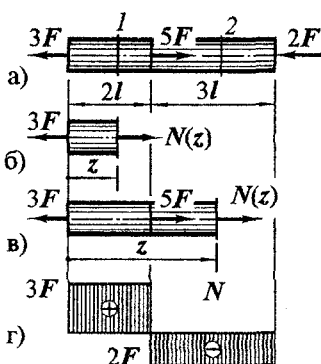


Рис. 3.12

<sup>1</sup> Предварительное направление силы можно выбрать любым. Но так как в сопротивлении материалов введены правила знаков, связанные с видом нагружения, целесообразно задаваться положительным направлением  $N$ . Если оно окажется ошибочным, из условия равновесия сила  $N$  получится отрицательной. При таком выборе удастся избежать дополнительного анализа, связанного с переходом от знака решения уравнения равновесия к знаку, соответствующему введенному правилу для  $N$ . Аналогично будем поступать при определении и других внутренних силовых факторов.

**Пример 3.7.** Построим эпюру продольной силы, учитывая собственный вес стержня (рис. 3.13 а).  $A$  – площадь поперечного сечения;  $\rho$  – плотность материала.

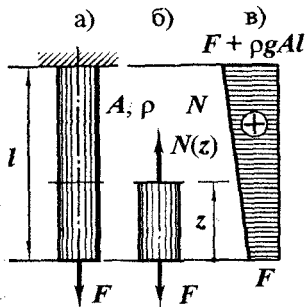


Рис. 3.13

Из условия равновесия следует:  
 $N(z) - \rho g A \cdot z - F = 0, \Rightarrow N(z) = F + \rho g A z$ .  
 Сила  $N$  линейно переменна. При  $z = 0$  ее значение  $N(0) = F$ ; если же  $z = l$ , то  $N(l) = F + \rho g A l$ .

Эпора продольной силы изображена на рис. 3.13 в.

### 3.4.2. Крутящие моменты

С построением эпюр крутящих моментов познакомимся на простейших схемах, когда стержень нагружен моментами, действующими в плоскостях, перпендикулярных продольной оси (рис. 3.14).

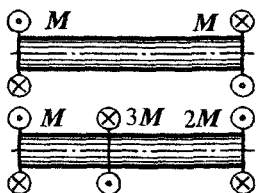


Рис. 3.14

При таких нагрузках в поперечных сечениях возникают только крутящие моменты.

**Правило знаков:** Внутренний крутящий момент будем считать

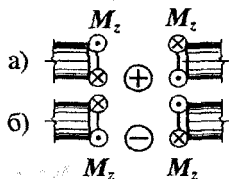


Рис. 3.15

– положительным, если он направлен против хода часовой стрелки (рис. 3.15 а);  
 – отрицательным, если – по ходу часовой стрелки (рис. 3.15 б).

При определении знака крутящего момента следует смотреть на сечение со стороны отброшенной части стержня.

Рассмотрим пример.

**Пример 3.8.** Построим эпюру крутящего момента для стержня, показанного на рис. 3.16а.

На стержне два участка.

Левый участок (рис. 3.16 б;  $0 < z < 3l$ ).

Согласно методу сечений разрезаем стержень поперечной плоскостью  $l$ , отбрасываем правую часть и заменяем ее действие крутящим моментом, полагая, что он положителен<sup>1</sup>. Из условия равновесия  $M + M_z(z) = 0$  устанавливаем, что  $M_z(z) = -M$ .

Правый участок (рис. 3.16 в;  $3l < z < 5l$ ).

Для этого участка  $M - 3M + M_z(z) = 0$ ,  
 $\Rightarrow M_z(z) = 2M$ .

На обоих участках моменты постоянны. Эпюра крутящего момента изображена на рис. 3.16 г.

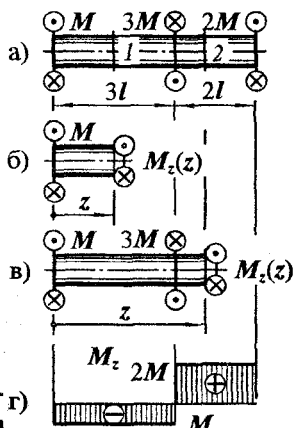


Рис. 3.16

### 3.4.3. Внутренние силовые факторы в балках

*Балкой* будем называть стержень, работающий на изгиб. Ограничимся рассмотрением балок, у которых имеются главные плоскости (рис. 3.17 а). Кроме того, из всего многообразия внешних нагрузок ограничимся такими, которые лежат в одной из главных плоскостей и не содержат продольных сил. В таких случаях из шести возможных внутренних силовых факторов в сечении балки отличными от нуля могут быть только два – поперечная сила и изгибающий момент, лежащие в плоскости нагружения ( $Q_y$  и  $M_x$  на рис. 3.17 б).

Отсутствие в сечении одноименных внутренних силовых факторов позволяет отказаться от индексов, определяющих плоскость действия поперечной силы и изгибающего момента.

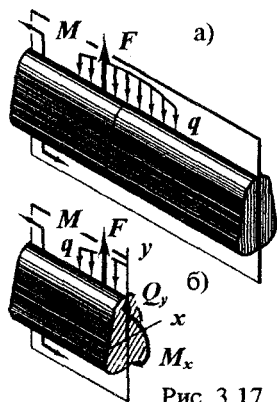


Рис. 3.17

<sup>1</sup> Здесь также будем задаваться положительным крутящим моментом, чтобы избежать процедуры определения его знака после решения уравнения равновесия.

### Правила знаков.

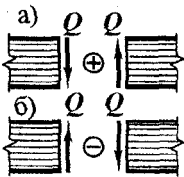


Рис. 3.18

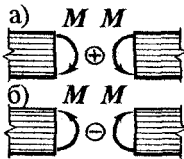


Рис. 3.19

#### Правило знаков для поперечной силы.

Поперечную силу будем считать

- положительной, если на левую часть балки она действует вниз, а на правую вверх (рис. 3.18 а),
- отрицательной, если на левую часть балки она действует вверх, а на правую вниз (рис. 3.18 б).

#### Правило знаков для изгибающего момента.

Изгибающий момент будем считать

- положительным, если он растягивает верхние волокна балки (рис. 3.19 а),
- отрицательным, если у балки растянуты нижние волокна<sup>1</sup> (рис. 3.19 б).

### 3.4.3.1. Дифференциальные зависимости при изгибе

Балка и каждый ее элемент находятся в равновесии. Из равновесия элемента вытекают зависимости между усилиями, действующими на него. Выделим из балки (рис. 3.20 а) элементарный отрезок (рис. 3.20 б). Внешние силы, приложенные к нему,

- распределенная нагрузка интенсивности  $q_y(z)$  (отрезок  $dz$  бесконечно мал, поэтому интенсивность можно считать постоянной);
- поперечные силы  $Q_y(z)$  слева,  $Q_y(z) + dQ_y(z)$  справа;
- изгибающие моменты  $M_x(z)$  слева,  $M_x(z) + dM_x(z)$  справа.

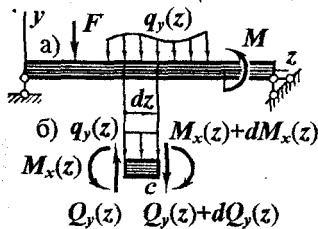


Рис. 3.20

Равновесие сил означает, что

$$\Sigma Y = Q_y(z) - q_y(z) dz - (Q_y(z) + dQ_y(z)) = 0.$$

Отсюда после приведения подобных членов и деления на  $dz$  следует

$$dQ_y(z)/dz = -q_y(z). \quad (3.2)$$

Производная поперечной силы равна интенсивности распределенной нагрузки, взятой с обратным знаком

<sup>1</sup> В учебной литературе по сопротивлению материалов и строительной механике (для студентов строительной специальности) обычно используют обратное правило знаков. При этом, строя эпюру моментов, положительные ординаты откладывают вниз. Введенное здесь правило исключает отмеченную аномалию, не изменяя очертания эпюры.

Второе условие равновесия:

$$\Sigma M_c = M_x(z) - Q_y(z) \cdot dz + q_y(z) \cdot dz \cdot dz/2 - (M_x(z) + dM_x(z)) = 0.$$

Приведа подобные члены, отбросив бесконечно малое второго порядка  $q_y(z)dzdz/2$  и поделив на  $dz$ , приходим к равенству

$$dM_x(z)/dz = -Q_y(z). \quad (3.3)$$

Производная изгибающего момента равна поперечной силе, взятой с обратным знаком.

Зависимости (3.2) и (3.3) играют важную роль при построении эпюр. К ним неоднократно будем обращаться и в других задачах теории изгиба балок.

### 3.4.3.2. Примеры построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Перейдем к примерам.

**Пример 3.9.** Построим эпюры поперечной силы и изгибающего момента для балки, показанной на рис. 3.21 а.

На балке один участок  $0 < z < l$ .

Рассечем балку поперечной плоскостью произвольного положения.

Отбросим правую часть.

Действие ее на левую заменим поперечной силой и изгибающим моментом. Допустим, что они положительны: поперечная сила действует справа вниз, момент растягивает верхние волокна (рис. 3.21 б).

Из условий равновесия следует:  
 $\Sigma Y = F + Q(z) = 0, \Rightarrow Q(z) = -F$ , поперечная сила постоянна; эпюра  $Q$  изображена на рис. 3.21 в.

$\Sigma M_c = F \cdot z - M(z) = 0, \Rightarrow M(z) = Fz$ . Момент линейно переменен;  $M(0) = 0, M(l) = Fl$ . Эпюра  $M$  показана на рис. 3.21 г<sup>1</sup>.

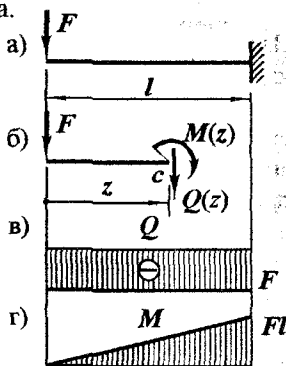


Рис. 3.21

<sup>1</sup> На эпюре изгибающих моментов знаки обычно не ставят. Это объясняется тем, что в сложных стержневых системах возможно противоречивое толкование знака. Следствием введенного выше правила является то, что ординаты эпюры моментов оказываются на стороне растянутых волокон балки.

**Пример 3.10.** Построим эпюры внутренних силовых факторов в балке, изображенной на рис. 3.22 а.

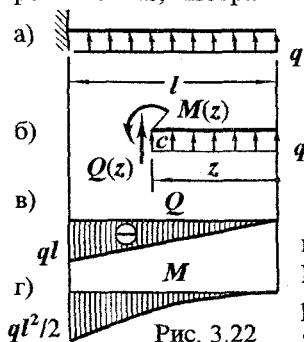


Рис. 3.22

На балке один участок  $0 < z < l$ .

Рассмотрим равновесие правой части (рис. 3.22 б). При этом действие отброшенной левой части заменим положительными поперечной силой (слева вверх) и моментом (растянуты верхние волокна).

Проецируя силы на вертикальную ось, имеем  $\Sigma Y = Q(z) + q \cdot z = 0$ ,  $\Rightarrow Q(z) = -qz$ . Поперечная сила отрицательна, линейно переменна;  $Q(0) = 0$ ,  $Q(l) = -ql$ . Эпюра  $Q$  показана на рис. 3.22 в.

Приравняем нулю сумму моментов сил, приложенных к рассматриваемой части балки, (моментная точка - c):

$$\Sigma M_c = M(z) + q \cdot z \cdot z/2 = 0, \Rightarrow M(z) = -qz^2/2.$$

Изгибающий момент растягивает нижние волокна (отрицателен), изменяется по квадратной параболе.  $M(0) = 0$ ,  $M(l) = -ql^2/2$ .

Двух значений изгибающего момента недостаточно для построения квадратной параболы. Чтобы провести ее, можно найти значение момента в третьей точке, например, при  $z = l/2$ . Однако примем во внимание равенство (3.3). Так как на правом краю поперечная сила равна нулю, в этом месте  $dM/dz = 0$  - экстремум. Отмеченного дополнения достаточно, чтобы построить эпюру  $M$ . Она изображена на рис. 3.22 г.

**Пример 3.11.** Построим эпюры внутренних силовых факторов в балке, показанной на рис. 3.23 а.

Наличие связей на концах балки не позволяет одним сечением выделить из нее свободную часть. Необходимо определить опорные реакции. По крайней мере, одну<sup>1</sup>.

Освободим балку от опорных связей и приложим силы реакций, как показано на рис. 3.23 б. Из условий равновесия вытекает:

<sup>1</sup> Для построения эпюры в данном случае достаточно найти реакцию одной опоры. Определив обе реакции, получаем возможность проверки правильности решения.



$$\Sigma Z = Z_b = 0; \Sigma M_a = q \cdot l \cdot l/2 - Y_b \cdot l = 0, \Rightarrow Y_b = ql/2;$$

$$\Sigma M_b = q \cdot l \cdot l/2 - Y_a \cdot l = 0, \Rightarrow Y_a = ql/2.$$

Рассечем балку, освобожденную от опор, поперечным сечением произвольного положения.

Отбросим правую часть.

Действие ее на левый отрезок заменим положительно направленными  $Q(z)$  и  $M(z)$  (рис. 3.23 в).

Равновесие рассматриваемого отрезка означает, что  $\Sigma Y = ql/2 - q \cdot z - Q(z) = 0, \Rightarrow Q(z) = ql/2 - qz$  - линейная функция с  $Q(0) = ql/2, Q(l) = -ql/2$ .

Эпюра поперечной силы изображена на рис. 3.23 г.

Второе условие равновесия

$$\Sigma M_c = (ql/2) \cdot z - q \cdot z \cdot z/2 + M(z) = 0$$

дает  $M(z) = qz^2/2 - qlz/2$  - квадратная парабола с  $M(0) = 0$  и  $M(l) = 0$ .

Третью точку для построения квадратной параболы возьмем в месте экстремума изгибающего момента - посередине балки (здесь поперечная сила, т.е.  $dM/dz$  обращается в нуль). При  $z = l/2$  момент  $M(l/2) = -ql^2/8$ .

Эпюра изгибающего момента показана на рис. 3.23 д.

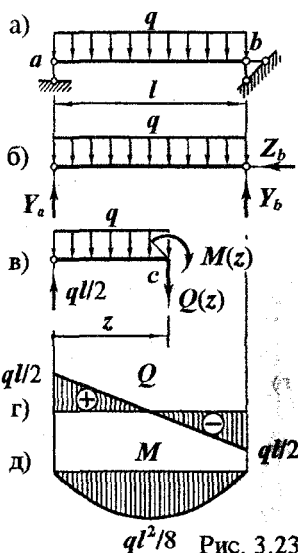


Рис. 3.23

**Пример 3.12.** Построим эпюры  $Q$  и  $M$  в свободно опертой балке от линейно переменной распределенной нагрузки с максимальной интенсивностью  $q$  (рис. 3.24 а).

В этом примере также нужно найти хотя бы одну опорную реакцию. Найдем левую. Освободив балку от опор и заменив их действие силами (рис. 3.24 б), запишем уравнение  $\Sigma M_b = Y_a \cdot l - 0,5 \cdot q \cdot l \cdot l/3 = 0$ . Из него находим  $Y_a = ql/6$ .

Теперь разрежем балку сечением произвольного положения и рассмотрим равновесие левой ее части (рис. 3.24 в). Интенсивность нагрузки на правом краю рассматриваемого отрезка может быть найдена из подобия треугольников, изображающих нагрузку на рис. 3.24 б, 3.24 в:  $q/l = q(z)/z$ , откуда  $q(z) = qz/l$ .

Уравнения равновесия:

Первое:  $\Sigma Y = ql/6 - 0,5 \cdot q(z) \cdot z - Q(z) = 0$ . Подставив сюда выражение  $q(z)$ , получаем  $Q(z) = ql/6 - qz^2/(2l) -$  квадратная парабола.  $Q(0) = ql/6$ ,  $Q(l) = -ql/3$ . На левом краю балки интенсивность нагрузки равна нулю. Согласно равенству (3.2) в этом месте  $dQ(z)/dz = 0$  - экстремум на эмпоре  $Q$ . Эмпора поперечной силы, построенная по этим данным, изображена на рис. 3.24 г.

Второе уравнение:

$\Sigma M_c = (ql/6) \cdot z - 0,5 \cdot q(z) \cdot z \cdot z/3 + M(z) = 0$ .  
Учитывая зависимость  $q(z)$  от  $z$ , получаем  $M(z) = qz^3/(6l) - qlz/6$  - кубическая парабола с  $M(0) = 0$  и  $M(l) = 0$ .

Найдем места экстремумов. По равенству (3.3)

$$dM(z)/dz = -Q(z) = qz^2/(2l) - ql/6 = 0.$$

Корни этого уравнения  $z = l/\sqrt{3}$  и  $z = -l/\sqrt{3}$ . Отбрасывая отрицательный корень, находим  $M(l/\sqrt{3}) = -ql^2/(9\sqrt{3})$ . По полученным

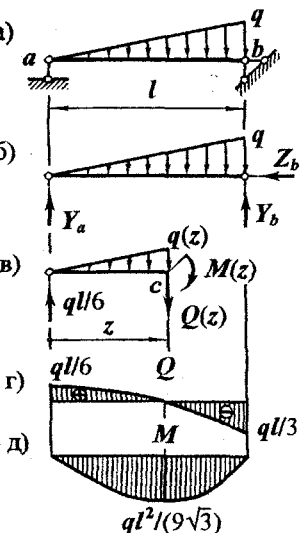


Рис. 3.24

данным строим эпюру изгибающего момента<sup>1</sup> (рис. 3.24 д).

Приемы, показанные на балках с одним участком, применяются для построения эпюр в балках с несколькими участками.

**Пример 3.13.** Построим эпюры внутренних силовых факторов в балке, изображенной на рис. 3.25.

На балке три участка. На правом участке можно строить эпюры без определения опорных реакций, так как после отсечения консоли она становится свободным телом. На левом же и среднем участках та кое невозможно. Чтобы не разрывать процесс определения внутренних силовых факторов, найдем вначале реакции опор.

Из равновесия балки, освобожденной от опор (рис. 3.25 б), следует:

<sup>1</sup> Кубическая парабола построена по четырем данным: трем значениям и месту экстремума.

$$\Sigma Z = Z_a = 0.$$

$$\Sigma M_a = q \cdot 2l \cdot l - ql^2 - Y_b \cdot 3l + ql \cdot 4l = 0, \Rightarrow Y_b = 5ql/3.$$

$$\Sigma M_b = Y_a \cdot 3l - q \cdot 2l \cdot 2l - ql^2 + ql \cdot l = 0, \Rightarrow Y_a = 4ql/3.$$

Переходим к определению поперечных сил и изгибающих моментов.

Левый участок (рис. 3.25 в;  $0 < z_1 < 2l$ ):

$$\Sigma Y = 4ql/3 - q \cdot z_1 - Q(z_1) = 0, \Rightarrow Q(z_1) = 4ql/3 - qz_1 - \text{линейно переменная функция с } Q(0) = 4ql/3, Q(2l) = -2ql/3.$$

$$\Sigma M_c = (4ql/3)z_1 - q \cdot z_1 \cdot z_1/2 + M(z_1) = 0, \Rightarrow M(z_1) = qz_1^2/2 - 4qlz_1/3 - \text{квадратная парабола. Место экстремума: } M(z_1)/dz_1 = -Q(z_1) = qz_1 - 4ql/3 = 0, \Rightarrow z_1 = 4l/3. \text{ Значения момента:}$$

$$M(0) = 0, M(4l/3) = -8ql^2/9,$$

$$M(2l) = -2ql^2/3.$$

Средний участок (рис. 3.25 г;  $l < z_2 < 2l$ ).

Рассмотрим равновесие правой части балки.

$$\Sigma Y = Q(z_2) + 5ql/3 - ql = 0, \Rightarrow Q(z_2) = -2ql/3 - \text{поперечная сила постоянна.}$$

$$\Sigma M_c = M(z_2) + (5ql/3)(z_2 - l) - ql \cdot z_2 = 0,$$

$$\Rightarrow M(z_2) = 5ql^2/3 - 2qlz_2/3 - \text{линейная функция с } M(l) = ql^2, M(2l) = ql^2/3.$$

Правый участок (рис. 3.25 д;  $0 < z_2 < l$ ).

$$\Sigma Y = Q(z_2) - ql = 0, \Rightarrow Q(z_2) = ql - \text{постоянна.}$$

$$\Sigma M_c = M(z_2) - ql \cdot z_2 = 0, \Rightarrow M(z_2) = qlz_2 - \text{линейна с } M(0) = 0, M(l) = ql^2.$$

Эпюры  $Q$  и  $M$  показаны на рис. 3.25 е, ж.

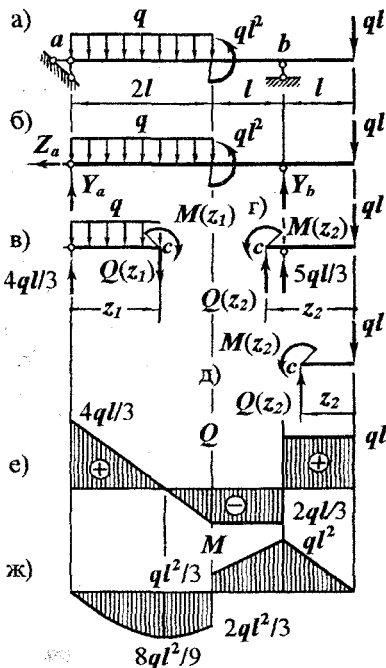


Рис. 3.25

### 3.4.3.3. Некоторые закономерности очертания эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Вытекающие из условий равновесия дифференциальные зависимости (3.2) и (3.3) позволяют установить связь очертаний эпюр с видом нагрузки на балку и между собой.

1) На участке балки, свободном от распределенной нагрузки ( $q_y(z) \equiv 0$ ),

- поперечная сила постоянна ( $dQ_y(z)/dz = -q_y(z) \equiv 0, \Rightarrow Q_y(z) = \text{const}$ ),

- изгибающий момент линейно переменен ( $dM_x(z)/dz = -Q_y(z) = \text{const}, \Rightarrow M_x(z)$  - линейная функция).

2) На участке балки, подверженном равномерно распределенной нагрузке ( $q_y(z) = \text{const}$ ),

- поперечная сила линейно переменна ( $dQ_y(z)/dz = -q_y(z) = \text{const}, \Rightarrow Q_y(z)$  - линейная функция),

- изгибающий момент описывается квадратной параболой ( $dM_x(z)/dz = -Q_y(z)$  - линейная функция,  $\Rightarrow M_x(z)$  - квадратная парабола).

3) На участке балки, подверженном распределенной нагрузке линейно переменной интенсивности ( $q_y(z)$  - линейна),

- поперечная сила описывается квадратной параболой ( $dQ_y(z)/dz = -q_y(z)$  - линейна,  $\Rightarrow Q_y(z)$  - квадратная парабола),

- изгибающий момент изменяется по кубической параболе ( $dM_x(z)/dz = -Q_y(z)$  - квадратная парабола,  $\Rightarrow M_x(z)$  - кубическая).

4) На участке балки, подверженном распределенной нагрузке,

- при нагрузке, направленной вниз поперечная сила уменьшается, вверх - увеличивается (об этом свидетельствует знак "минус" в правой части равенства (3.2));

- изменение поперечной силы с точностью до знака равно площади эпюры распределенной нагрузки в пределах участка (из равенства (3.2)  $dQ_y(z) = -q_y(z)dz$ , что после интегрирования  $\int_a^b dQ_y(z) = -\int_a^b q_y(z)dz$  и учета геометрического смысла определенного интеграла показывает:  $Q_y(b) - Q_y(a) = -A_q|_a^b$ , где  $A_q|_a^b$  - площадь эпюры  $q_y(z)$  на участке  $ab$ ).

– на эпюре изгибающих моментов кривая выпукла в сторону действия нагрузки (из равенств (3.2) и (3.3)  $d^2M_x(z)/dz^2 = -dQ_y(z)/dz = -q_y(z)$ : если  $q_y(z) > 0$  – вниз, то  $d^2M_x(z)/dz^2 > 0$  – кривая выпукла вниз, при  $q_y(z) < 0$  – вверх  $d^2M_x(z)/dz^2 < 0$  – выпуклость вверх).

5) Изменение изгибающего момента с точностью до знака равно площади эпюры поперечной силы в пределах участка (из равенства (3.3)  $dM_x(z) = -Q_y(z)dz$ , что после интегрирования  $\int_a^b dM_x(z) = -\int_a^b Q_y(z)dz$  приводит к  $M_x(b) - M_x(a) = -A_Q|_a^b$ , где  $A_Q|_a^b$  – площадь эпюры  $Q_y(z)$  на участке  $ab$ ).

6) В том сечении, где поперечная сила обращается в нуль, изгибающий момент принимает экстремальное значение (это утверждение непосредственно вытекает из равенства (3.3)).

7) В месте действия на балку внешней сосредоточенной силы поперечная сила изменяется скачком; величина скачка равна величине силы (из рис. 3.26 а видно, что

$$Q_{y, k} + F - Q_{y, k+1} = 0, \Rightarrow Q_{y, k+1} = Q_{y, k} + F).$$

8) В месте действия на балку сосредоточенного внешнего момента изгибающий момент изменяется скачком; величина скачка равна величине момента (из рис. 3.26 б следует:

$$M_{x, k} + M - M_{x, k+1} = 0, \Rightarrow M_{x, k+1} = M_{x, k} + M).$$

Знание этих закономерностей предоставляет возможности, с одной стороны, использовать их для контроля правильности построения эпюр, и с другой, уменьшать объемы вычислительных и графических действий при построении эпюр  $Q$  и  $M$ .

### 3.4.4. Внутренние силовые факторы в плоских системах

Систему будем называть плоской (рис. 3.27), если

– существует плоскость, являющаяся главной для всех стержней конструкции;

– внешняя нагрузка лежит в этой плоскости.

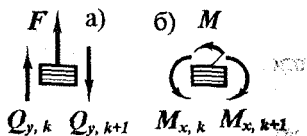


Рис. 3.26

Поскольку внешняя нагрузка образует плоскую произвольную систему сил, отличными от нуля в поперечных сечениях могут быть лишь три внутренних силовых фактора – продольная, поперечная силы и изгибающий момент, лежащие в плоскости системы.

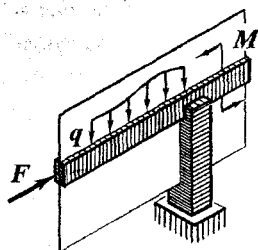


Рис. 3.27

Для построения эпюр в плоских системах достаточно введенных выше правил. Однако из-за геометрической специфики плоских систем к упомянутым правилам нужны дополнительные рекомендации.

При определении знака поперечной силы в вертикальных и наклонных стержнях следует повернуть рисунок (в любую сторону) так, чтобы рассматриваемый стержень стал горизонтальным.

На эпюре изгибающих моментов ординаты необходимо откладывать со стороны растянутых волокон<sup>1</sup>.

Рассмотрим пример.

**Пример 3.14.** Построим эпюры внутренних силовых факторов в плоской раме, изображенной на рис. 3.28а.

Способ закрепления рамы освобождает от необходимости определения опорных реакций.

На раме два участка.

Горизонтальный участок (рис. 3.28 б;  $0 < z < 3l$ ).

Проведем сечение, отбросим правую часть, заменив ее действие положительными  $N_1(z)$ ,  $Q_1(z)$ , а также моментом  $M_1(z)$ , растягивающим верхние волокна.

Запишем и решим уравнения равновесия.

$\Sigma Z = N_1(z) = 0$ . Продольной силы в сечениях горизонтального участка нет.

<sup>1</sup>Если опираться на правило знаков, сформулированное для балок, знак момента будет зависеть от того, в какую сторону повернут рисунок – по или против хода часовой стрелки. Очертание же эпюры будет в обоих случаях одинаковым. Во избежание такой неоднозначности и введена иная (равноценная прежней) рекомендация. Естественно, знак на эпюре изгибающих моментов ставить не следует. Это правило построения эпюр изгибающих моментов можно использовать и в балках.

$\Sigma Y = qz + Q_1(z) = 0, \Rightarrow Q_1(z) = -qz$  – поперечная сила линейно переменна.  $Q_1(0) = 0, Q_1(3l) = -3ql$ .

$\Sigma M_c = q \cdot z \cdot z/2 - M_1(z) = 0, \Rightarrow M_1 = qz^2$ . Изгибающий момент описывается квадратной параболой с  $M_1(0) = 0, M_1(3l) = 4,5ql^2$ ; экстремум при  $z = 0$  (здесь  $Q_1(z) = 0$ ).

Вертикальный участок (рис. 3.28 в;  $0 < y < 2l$ ).

Рассечем вертикальный стержень поперечной плоскостью и отбросим нижнюю его часть. Действие ее на оставленную часть заменим силами: положительными  $N_2(y), Q_2(y)$  и моментом  $M_2(y)$ , растягивающим правые волокна.

Из условий равновесия находим:

$$\Sigma Y = q \cdot 3l + N_2(y) = 0, \Rightarrow$$

$$N_2(y) = -3ql$$
 – продольная сила

в сечениях вертикального участка постоянна отрицательна, стержень сжат.

$\Sigma Z = 4ql - Q_2(y) = 0, \Rightarrow Q_2(y) = 4ql$  – поперечная сила также постоянна и положительна.

$\Sigma M_c = q \cdot 3l \cdot 3l/2 - 4ql \cdot y - M_2(y) = 0, \Rightarrow M_2(y) = 4,5ql^2 - 4qly$  – линейно переменный с  $M_2(0) = 4,5ql^2$  (растянуты правые волокна) и  $M_2(2l) = -3,5ql^2$  (растянуты левые волокна).

Эпюры  $N, Q$  и  $M$  изображены на рис. 3.28 г, д, е.

Плоские стержневые конструкции более многообразны чем балки. Они могут

- содержать криволинейные стержни;
- иметь замкнутые контуры;
- быть многоопорными и т.д.

Тем не менее, если конструкция статически определима, метод сечений позволяет найти опорные реакции, а затем величины и направления внутренних силовых факторов и, следовательно, построить их эпюры.

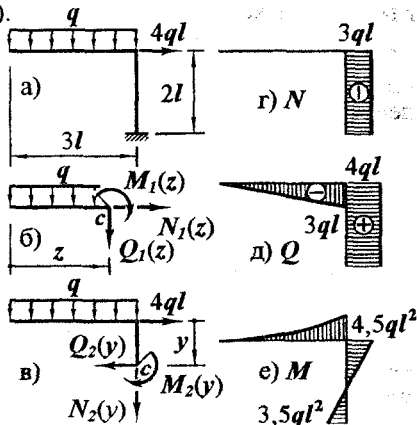


Рис. 3.28

### 3.4.5. Внутренние силовые факторы в общем случае

К общему случаю отнесем такие конструкции и нагрузки, которые не вписываются в рассмотренные выше частные схемы:

- либо у стержня или стержневой системы нет геометрической главной плоскости,
- либо внешние силы образуют пространственную систему,
- либо, наконец, при наличии главной плоскости нагрузка не лежит в ней.

В общем случае внутренние силы в сечении приводятся к шести внутренним силовым факторам.

Ограничимся конструкциями, стержни которых имеют по две главных плоскости. Более того, будем считать, что главные плоскости параллельны координатным плоскостям.

В общем случае будем пользоваться введенными выше правилами знаков, но с дополнением: *при определении знака поперечной силы будем смотреть против оси, перпендикулярной строящейся эпюре*<sup>1</sup>.

**Пример 3.15.** У стержневой рамы, изображенной на рис. 3.29 а, главные плоскости параллельны координатным плоскостям (рис. 3.29 б): у стержня длиной  $l$  плоскостям  $xu$  и  $zx$ , а длиной  $2l$  —  $yz$  и  $zx$ . Построим эпюры внутренних силовых факторов от показанной нагрузки.

Рама зашпелена. Опорные реакции можно не определять.

На раме два участка.

Первый участок (рис. 3.29 в;  $0 < x < l$ ).

Описанные ниже действия — приложение метода сечений к первому участку рассматриваемой конструкции.

При выборе положительных направлений сил, заменяющих действие отброшенной части приняты:

$N_1(x)$  — растягивающей;

$Q_{1y}(x)$ , приложенная слева, — вверх (при взгляде против оси  $z$ );

$Q_{1z}(x)$ , также приложенная слева, — тоже вверх (при взгляде против оси  $y$ );

<sup>1</sup> Если это не обусловить, возможно противоречие в установлении знака поперечной силы.



Крутящий момент  $M_{I_x}(x)$  направлен против хода часовой стрелки (смотреть со стороны отброшенной части);

Направления изгибающих моментов  $M_{I_y}(x)$  и  $M_{I_z}(x)$  выбраны произвольно.

Ориентируясь на главную координатную систему, составим и решим уравнения равновесия.

$\Sigma X = N_I(x) = 0$ . Продольной силы на первом участке нет.

$\Sigma Y = Q_{I_y}(x) - 2F = 0, \Rightarrow Q_{I_y}(x) = 2F$ . Сила постоянна, направлена так, как показано на рисунке.

$\Sigma Z = Q_{I_z}(x) + F = 0, \Rightarrow Q_{I_z}(x) = -F$ . Сила постоянна, направлена в сторону, противоположную показанной на рисунке.

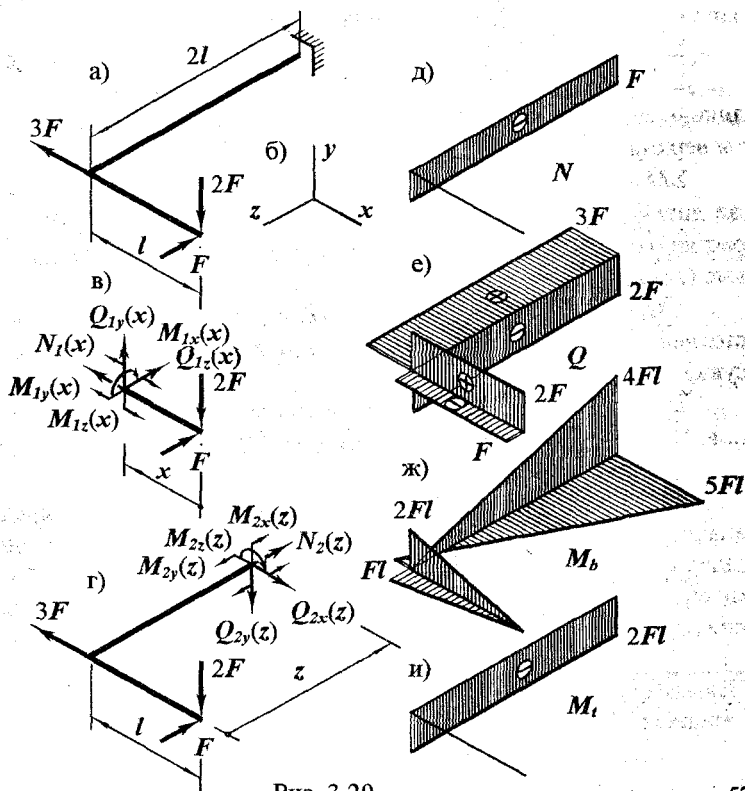


Рис. 3.29

$\Sigma M_x = M_{1x}(x) = 0$ . Кручение на первом участке отсутствует.

$\Sigma M_y = M_{1y}(x) - F \cdot x = 0, \Rightarrow M_{1y}(x) = Fx$ . Момент линейно переменен с  $M_{1y}(0) = 0$  и  $M_{1y}(l) = Fl$ ; растянуты левые волокна.

$\Sigma M_z = M_{1z}(x) - 2F \cdot x = 0, \Rightarrow M_{1z}(x) = 2Fx$ . Момент также линейно переменен:  $M_{1z}(0) = 0, M_{1z}(l) = 2Fl$ ; растянуты верхние волокна.

Второй участок (рис. 3.29 г;  $0 < z < 2l$ ).

Используя метод сечений для второго участка, из условий равновесия отсеченной части находим:

$\Sigma X = Q_{2x}(z) - 3F = 0, \Rightarrow Q_{2x}(z) = 3F$ . Сила постоянна, направлена так, как показано на рисунке.

$\Sigma Y = Q_{2y}(z) + 2F = 0, \Rightarrow Q_{2y}(z) = -2F$ . Сила постоянна, направлена в сторону, противоположную показанной на рисунке.

$\Sigma Z = N_2(z) + F = 0, \Rightarrow N_2(z) = -F$ . Сила постоянна, участок сжат.

$\Sigma M_x = M_{2x}(z) - 2F \cdot z = 0, \Rightarrow M_{2x}(z) = 2Fz$ . Изгибающий момент — линейная функция со значениями  $M_{2x}(0) = 0, M_{2x}(2l) = 4Fl$ ; растянуты верхние волокна.

$\Sigma M_y = M_{2y}(z) + Fl - 3F \cdot z = 0, \Rightarrow M_{2y}(z) = 3Fz - Fl$ . Момент также линейно переменен. Его значения и направления:  $M_{2y}(0) = -Fl$  — растянуты левые (дальние) волокна,  $M_{2y}(2l) = 5Fl$ , растянуты правые (ближние) волокна.

$\Sigma M_z = M_{2z}(z) + 2F \cdot l = 0, \Rightarrow M_{2z}(z) = -2Fl$ . Крутящий момент постоянен, направлен в сторону, противоположную показанной на рисунке.

Эпюры внутренних силовых факторов показаны на рис. 3.29 д ... и. На нем  $M_b$  — изгибающие<sup>1</sup> моменты;  $M_t$  — крутящие<sup>2</sup> моменты.

Построение эпюр внутренних силовых факторов — средство анализа нагруженности конструкции. В подавляющем большинстве задач сопротивления материалов приходится строить эпюры. Поэтому очень важно освоить методы и развить устойчивые навыки решения подобных задач.

<sup>1</sup> Индекс от англ. *bend* — изгиб.

<sup>2</sup> Индекс от англ. *torsion* — кручение.

## 4. Плоское напряженное состояние

В предыдущем разделе введены понятия напряжений и напряженного состояния в точке. Отмечено также, что напряжения зависят от ориентации площадки, проведенной через точку. Исследуем эти зависимости.

### 4.1. Постановка задачи

Из стержня, находящегося в равновесии при действии внешней нагрузки, двумя поперечными плоскостями (рис. 4.1 а) вырежем элементарный диск (рис. 4.1 б). Он подвержен силам со стороны отброшенных частей стержня. Из этого диска двумя парами продольных плоскостей выделим элементарный параллелепипед (рис. 4.1 в) с гранями, перпендикулярными осям главной координатной системы. Действие отброшенных частей на него представим нормальными и касательными напряжениями (рис. 4.1 в). Будем считать, что напряжения по граням распределены равномерно.

Ограничимся частным случаем, когда на двух параллельных гранях напряжений нет (на рис. 4.1в эти грани перпендикулярны оси  $x$ ).

Задачу сформулируем так. Пусть известны нормальные и касательные напряжения  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$  и  $\tau_{zy}$ . Рассмотрим совокупность площадок, проходящих через рассматриваемую точку и параллельных оси  $x$ . В разных площадках напряжения будут разными. Установим

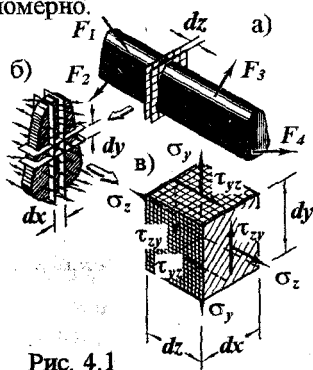


Рис. 4.1

1. Как зависят напряжения от ориентации площадки?
2. В какой площадке нормальное напряжение достигает наибольшего значения и каково это значение?
3. В какой площадке касательное напряжение достигает наибольшего значения? Какова величина максимального касательного напряжения?

Поскольку в процессе решения поставленной задачи придется пользоваться формальным математическим аппаратом, введем правило знаков для напряжений.

*Напряжение будем считать*

– *положительным, если*

– *в площадке с положительной внешней нормалью его направление совпадает с положительным направлением соответствующей координатной оси*

– *или в площадке с отрицательной внешней нормалью его направление противоположно положительному направлению соответствующей координатной оси;*

– *отрицательным, если*

– *в площадке с положительной внешней нормалью его направление противоположно положительному направлению соответствующей координатной оси;*

– *или в площадке с отрицательной внешней нормалью его направление совпадает с положительным направлением соответствующей координатной оси.*

При этом положительными направлениями координатных осей будем считать традиционные – вправо и вверх.

Например, касательное напряжение  $\tau_{xy}$  на правой площадке (рис. 4.2) положительно, так как

– *действует в площадке положительной внешней нормалью (внешняя нормаль направлена вправо),*

– *совпадает с положительным направлением координатной оси.*

В соответствии с введенным правилом знаков направления всех напряжений, показанных на рис. 4.1 в и 4.2, положительны.

## 4.2. Теорема о парности касательных напряжений

Прежде чем переходить к решению поставленной выше задачи, докажем теорему.

Рассмотрим элементарный параллелепипед (рис. 4.1 в, 4.2). Он находится в равновесии. Приравняем нулю сумму моментов сил, приложенных к нему.

Поскольку напряжения по каждой грани распределены равномерно, равнодействующие нормальных напряжений проходят через центр элемента. Примем его в качестве моментной точки.

Правая грань:

- $\tau_{zy}$  - напряжение на ней;
- произведение  $dx dy$  - площадь грани;
- $\tau_{zy} dx dy$  - равнодействующая касательных напряжений;
- плечо ее относительно центра элемента равно  $dz/2$ ;
- момент - это произведение  $\tau_{zy} dx dy dz/2$ .

Равенство нулю суммы моментов:

$$\tau_{zy} dx dy dz/2 - \tau_{yz} dz dx dy/2 + \tau_{zy} dx dy dz/2 - \tau_{yz} dz dx dy/2 = 0.$$

Отсюда после сокращения на  $dx dy dz$  вытекает важное свойство -

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}. \quad (4.1)$$

*Касательные напряжения, возникающие во взаимно перпендикулярных площадках, равны.*

Из условия равновесия ясно, что моменты напряжений  $\tau_{zy}$  и  $\tau_{yz}$  должны быть направлены в разные стороны. Отсюда следует: касательные напряжения в двух взаимно перпендикулярных площадках направлены либо к линии пересечения граней, либо от нее.

Формула (4.1) и есть математическое выражение теоремы о парности касательных напряжений.

## 4.3. Напряжения в наклонных площадках

Перейдем к решению поставленной выше задачи. Для ответа на первый вопрос вырежем из параллелепипеда (рис. 4.1 в, рис. 4.2) трехгранную призму (рис. 4.3) плоскостью, параллельной оси  $x$  и наклоненной к вертикальной грани под углом  $\alpha$ . Внешние силы, действующие на нее, представлены шестью напряжениями в соответствующих площадках.

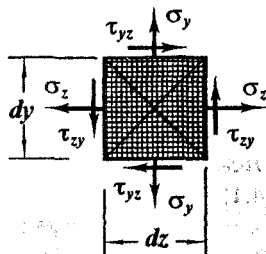


Рис. 4.2

Обозначим площадь вертикальной грани  $dx dy = dA$ . Тогда площади горизонтальной площадки  $dA \operatorname{tg} \alpha$ , наклонной  $dA / \cos \alpha$ .

Спроектируем силы, приложенные к призме, на направление  $\sigma_\alpha$ .

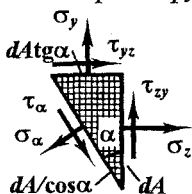


Рис. 4.3

Проекция горизонтальной силы, действующей на вертикальную грань:

– она представлена напряжением  $\sigma_z$ , поэтому равнодействующая равна  $\sigma_z dA$ ;

– сила горизонтальна, угол между нею и направлением  $\sigma_\alpha$  равен  $\alpha$ ; проекция силы – это произведение  $\sigma_z dA \cos \alpha$ .

Рассуждая аналогично и учитывая направления сил и их проекций, получаем уравнение

$\sigma_z dA \cos \alpha + \tau_{zy} dA \sin \alpha + \tau_{yz} dA \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha + \sigma_y dA \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha - \sigma_\alpha dA / \cos \alpha = 0$ .  
Отсюда после несложных преобразований и использования свойства (4.1) приходим к зависимости

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{zy} \sin 2\alpha. \quad (4.2)$$

Спроектировав силы на направление  $\tau_\alpha$  и выполнив необходимые преобразования, получаем вторую формулу –

$$\tau_\alpha = ((\sigma_y - \sigma_z) \sin 2\alpha) / 2 + \tau_{zy} \cos 2\alpha. \quad (4.3)$$

Формулы (4.2) и (4.3) показывают, как изменяются напряжения в зависимости от ориентации площадки.

Обобщая выполненный анализ, отметим, что при плоском напряженном состоянии шесть напряжений, действующих на гранях элементарной призмы, связаны тремя условиями равновесия. Следовательно, *плоское напряженное состояние определяется тремя напряжениями*. При этом положения исходных площадок, в которых действуют три заданных напряжения, могут быть любыми.

#### 4.4. Нормальные напряжения,

действующие во взаимно перпендикулярных площадках

Запишем выражение для нормальных напряжений, возникающих в площадке, наклоненной к вертикальной грани под углом  $(\alpha + 90^\circ)$ , (рис. 4.4). Согласно формуле (4.2)

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha+90} &= \sigma_z \cos^2(\alpha+90) + \sigma_y \sin^2(\alpha+90) + \tau_{zy} \sin 2(\alpha+90) = \\ &= \sigma_z \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - \tau_{zy} \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Суммируя  $\sigma_\alpha$  и  $\sigma_{\alpha+90}$ , получаем

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\alpha+90} = \sigma_z + \sigma_y. \quad (4.4)$$

Сумма нормальных напряжений, возникающих во взаимно перпендикулярных площадках, есть величина постоянная для данной точки тела.

Равенство (4.4) обнаруживает интересное и важное свойство нормальных напряжений в точке. Если рассмотреть всю совокупность взаимно перпендикулярных площадок в точке стержня (как бы поворачивать площадки, оставляя их перпендикулярными), нормальное напряжение в каждой из них с поворотом будет изменяться. Однако, если одно из них возрастет, другое на столько же уменьшится. А отсюда следует, что при достижении одним напряжением максимума, другое становится минимальным.

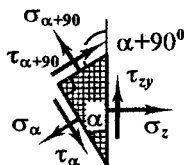


Рис. 4.4

#### 4.5. Главные площадки и главные напряжения

Обратимся ко второму вопросу задачи. Для отыскания площадки с наибольшими нормальными напряжениями продифференцируем  $\sigma_{\alpha}$  по  $\alpha$ . Согласно выражению (4.2)

$$\begin{aligned} d\sigma_{\alpha}/d\alpha &= -2\sigma_z \cos\alpha \sin\alpha + 2\sigma_y \sin\alpha \cos\alpha + 2\tau_{zy} \cos 2\alpha = \\ &= 2((\sigma_y - \sigma_z) \sin 2\alpha)/2 + \tau_{zy} \cos 2\alpha = 2\tau_{\alpha}. \end{aligned}$$

Производная нормального напряжения пропорциональна касательному напряжению. Отсюда вывод: нормальное напряжение достигает экстремума в той площадке, где касательное напряжение отсутствует.

Площадки, свободные от касательных напряжений называются **главными площадками**.

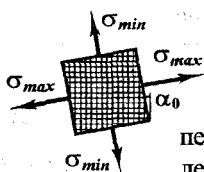
Нормальные напряжения, действующие в главных площадках, носят название **главных напряжений**.

Пусть главные площадки наклонены к исходной вертикальной грани под углом  $\alpha_0$ . Тогда из условия отсутствия касательного напряжения (см. формулу (4.3))  $((\sigma_y - \sigma_z) \sin 2\alpha_0)/2 + \tau_{zy} \cos 2\alpha_0 = 0$ .

Отсюда 
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2\tau_{zy}/(\sigma_z - \sigma_y). \quad (4.5)$$

Равенству (4.5) удовлетворяют два угла  $\alpha_0$ , отличающиеся на  $90^\circ$ . Таким образом, полученная формула определяет положение двух взаимно перпендикулярных главных площадок (рис. 4.5).

Принимая во внимание



- наличие двух главных площадок,
- их перпендикулярность,
- экстремальность главных напряжений,
- постоянство суммы нормальных напряжений в перпендикулярных площадках при повороте параллелепипеда,

Рис. 4.5 приходим к выводу, что одно главное напряжение является максимальным, другое минимальным по сравнению с нормальными напряжениями, действующими во всевозможных площадках, проведенных через данную точку.

Величины главных напряжений можно найти по формуле (4.2), подставив в нее углы  $\alpha_0$ , найденные из равенства (4.5). Однако компактной равенства

$$\sigma_{max/min} = (\sigma_y + \sigma_z \pm \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_{zy}^2})/2, \quad (4.6)$$

получаемые из выражений (4.2), (4.4) и (4.5) подобно тому, как были выведены формулы (2.29).

Формулы (4.5), (4.2) или (4.6) позволяют найти положения главных площадок и величины главных напряжений, т.е. дают ответ на второй вопрос поставленной задачи.

**Пример 4.1.** В некоторой точке стержня определены напряжения, величины и направления которых показаны на рис. 4.6. Найдем положения главных площадок и величины главных напряжений.

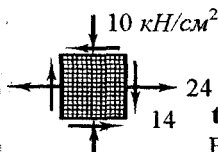


Рис. 4.6

Принимаем:

$$\sigma_y = -10 \text{ кН/см}^2, \sigma_z = 24 \text{ кН/см}^2, \tau_{zy} = -14 \text{ кН/см}^2.$$

По формуле (4.5) находим:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2\tau_{zy}/(\sigma_z - \sigma_y) = 2(-14)/(24 - (-10)) = -0,824.$$

Ему отвечают  $\alpha_{01} = -19,7^\circ$  и  $\alpha_{02} = 70,3^\circ$  (рис. 4.7).

По формуле (4.2):

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha_{01}} &= \sigma_z \cos^2 \alpha_{01} + \sigma_y \sin^2 \alpha_{01} + \tau_{zy} \sin 2\alpha_{01} = \\ &= 24 \cos^2(-19,7^\circ) + (-10) \sin^2(-19,7^\circ) + \\ &+ (-14) \sin 2(-19,7^\circ) = 29 \text{ кН/см}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha_{02}} &= \sigma_z \cos^2 \alpha_{02} + \sigma_y \sin^2 \alpha_{02} + \tau_{zy} \sin 2\alpha_{02} = \\ &= 24 \cos^2(70,3^\circ) + (-10) \sin^2(70,3^\circ) + \\ &+ (-14) \sin 2(70,3^\circ) = -15 \text{ кН/см}^2. \end{aligned}$$

Итак,  $\sigma_{max} = 29 \text{ кН/см}^2$ ,  $\sigma_{min} = -15 \text{ кН/см}^2$ .

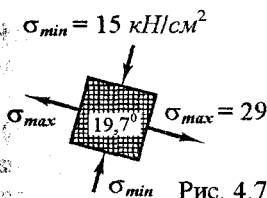


Рис. 4.7



## 4.6. Наибольшее касательное напряжение

В плане, аналогичном предыдущему, исследуем касательные напряжения — ответим на третий вопрос.

Найти положения площадок, в которых касательные напряжения принимают наибольшие значения, можно так же, как в разделе 4.5 — исследовать функцию (4.3) на экстремум. Однако для упрощения выкладок запишем выражение касательного напряжения в произвольной площадке, приняв в качестве исходных главные площадки и главные напряжения (рис. 4.8). Согласно формуле (4.3)

$$\tau_{\beta} = ((\sigma_{min} - \sigma_{max}) \sin 2\beta) / 2.$$

Отсюда видно, что наибольшими касательные напряжения становятся в площадках, наклоненных к главным площадкам под углом  $\beta = \pm 45^{\circ}$ .

Экстремальные значения касательного напряжения  $\tau_{max/min} = \pm(\sigma_{max} - \sigma_{min}) / 2$ . Численно  $\tau_{max}$  и  $\tau_{min}$  равны, знаки разные. Первое понятно, ибо они действуют во взаимно перпендикулярных площадках и связаны свойством парности. Различие знаков создает видимость противоречия условию (4.1). Однако это противоречие кажущееся. Более строгие формулы требуют иной системы отсчета угловых координат, отражающей знак внешней нормали наклонной площадки. Не желая усложнять материал, здесь применен упрощенный вариант.

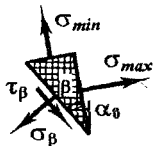


Рис. 4.8

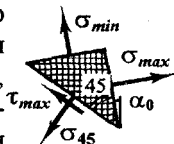


Рис. 4.9

Знак несет информацию о направлении напряжения. Установить его не составляет труда. Поскольку  $\sigma_{max} \geq \sigma_{min}$ , по закону равновесия напряжение  $\tau_{max}$  направлено в сторону, противоположную максимальному нормальному напряжению (рис. 4.9). Поэтому формулу максимального касательного напряжения запишем в виде

$$\tau_{max} = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) / 2, \quad (4.7)$$

а направление будем определять по условию равновесия.

Формула (4.7) завершает анализ плоского напряженного состояния в рамках поставленных выше вопросов. Теперь, определив напряжения в каких-либо двух площадках, можно найти положение главных площадок и величины  $\sigma_{max}$  и  $\sigma_{min}$  и то же о самое  $\tau_{max}$ . Эти сведения необходимы для оценки прочности материала.

## 4.7. Виды напряженного состояния

В теории напряжений доказано, что в любой точке твердого тела всегда можно найти три взаимно перпендикулярных главных плоскости и, следовательно, три главных напряжения. Их, как правило, обозначают  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Номера присваивают так, чтобы в алгебраическом толковании выполнялось соотношение  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

В зависимости от числа ненулевых главных напряжений напряженные состояния подразделяют на три вида.

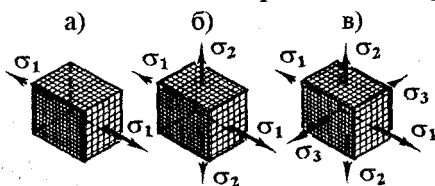


Рис. 4.10

**Линейное** (его еще называют одноосным), когда лишь одно главное напряжение отличается от нуля (рис. 4.10 а).

**Плоское** (двухосное) — два главных напряжения не равны нулю (рис. 4.10 б).

**Объемное** (трехосное) — все главные напряжения ненулевые (рис. 4.10 в).

Разновидности линейного напряженного состояния:

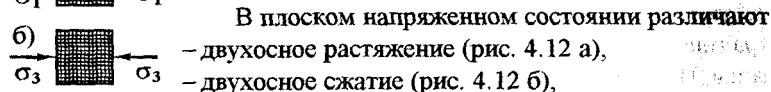
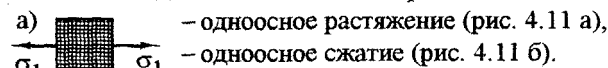


Рис. 4.11 — смешанное напряженное состояние (рис. 4.12 в).

Число сочетаний знаков главных напряжений при объемном напряженном состоянии значительно больше чем при линейном и плоском. Вероятно, поэтому все возможные разновидности не получили индивидуальных названий.

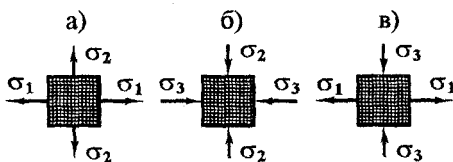


Рис. 4.12

Выше изложены основы теории сравнительно простого — плоского напряженного состояния, достаточного для оценки прочности материалов стержневых элементов конструкций.

## 5. Растяжение и сжатие

Простейшими видами нагружения стержня являются его осевое растяжение или сжатие. Это происходит, если линии действия сил совпадают с осью стержня (рис. 3.10). Познакомимся с

- результатами эксперимента,
- методами теоретического прогнозирования и
- практическими расчетами стержневых элементов конструкций на прочность и жесткость при растяжении или сжатии.

### 5.1. Испытания материалов на растяжение.

#### Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали

Испытания на растяжение являются одними из наиболее простых и распространенных. С помощью лабораторных исследований удастся изучить поведение материалов и получить их механические характеристики, необходимые для расчетов конструкций.

Испытания проводят в соответствии с ГОСТами, регламентирующими формы и размеры образцов, режимы нагружения, перечень определяемых характеристик и т.п.

При испытаниях на растяжение применяют специальные образцы (рис. 5.1). Размеры образцов зависят от возможности их изготовления, а также от мощности и конструкции испытательной машины. На концах образцов имеются головки для крепления в захватах машины. Средняя часть, как правило, круглого или прямоугольного сечения. Диаметр образцов с круглым сечением (рис. 5.1 а) обычно принимают 5 ... 10 мм. Посередине образца выделяют рабочую

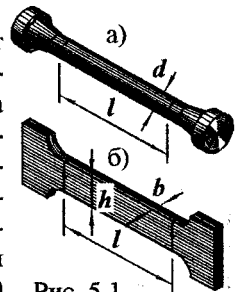


Рис. 5.1

часть длиной  $l = 10d$  (так называемые десятикратные образцы) или  $l = 5d$  (пятикратные). У образцов прямоугольного сечения (рис. 5.1 б) длина рабочей части принимается  $l = 11,3\sqrt{bh}$  у десятикратных образцов и  $l = 5,65\sqrt{bh}$  у пятикратных.

Испытания на растяжение производят на специальных машинах. По мере роста растягивающей силы длина образца увеличивается, поперечные размеры уменьшаются. Испытательные машины обычно снабжены прибором для автоматической записи зависимости удлинения  $\Delta l$  от усилия  $F$ . Познакомимся с диаграммами растяжения некоторых материалов.

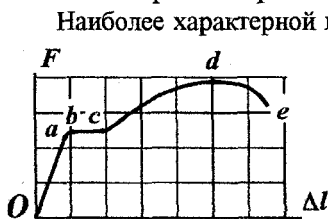


Рис. 5.2

Наиболее характерной и удобной для первого знакомства является диаграмма, получаемая при испытании малоуглеродистой стали (рис. 5.2). На изображенной кривой условно можно выделить четыре участка.

Участок  $Oa$  практически прямой. Удлинение образца растет пропорционально силе.

Второй участок ( $bc$ ) свидетельствует о том, что образец удлиняется без заметного изменения силы. Горизонтальный отрезок диаграммы называется *площадкой текучести*.

За площадкой текучести следует *участок упрочнения* ( $cd$ ). Удлинение образца вновь сопровождается ростом нагрузки, но более медленным, чем в начале нагружения.

В стадии упрочнения постепенно намечается место разрыва — образуется местное сужение, называемое *шейкой* (рис. 5.3). По мере образования шейки рост силы замедляется, а затем удлинение образца происходит при уменьшении силы (участок  $de$  на рис. 5.2).

Диаграмма растяжения, построенная в координатах  $F-\Delta l$ , зависит от размеров образца. Чтобы получить характеристики *материала*, а не образца, диаграмму пере-

страивают в осях  $\sigma-\epsilon$ , где  $\sigma$  — напряжения в поперечном сечении,  $\epsilon$  — *относительное удлинение* (рис. 5.4). При этом предполагают, что напряжения по сечению распределены равномерно, т.е.  $\sigma = F/A$  ( $A$  — первоначальная площадь поперечного сечения); относительное

удлинение также равномерно по длине рабочей части:  $\epsilon = \Delta l/l$ . Построенная в координатах  $\sigma$ – $\epsilon$  диаграмма носит название *диаграммы условных напряжений при растяжении*.

Условность напряжений объясняется тем, что силу делят на первоначальную площадь. Если силу делить на действительную площадь, то отношение даст *истинные напряжения*.

Диаграммы условных и истинных напряжений на участке *Oabcd* практически совпадают. Отличие становится существенным в процессе формирования шейки. Истинные напряжения быстро растут (кривая *d–e<sub>1</sub>* на рис. 5.4).

При испытании на растяжение определяют три группы механических характеристик материала.

Первая группа. Ординаты точек *a*, *b* и *d* на диаграмме условных напряжений отражают способность материала сопротивляться нагрузке и поэтому называются *характеристиками прочности*. Их определения:

$\sigma_{pr}$  – *предел пропорциональности*; до него напряжения и деформации пропорциональны<sup>1</sup>;

$\sigma_{yl}$  – *предел текучести* – напряжение, при котором деформации растут без изменения нагрузки<sup>2</sup>;

$\sigma_u$  – *предел прочности* – условное напряжение, соответствующее наибольшей растягивающей силе<sup>3</sup>.

Вторая группа механических характеристик – *характеристики пластичности*<sup>4</sup>. В нее входят

$$\delta_r = ((l_t - l)/l)100\% \quad (5.1)$$

– *относительное остаточное удлинение при разрыве*,

$$\psi_r = ((A - A_t)/A)100\% \quad (5.2)$$

– *относительное остаточное сужение при разрыве*. Здесь

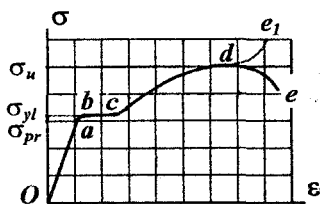


Рис. 5.4

<sup>1</sup> Индекс от англ. *proportional* – пропорциональный.

<sup>2</sup> Индекс от англ. *yield* – текучесть.

<sup>3</sup> Индекс от англ. *ultimate* – предельный.

<sup>4</sup> Пластичность – способность деформироваться в процессе нагружения.

- $l$  – начальная длина рабочей части образца;
- $A$  – начальная площадь поперечного сечения;
- $l_t$  – длина рабочей части после разрыва;
- $A_t$  – площадь шейки.

Чем больше  $\delta$ , и  $\psi$ , тем пластичней материал. При малых значениях  $\delta$ , и  $\psi$ , материал считают *хрупким*<sup>1</sup>.

Площадь диаграммы условных напряжений характеризует способность материала сопротивляться ударным нагрузкам. Количественной мерой этой способности является *удельная работа, затраченная на разрушение*, измеряемая в Дж/м<sup>3</sup>:

$$w = W/V = \Omega mn. \quad (5.3)$$

В формуле (5.3)

$W$  – работа, затраченная на разрушение образца;

$V$  – объем рабочей части;

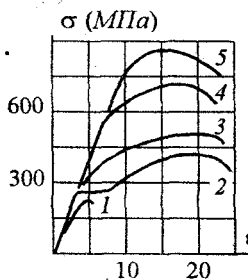
$\Omega$  – площадь диаграммы;

$m$  и  $n$  – масштабы по осям абсцисс и ординат.

Эти *энергетические характеристики* составляет третью группу.

## 5.2. Сравнение диаграмм растяжения различных материалов

Диаграммы растяжения различных материалов, естественно, различны. На рис. 5.5. для сравнения показаны диаграммы растяжения



- 1 – серого чугуна;
- 2 – малоуглеродистой стали;
- 3 – алюминиевого сплава;
- 4 – легированной стали;
- 5 – титанового сплава.

Диаграммы растяжения отличаются

- размерами по вертикали;
- протяженностью по горизонтали;
- наличием (отсутствием) площадки текучести.

Рис. 5.5

<sup>1</sup> Хрупкость – противоположность пластичности – разрыв при малом удлинении.

Чем выше диаграмма, тем прочней материал – выше способность сопротивляться нагрузкам. Характеристики прочности зависят не только от материала или его марки, но и от технологии приготовления, скорости нагружения, температуры и других условий.

Протяженность по горизонтали характеризует пластические свойства материала. По этому показателю материалы делят на *пластичные* (некоторые стали, медь, алюминий, титановые сплавы и др.) и *хрупкие* (чугун, бетон, кирпич, естественные камни и т.п.). Заметим, что деление материалов на пластичные и хрупкие является условным, поскольку способность деформироваться, так же как и прочность, зависит от технологии приготовления, температуры, скорости нагружения, а также от вида напряженного состояния. Материалы, пластичные в одних условиях, в других могут вести себя как хрупкие, и наоборот. Поэтому правильнее говорить не о *пластичных* и *хрупких материалах*, а о *пластичном* или *хрупком состоянии* материала.

У одних материалов на диаграмме имеется площадка текучести (малоуглеродистые стали, некоторые латуни, отожженные марганцовистые и алюминиевые бронзы). Для них термин "предел текучести" является вполне определенным. У других же (а таких большинство) площадки текучести нет. Понятия текучести и предела текучести для них условны.

Если на диаграмме растяжения пластичного материала нет площадки текучести, вводят понятие *условного предела текучести* – напряжения, при котором пластическая деформация достигает 0,2 % (иногда 0,5 %). Его обозначают  $\sigma_{02}$  (или  $\sigma_{05}$ ) в зависимости от величины допуска (термин "пластическая деформация" пояснен в разд. 5.5).

### 5.3. Испытания на сжатие

Этот вид испытаний также относится к простейшим и поэтому к наиболее распространенным. При испытании на сжатие используются короткие образцы в форме цилиндров (рис. 5.6 а – в основном для металлов) или кубиков (рис. 5.6 б, для бетона, древесины и т.п.), иногда параллелепипедов. При большой высоте образца его сжатие обычно сопровождается искривлением, что искажает результаты испытаний.

Испытания производят на специальных прессах. По мере роста сжимающей силы продольный размер образца уменьшается, поперечные – увеличиваются. Поведение и свойства материала характеризуются диаграммой сжатия (рис. 5.7).

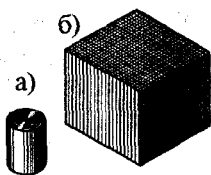


Рис. 5.6

Пластичные и хрупкие материалы при сжатии ведут себя по-разному.

Диаграмма сжатия малоуглеродистой стали показана на рис. 5.7а. На ней, как и при растяжении, обнаруживается прямолинейный начальный участок, площадка текучести и участок упрочнения. Довести образец до разрушения и, следовательно, найти предел прочности при сжатии не удастся из-за роста поперечных размеров образца. Цилиндр сминается в диск. Вследствие трения между плитами пресса и образцом, он принимает бочкообразную форму.

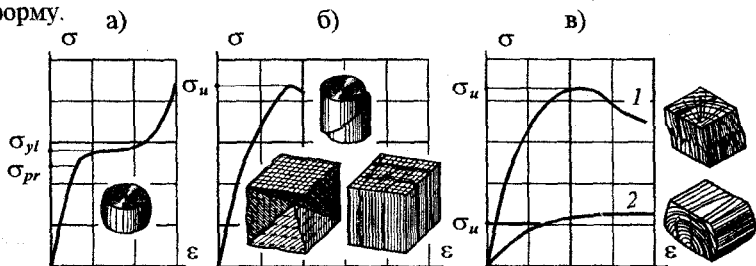


Рис. 5.7

Пределы пропорциональности и пределы текучести при растяжении и сжатии близки. Близки и очертания диаграмм, включая значительную часть участков упрочнения. Обычно считают, что малоуглеродистая сталь одинаково сопротивляется растяжению и сжатию.

Иначе ведут себя образцы из хрупких материалов (рис. 5.7 б). Диаграммы сжатия их имеют качественно такой же вид, как и при растяжении. Но предел прочности при сжатии значительно выше нежели при растяжении. Больше и деформации в момент разрушения.

Причины и вид разрушения образцов зависят от материала и условий испытания. Так, чугунный образец скалывается по плоскости, наклоненной к оси под углом, близким к  $45^\circ$ . Это дает основание считать, что причина разрушения – касательные напряжения.



Из-за трения на торцах разрушение бетонного кубика обычно сопровождается выкалыванием пирамидовидных частей. Но, если трение устранить (например, смазать торцы парафином), при разрушении образуются продольные трещины.

Представителем анизотропного материала является древесина. При некотором качественном сходстве диаграмм сжатия вдоль волокон (линия 1 на рис. 5.7 в) и поперек (линия 2) пределы прочности разнятся в 10–20 раз.

Испытания на растяжение и сжатие позволяют, с одной стороны, сформировать качественное представление о реакции материала на нагрузку и, с другой, получить количественные механические характеристики, необходимые для оценки степени опасности напряженных состояний элементов конструкций.

Характеристики прочности и пластичности некоторых материалов, применяемых в строительстве, приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1.

**Механические характеристики  
некоторых строительных материалов**

Материал	Предел прочности МПа		Предел текуч. $\sigma_{yt}$ ( $\sigma_{02}$ ), МПа	Отн. ост. удл. $\delta_r$ %	Отн. поп. суж. $\psi_r$ %
	при растяж. $\sigma_{ut}$	при сжатии $\sigma_{uc}$			
Сталь:					
малоуглеродистая	345...390	—	215...255	23...27	60...70
низколегированная	430...520	—	265...370	21	—
Чугун серый СЧ	120...380	50...140	—	1...1,4	—
Алюминиевые сплавы	130...465	—	60...350	8...18	11...65
Бетон	0,14...2,5	0,95...43	—	—	—
Кирпич	0,7...3	7,5...100	—	—	—
Древесина сосны и ели вдоль волокон	25...34	20...33	—	—	—
Стекло	30...90	500... ...2000	—	—	—
СВАМ:					
1:1	480	420	—	1,4...2	—
10:1	900	—	—	—	—

Таблица иллюстрирует, с одной стороны, насколько разнятся они у разных материалов, и с другой, довольно большой разброс даже у одних и тех же материалов, но имеющих разные марки. На прочность и пластичность материала влияют многие факторы:

- химический состав;
- технология приготовления;
- возраст, влажность (бетон, древесина)

и ряд других. Некоторые из обстоятельств будут обсуждены ниже.

### 5.4. Закон Гука при одноосном напряженном состоянии

Характерной особенностью диаграмм растяжения и сжатия является то, что исходящие из начала координат участки близки к прямым. На основании этого английский ученый Р.Гук<sup>1</sup> сформулировал закон, согласно которому

$$\varepsilon = \sigma/E \quad (5.4)$$

– *относительное удлинение пропорционально нормальному напряжению.*

Фигурирующий в равенстве (5.4)  $E$  называется *модулем упругости* (его еще называют *модулем продольной упругости*, *модулем упругости 1-го рода*, *модулем Юнга*<sup>2</sup>). Размерность модуля упругости  $H/m^2$  (и подобные ему). Из равенства (5.4.) следует, что численное значение модуля упругости равно тангенсу угла наклона начального участка диаграммы условных напряжений к оси абсцисс.

Замеры и сопоставления поперечных и продольных деформаций при испытаниях на растяжение и сжатие показали, что *их отношение остается постоянным:*

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z \quad (5.5)$$

<sup>1</sup> Роберт Гук (1635–1703) – английский естествоиспытатель, инженер. В 1676 году сформулировал закон “Ut tensio, sic vis” – “Каково удлинение, такова сила”, чем установил два новых свойства тел: пропорциональность между нагрузкой и деформацией и упругость. Почти одновременно с Гуком закон пропорциональности обнаружил французский физик Мариотт (1680 г.), по-видимому, не знавший о работах Р.Гука.

<sup>2</sup> Томас Юнг (1773–1829) английский ученый. В 1800 г. ввел в механику понятие модуля упругости.

Множитель  $\nu$  в этой формуле называется *коэффициентом Пуассона*<sup>1</sup>. Коэффициент  $\nu$  положителен, размерности не имеет. Отрицательный знак в правой части согласовывает направления деформаций: при положительной продольной деформации  $\varepsilon_z$  (удлинение) поперечные —  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$ , отрицательны (сужение), и наоборот.

Модуль упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  являются физико-механическими константами материала. Их величины приводятся в справочной и нормативной литературе (см. также табл. 5.2).

Константы  $E$  и  $\nu$  также как и характеристики прочности и пластичности зависят от химического состава, технологии изготовления, условий, в которых находится материал. И все-таки они более стабильны.

Из приведенных выше диаграмм ясно, что закон Гука (5.4) справедлив при напряжениях, не превышающих предел пропорциональности (на прямолинейном начальном участке). Этим же пределом ограничивается справедливость равенств (5.5).

Для некоторых хрупких материалов (например, для чугуна) из-за малости деформаций соотношения (5.4) и (5.5) считают применимыми до предела прочности.

Таблица 5.2.

**Модули упругости  $E$   
и коэффициенты Пуассона  $\nu$   
некоторых строительных материалов**

Материал	$E, \text{ГПа}$	$\nu$
Сталь углеродистая	200...210	0,25...0,33
Чугун серый СЧ	120...160	0,23...0,27
Алюминиевые сплавы	70...75	0,25...0,35
Бетон	5...40	0,15...0,20
Кирпичная кладка	0,1...8	0,2...0,3
Древесина		
сосны и ели		
вдоль волокон	8...12	0,4...0,5
поперек волокон	0,3...0,5	0,01...0,03
Резина	0,007...0,008	0,4...0,5
Пробка	—	0
Стекло	50...60	0,24...0,27
СВАМ:		
1:1	35	0,13
10:1	60	—

<sup>1</sup> Симеон Дени Пуассон (1781–1840) — французский ученый, впервые обративший внимание на постоянство отношения поперечных и продольных деформаций.

## 5.5. Испытания на растяжение и сжатие при сложных программах нагружения

В описанных выше испытаниях нагружение образца производилось монотонно до разрушения. Естественно, подобные испытания не могли обнаружить свойства материалов при немонотонных программах нагружения. Учитывая, что нагрузки на строительные конструкции могут возрастать и уменьшаться, действовать неоднократно и изменяться во времени самым произвольным образом, нужно изучить закономерности поведения материалов в подобных условиях.

Познакомимся с результатами простейших испытаний при немонотонных нагрузках.

5.5.1. Если образец из малоуглеродистой стали нагрузить, не

доводя до разрушения (точка  $f$  на рис. 5.8), и затем снять нагрузку, то зависимость между напряжением и удлинением отобразится линией  $fgh$ . После снятия напряжений образец останется удлиненным. В соответствии с этим полное удлинение можно представить в виде двух слагаемых:

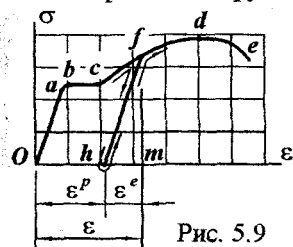
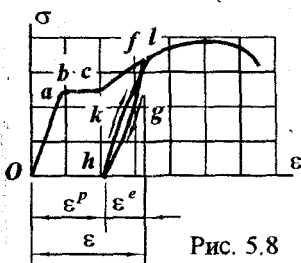
$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p, \quad (5.6)$$

где  $\varepsilon^e$  — упругая<sup>1</sup> деформация;  $\varepsilon^p$  — пластическая<sup>2</sup> (ее еще называют *остаточной*) деформация.

Вторичное нагружение из состояния, характеризуемого точкой

$h$ , сопровождается ростом деформации, отражаемым линией  $hkl$ . Линии  $fgh$  и  $hkl$  образуют петлю гистерезиса, которая свидетельствует о необратимых затратах энергии при разгрузке и последующем нагружении. Ширина петли обычно невелика, и в расчетах ею часто пренебрегают — считают, что ветви  $fgh$  и  $hkl$  совпадают.

При таком упрощении линия разгрузки и вторичного нагружения



<sup>1</sup> Индекс от англ. *elastic* — упругий;

<sup>2</sup> Индекс от англ. *plastic* — пластический.

оказывается единой. У сталеи эта линия близка к прямой, наклон ее практически такой же как у первоначального участка диаграммы  $Oa$  (рис. 5.9).

Если в процессе начального нагружения напряжение не превысило предел пропорциональности, после разгрузки деформации исчезнут. Поэтому участок  $Oa$  называют участком упругих деформаций. Часть  $abcde$  называют участком упругопластических деформаций.

В соответствии с наличием обратимой и необратимой частей деформации работа, затраченная на деформирование, также состоит из двух частей:

$$w = w^p + u, \quad (5.7)$$

где  $w^p$  – необратимая часть удельной работы (диссипация энергии; ее геометрическим образом является площадь фигуры  $OabcfhO$ );  $u$  – удельная потенциальная энергия деформации.

Удельная потенциальная энергия деформации  $u$  есть площадь треугольника  $hfm$ . Так как тангенс угла наклона линии  $hf$  равен  $E$ ,

$$u = \sigma \varepsilon^2 / 2 = \sigma^2 / 2E. \quad (5.8)$$

Подчеркнем, что равенство (5.8) справедливо независимо от того, в какой стадии напряжения находится материал, – в упругой или упругопластической.

5.5.2. Если в процессе вторичного нагружения ( $hf$ ), достигнув напряжений, соответствующих точке  $f$ , увеличивать их далее, диаграмма растяжения будет иметь вид  $fde$ . Процесс разгрузки  $fh$  и вторичного нагружения  $hf$  не отразился на очертании кривой  $fde$ . Образец, претерпевший предварительное нагружение  $Oabcf$  до упругопластического состояния, изменил свои свойства. Его диаграмма приняла вид  $hfde$ :

- предел пропорциональности стал выше (точка  $f$ );
- исчезла площадка текучести;
- удлинение при разрыве уменьшилось.

Такое изменение свойств материала носит название *наклепа*.

5.5.3. На рис. 5.10 кривая  $Oafde$  – диаграмма однократного растяжения,  $Orq$  – однократного сжатия. Если осуществить начальное нагружение до точки  $f$ , разгрузить до  $h$  и продолжить нагру-

жение в сторону сжатия, изменение свойств обнаружится и здесь. Пластические деформации сжатия возникнут при напряжениях, соответствующих точке  $n$ . Предел пропорциональности на сжатие станет меньше (ср. положения точек  $p$  и  $n$ ). При этом общая длина участка упругих деформаций практически не изменилась ( $ap \approx fn$ ). Эта особенность поведения материала, связанная со знакопеременным нагружением, носит название *эффекта Баушингера*<sup>1</sup>.

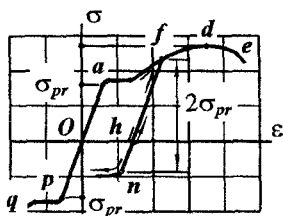


Рис. 5.10

Особенности, обнаруженные при испытаниях малоуглеродистой стали, в той или иной мере свойственны и другим материалам. В зависимости от степени проявления свойств их либо игнорируют, либо идеализируют и учитывают в расчетах. Так, по очертанию диаграммы и ориентации идеализированной линии разгрузки материалы подразделяют на

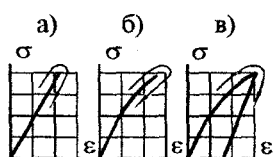


Рис. 5.11

- *линейно упругие* (рис. 5.11 а);
- *нелинейно упругие* (рис. 5.11 б);
- *упругопластические* (рис. 5.11 в).

Среди последних выделяют такие материалы, у которых линия разгрузки параллельна начальному участку. В таких случаях говорят о *законе линейной разгрузки*.

## 5.6. Понятие о нормативном и расчетном сопротивлении материала.

### Условия прочности

5.6.1. Чтобы назначить границу безопасного нагружения, необходимо ввести понятие *предельного состояния*. Для пластичных материалов за предельное состояние принимают начало текучести, для хрупких – начало разрушения. В соответствии с этим предельными напряжениями считают предел текучести  $\sigma_{yt}$ , если материал пластичный, или предел прочности  $\sigma_u$ , если хрупкий.

<sup>1</sup> Иоганн Баушингер (1833–1893) – профессор механики Мюнхенского политехнического института, основатель передовой по меркам того времени испытательной лаборатории.

Серийные испытания образцов обнаруживают большой разброс предельных напряжений. На рис. 5.12 изображена кривая распределения предела текучести малоуглеродистой стали. Она показывает, что 16 % образцов имеют предел текучести около 300 МПа, у 10 % он лежит в пределах  $270 \leq \sigma_{y1} \leq 330$  МПа. Предел текучести  $\sigma_{y1} = 240$  МПа имеет лишь 1 % испытанных образцов. Аналогична кривая распределения предела прочности.

Учитывая разброс механических характеристик и стремясь к гарантии прочности, ГОСТом или техническим условием на приемку материала предусмотрено минимальное (браковочное)

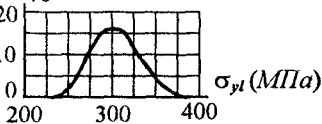


Рис. 5.12

значение предельного напряжения, называемое *нормативным сопротивлением*.

Обычно нормативное сопротивление обозначают  $R_n$ ; для сталей  $R_{yn}$ , если оно назначено по текучести, или  $R_{un}$ , если по пределу прочности.

Поскольку контрольные испытания являются выборочными и не исключают возможности отклонения предельного напряжения от нормативного значения в неблагоприятную сторону, вводят *расчетное сопротивление материала*. Его обозначают буквой  $R$ . Расчетное сопротивление всегда меньше нормативного.

У многих пластичных материалов расчетные сопротивления на растяжение и сжатие принимают одинаковыми. У материалов, имеющих заметно различающиеся характеристики прочности при растяжении и сжатии, устанавливают *расчетное сопротивление на растяжение  $R_t$  и расчетное сопротивление на сжатие<sup>1</sup>  $R_c$* .

Числовые значения расчетных сопротивлений  $R$  или  $R_t$  и  $R_c$  приведены в нормативной и справочной литературе. Ими руководствуются при оценке прочности или степени опасности напряженного состояния материала.

5.6.2. Чтобы в материале не возникло предельное состояние, должны выполняться условия

$$\sigma \leq R_t \text{ и } \sigma \leq R_c. \quad (5.9)$$

Эти ограничения называются *условиями прочности материала*.

<sup>1</sup> Индексы от англ. *tension* — растяжение, *compression* — сжатие.

Для хрупких материалов условия прочности действительно являются таковыми, ибо достижение напряжением величины  $R_t$  или  $R_c$  (предела прочности) сопряжено с разрушением – появлением и, как правило, мгновенным распространением трещины. У пластичных же материалов, где в качестве расчетного сопротивления фигурирует предел текучести, нарушение условий (5.9) чревато возникновением остаточных деформаций. Поэтому для них используемая терминология является несколько условной.

Определенный запас прочности (в статистическом смысле) закладывается и самой процедурой назначения расчетного сопротивления. Это также свидетельствует об относительности смысла терминологии.

### 5.7. Влияние температуры и длительности действия нагрузки

#### на механические характеристики и свойства материалов

Описанные выше испытания материалов проводятся при комнатной температуре; нагружение образцов осуществляется плавно и в сравнительно непродолжительное время. Условия, в которых работают строительные конструкции, отличаются от лабораторных. Достаточно широк диапазон температур. Некоторые конструкции воспринимают ударные нагрузки в течение долей секунд. Возможно и противоположное – действие сил на протяжении столетий.

Механические характеристики, полученные при лабораторных испытаниях, нельзя считать неизменными. Они соответствуют тем условиям, в которых получены. Для выявления свойств материалов в отмеченных выше особых условиях необходимы отдельные испытания, воспроизводящие специфику воздействия.

5.7.1. Испытания при различных температурах показывают, что у большинства материалов с повышением температуры характеристики прочности уменьшаются, а с понижением – растут. Характеристики же пластичности, наоборот, с повышением температуры увеличиваются, с понижением – уменьшаются. С ростом температуры уменьшается модуль упругости, и увеличивается коэффициент Пуассона.



Нагрев конструкций из алюминиевых сплавов до температуры  $T = 100^{\circ}\text{C}$  можно считать безопасным. Предел текучести при таких температурах почти не изменяется, предел прочности понижается незначительно. При более высоких температурах прочность резко падает. Влияние температуры на характеристики прочности алюминиевого сплава проиллюстрировано рис. 5.13.

Прочность бетона при повышении температуры понижается, что заметно уже в интервале  $200\dots300^{\circ}\text{C}$ . Нагрев до  $400^{\circ}\text{C}$  снижает прочность почти вдвое, до  $500^{\circ}\text{C}$  – втрое. При  $550^{\circ}\text{C}$  модуль упругости меньше обычного почти в 17 раз.

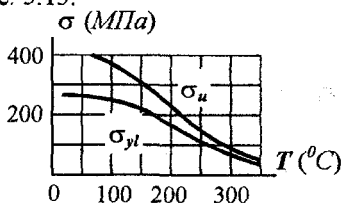


Рис. 5.13

Нагрев пластмасс приводит к быстрому падению предела прочности. При охлаждении они становятся очень хрупкими.

Некоторые материалы являются исключением из этих правил.

Так, у углеродистой стали (рис. 5.14) при повышении температуры предел прочности вначале несколько повышается, а затем резко падает. В интервале  $200\dots400^{\circ}\text{C}$  предел прочности  $\sigma_u$  имеет наибольшее значение, в то же время остаточное удлинение при разрыве  $\delta_r$  – наименьшее. Сталь становится хрупкой.

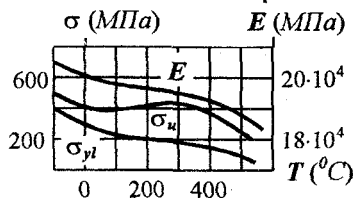


Рис. 5.14

С дальнейшим повышением температуры эта аномалия исчезает, растет пластичность, снижается прочность.

При отрицательных температурах характеристики прочности несколько превышают обычные, пластичность снижается.

### 5.7.2. Влияние скорости нагружения.

На рис. 5.15 показаны две диаграммы растяжения малоуглеродистой стали: при медленном (1) и ударном (2) нагружении. Из диаграмм видно, что с повышением скорости нагружения прочностные характеристики возрастают, характеристики пластичности снижаются – материал становится более хрупким. Подобная тенденция проявляется у большинства материалов.

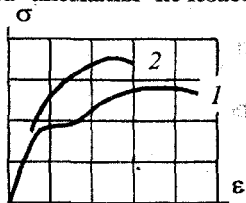


Рис. 5.15

5.7.3. Весьма своеобразно поведение некоторых материалов при длительном действии нагрузки.

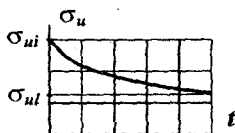


Рис. 5.16

5.7.3.1. У пластмасс в таких условиях предел прочности значительно уменьшается. На рис. 5.16 показана зависимость предела прочности  $\sigma_u$  от  $t$  — продолжительности действия нагрузки. На нем  $\sigma_{ui}$  — предел сопротивления кратковременным деформациям;  $\sigma_{ul}$  — предел длительного сопротивления. При напряжении  $\sigma_{ui} > \sigma > \sigma_{ul}$  разрушение произойдет не сразу, а по истечении некоторого времени.

5.7.3.2. Если образец оставить под нагрузкой в течение длительного времени, то деформации его будут возрастать. Процесс нарастания деформаций при постоянной нагрузке носит название ползучести материала.

График зависимости деформации  $\epsilon$  от времени  $t$  называется кривой ползучести (рис. 5.17). Участок  $Oa$  соответствует нагружению образца.

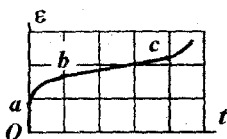


Рис. 5.17

После этого при постоянной нагрузке деформирование продолжается. В начале выдержки под нагрузкой скорость роста деформаций падает (участок  $ab$ ) — происходит так называемая неустановившаяся ползучесть. Затем скорость стабилизируется и становится минимальной (прямая  $bc$ ). Этот участок описывает установившуюся ползучесть.

При определенных условиях возможна активизация процесса ползучести — с некоторого момента времени (точка  $c$ ) скорость роста деформаций вновь возрастает, и в итоге образец разрушается.

Вид кривой ползучести зависит от материала, температуры и уровня напряжений.

Для каждого материала существует определенная температура, после которой проявление ползучести становится настолько существенным, что игнорировать ее нельзя. Для углеродистых сталей эта температура равна  $300...350^{\circ}C$ , для легированных  $350\pm 400^{\circ}C$ , для легких сплавов  $50...150^{\circ}C$ . У некоторых материалов, таких, как пластмассы, древесина, цемент, бетон ползучесть возможна при обычной температуре.

На рис. 5.18 а показаны кривые ползучести при одинаковых напряжениях, но разных температурах. Рис. 5.18 б иллюстрирует зависимость характера ползучести от величины напряжения при постоянной температуре.

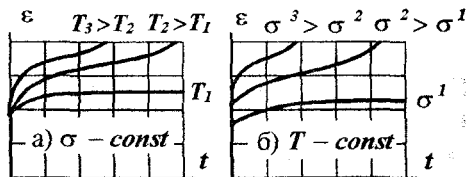


Рис. 5.18

Графики показывают, что в зависимости от условий деформации могут стабилизироваться на некотором уровне, но может произойти и разрушение.

5.7.3.3. Изменение деформаций со временем происходит не только под нагрузкой, но и после ее снятия (рис. 5.19).

Если образец нагрузить (участок  $Oa$ ) и выдержать под нагрузкой длительное время, деформации возрастут ( $ab$ ). Если после этого нагрузку снять, деформации уменьшатся. Вначале "мгновенно" ( $bc$ ), а затем они будут уменьшаться уже в разгруженном образце ( $cd$ ). Это явление носит название *обратной ползучести*. Оно в большей степени проявляется у пластмасс.

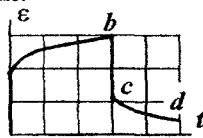


Рис. 5.19

5.7.3.4. Заслуживает внимания явление, происходящее в напряженном материале при фиксированной деформации. В этом случае происходит падение напряжений. Уменьшение напряжений при постоянной деформации называется *релаксацией*. Начальный отрезок на рис. 5.20 соответствует нагружению образца, до напряжения  $\sigma_0$ . Затем оно падает до некоторого  $\sigma_f$ .

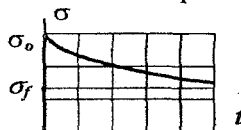


Рис. 5.20

Ползучесть и релаксация имеют одну физическую природу. Температура и напряжения, при которых проявляются релаксация и ползучесть, близки.

Выше дано лишь качественное описание некоторых явлений, происходящих в материалах при условиях, отличающихся от лабораторных. Более детально свойства материалов изучают в специальных курсах. В них даны рекомендации по учету тех или иных особенностей поведения материалов при расчете и проектировании строительных конструкций.

## 5.8. План решения основной задачи сопротивления материалов

Основная задача сопротивления материалов формулируется так. Известны форма и размеры стержня и внешние силы, приложенные к нему. При действии указанных сил стержень находится в равновесии. Выбрано некоторое поперечное сечение. Нужно установить

- какие напряжения возникают в поперечном сечении: нормальные, касательные или и те, и другие;
- как напряжения распределены по сечению;
- как зависят напряжения от формы и размеров сечения, а также от нагрузки на стержень.

Метод сечений позволяет выразить внутренние силовые факторы через внешнюю нагрузку. Поэтому будем считать их известными.

Решение сформулированной задачи производится в два этапа.

Первый этап – формирование системы уравнений, позволяющих ответить на поставленные вопросы. Этот этап наиболее важный, так как по существу определяет содержание технической теории.

Система уравнений состоит из трех групп.

Поскольку разрешить уравнения (3.1) относительно искомых напряжений нельзя (распределение напряжений по сечению неизвестно), рассматривается геометрическая сторона задачи. Цель – установить закономерности изменения деформаций по сечению.

В сопротивлении материалов распределение деформаций по сечению устанавливается с помощью эксперимента. А так как произвести замеры во внутренних точках стержня технически невозможно, изучают деформации на его поверхности. Это позволяет предположительно судить о том, какие геометрические изменения происходят внутри стержня. Для математического описания зависимости деформаций от положения точки обычно используют гипотезу плоских сечений (гипотезу Бернулли<sup>1</sup>) – предполагают, что *поперечные сечения в процессе деформации стержня остаются плоскими*. Эти зависимости являются *геометрическими уравнениями* и составляют одну из трех групп.

<sup>1</sup> Бернулли Яков старший (1654–1705) – представитель династии великих математиков. В 1695 г. использовал эту гипотезу в задаче об изгибе балки.

Другая группа – *физические уравнения*, связывающие деформации с напряжениями.

Третью<sup>1</sup> группу составляют условия статической эквивалентности (3.1) – *статические уравнения*.

Этим завершается первый этап.

Второй этап – формальный математический. Систему уравнений преобразуют так, чтобы выразить искомые напряжения через внутренние силовые факторы, геометрические характеристики сечения и координаты точки. Здесь используют соответствующий математический аппарат в зависимости от вида решаемых уравнений.

Сформулированным выше условием не исчерпываются задачи, решаемые в сопротивлении материалов. Особое внимание уделено ей потому, что выводы подобного рода обычно трудны. Кроме того, аналогичные задачи приходится решать в курсах строительной механики, теории упругости и т.п.<sup>2</sup> Поэтому описание общего подхода к решению таких задач представляется целесообразным. Знание общего плана действий облегчит понимание выводов, поможет сохранить ориентир в процессе порой громоздких математических выкладок и преобразований.

Решение основной задачи сопротивления материалов предполагает выразить напряжения в любой точке стержня через его геометрические размеры и внешнюю нагрузку. Но так как решение производят в общем виде и фиксируют в виде формул, можно решать задачи в других постановках. Можно, например, определить требуемые размеры стержня, зная внешнюю нагрузку и допустимые напряжения; можно по заданным напряжениям и размерам найти внешнюю нагрузку, т.е. решать различные задачи проектировочного типа.

<sup>1</sup> Последовательность формирования отдельных групп уравнений может быть произвольной. Важно, чтобы все они были в составе системы.

<sup>2</sup> Принципиальную схему решения статически неопределимых задач о напряженно-деформированном состоянии твердого тела разработал французский инженер и ученый Луи Навье (1785–1836).

## 5.9. Напряжения в поперечном сечении стержня при растяжении и сжатии.

### Теоретическое решение задачи

Решим задачу о напряжениях, возникающих в поперечном сечении стержня, подверженного растягивающим или сжимающим силам. Задача ставится, как описано выше. Установим:

- какие напряжения возникают в поперечном сечении;
- как они распределены по сечению;
- как зависят напряжения от продольной силы и геометрических размеров стержня.

#### Геометрическая сторона задачи

При лабораторных испытаниях стержня с нанесенной сеткой из продольных и поперечных линий (рис. 5.21) установлено:

- поперечные линии, плоские и параллельные до деформации, после деформации остались плоскими и параллельными;

- продольные линии остались прямыми и параллельными;

- углы между указанными семействами линий не изменились.

На основании этих фактов будем считать, что *поперечные сечения, плоские и параллельные до деформации, остались плоскими и параллельными после деформации.* От-

сюда следует, что все продольные волокна удлинятся одинаково, т.е.

$$\epsilon_z = \epsilon_z(x, y) = \text{const.} \quad (\text{a})$$

Равенство (а) является геометрическим условием задачи.

Кроме того, учитывая

- отсутствие касательных сил на боковой поверхности стержня и свойство их парности;

- малость поперечного размера стержня – пространства возможного развития касательных напряжений;

- отсутствие поперечных сил и крутящего момента;

*примем – касательных напряжений в поперечном сечении нет.*

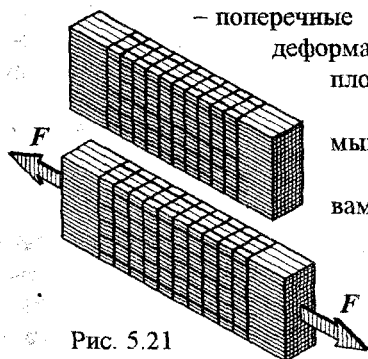


Рис. 5.21

### Физическая сторона задачи

Напряжения и деформации связаны между собой. В упругой стадии эта связь фигурирует в форме закона Гука (5.4). За пределом упругости она более сложная. Но как бы то ни было, из постоянства деформаций (а) вытекает постоянство напряжений:

$$\sigma_z = \sigma_z(x, y) = \text{const.} \quad (6)$$

### Статическая сторона задачи

Продольная сила (3.1)

$$N = \int_A \sigma_z dA. \quad (в)$$

Первый этап завершен, система разрешающих равенств сформирована. Теперь для ответов на все поставленные вопросы требуются простые преобразования.

Учитывая постоянство напряжений (б), последовательно записываем равенство (в):  $N = \int_A \sigma_z dA = \sigma_z \int_A dA = \sigma_z A$ , откуда

$$\sigma_z = N/A. \quad (5.10)$$

Итак, получены ответы на все поставленные вопросы.

1) При растяжении и сжатии в поперечном сечении стержня возникают только нормальные напряжения.

2) Напряжения по сечению распределены равномерно.

3) Величина напряжения прямо пропорциональна продольной силе и обратно пропорциональна площади поперечного сечения.

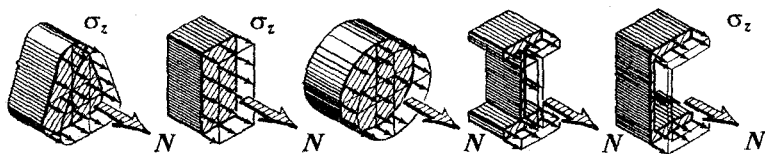


Рис. 5.22

Как следует из полученного решения напряжения в поперечном сечении не зависят от его формы. На рис. 5.22 показаны эпюры напряжений в сечениях различных форм.

## 5.10. Критический анализ формулы нормальных напряжений. Принцип Сен-Венана.

### Понятие о концентрации напряжений

5.10.1. Из формулы (5.10) следует, что в растянутом или сжатом стержне напряжения в сечении не зависят от

- вида внешней нагрузки (разные нагрузки, приводящиеся к одинаковым силам  $N$ , вызывают одинаковые напряжения);
- длины стержня;
- формы поперечного сечения;
- материала стержня.

Такой итог – следствие приближенного решения задачи, не учитывающего возможные особенности конкретных схем. Строго говоря, решение (5.10) справедливо, если

- растягивающие или сжимающие силы представляют равномерно распределенные по торцам нормальные напряжения;
- стержень имеет постоянное сечение;
- материал стержня однородный и изотропный.

Если нагрузка реализована в виде сосредоточенных сил (рис.

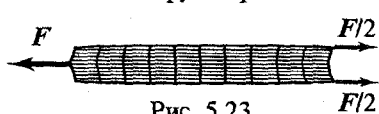


Рис. 5.23

5.23), гипотеза плоских сечений нарушается. Распределение напряжений в сечениях, близких к точкам приложения сил, будет

неравномерным. По мере удаления от торцов искривления поперечных линий будут уменьшаться, напряжения будут приближаться к значениям, предсказываемым формулой (5.10).

Гипотезу плоских сечений и полученную на ее основе формулу (5.10) можно считать справедливой лишь для сечений, достаточно удаленных от точек приложения внешних сил. Может оказаться, что для коротких стержней обсуждаемая формула будет неприемлемой.

Неравномерно распределение напряжений в поперечном сечении стержня из неоднородного материала. Это можно объяснить тем, что при одинаковых деформациях, но разных модулях упругости напряжения будут разными.



5.10.2. В сопротивлении материалов обычно рассматривают равнодействующие внешних нагрузок и не учитывают конкретный вид их распределения. В связи с этим возникает вопрос, как это сказывается на напряженно-деформированном состоянии стержня? Ответ на этот вопрос дает принцип Сен-Венана<sup>1</sup>. Сформулировать принцип можно так: *в местах, удаленных от точек действия сил, статически эквивалентные нагрузки вызывают одинаковые напряжения и деформации*

Принцип Сен-Венана освобождает от необходимости рассмотрения бесчисленного множества возможных вариантов статически эквивалентных нагрузок. В то же время вопрос о напряжениях и деформациях вблизи точек нагружения остается открытым. Задачи подобного рода рассматриваются в специальных дисциплинах.

5.10.3. Равномерность распределения напряжений нарушается у отверстий, в местах изменения формы или размеров сечения (рис. 5.24). Вблизи таких мест наблюдается концентрация напряжений.



Рис. 5.24

В итоге следует констатировать, что решение сопротивления материалов вскрывает общую картину напряженного состояния, не отражая местных возмущений, связанных с видом нагрузки и геометрическими особенностями элемента конструкции.

## 5.11. Напряженное состояние стержня.

### Расчет на прочность при растяжении и сжатии

5.11.1. Анализ напряженного состояния включает

- установление закономерностей изменения напряжений в зависимости от угла наклона площадки к поперечному сечению;
- определение положения главных площадок и величин главных напряжений  $\sigma_{max}$  и  $\sigma_{min}$ ;
- определение положения площадок с максимальными касательными напряжениями и величин  $\tau_{max}$ .

<sup>1</sup> Барре де Сен-Венан (1797–1886) – французский ученый. Сформулировал принцип в 1855 г. Доказательства принципа нет. Он подтверждается экспериментом и строгими аналитическими решениями частных задач. Принято считать, что влияние конкретного вида нагрузки распространяется на длину, соизмеримой с размерами поперечного сечения.

Исследование напряженного состояния проведем на стержне прямоугольного сечения (рис. 5.25 а). Олицетворением всевозможных площадок (перпендикулярных плоскости чертежа) может служить цилиндр бесконечно малого диаметра (заштрихован дважды на рис. 5.25 а). Напряжения в разных точках его боковой поверхности отражают напряженное состояние в рассматриваемом месте.

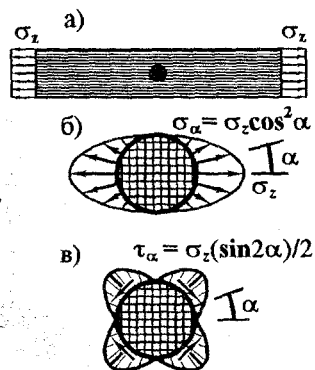


Рис. 5.25

При растяжении стержень находится в линейном напряженном состоянии. Зависимости напряжений от наклона площадки получим по формулам (4.2) и (4.3), положив в них  $\tau_{zy} = \sigma_y = 0$ :

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2 \alpha, \quad (5.11)$$

$$\tau_\alpha = -\sigma_z (\sin 2\alpha) / 2. \quad (5.12)$$

Соответствующие этим равенствам эпюры нормальных и касательных напряжений изображены на рис. 5.25 б, в.

Главными являются площадки, лежащие в поперечном сечении, и перпендикулярные ему продольные площадки, так как касательные напряжения в них отсутствуют. Из выражения нормальных напряжений вытекает  $\sigma_{max} = \sigma_z$  и  $\sigma_{min} = 0$ .

В разделе 4 показано, что площадки с наибольшими касательными напряжениями наклонены к главным площадкам под  $45^\circ$ , а  $\tau_{max} = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) / 2$ . При растяжении  $\tau_{max} = \sigma_z / 2$  — в два раза меньше максимального нормального напряжения.

Результаты анализа имеют достаточно большую общность. Они справедливы для всех

- точек стержня, так как напряженное состояние при растяжении однородное (напряжения во всех точках стержня одинаковы);
- площадок независимо от того, в какой продольной плоскости отсчитывается угол  $\alpha$ , поскольку напряженное состояние линейное;
- типов сечений, так как нормальное напряжение  $\sigma_z$  не зависит от них.

При сжатии главные напряжения  $\sigma_{max} = 0$ , а  $\sigma_{min} = \sigma_z$ . Максимальное касательное напряжение  $\tau_{max} = \sigma_z / 2$ .

5.11.2. Расчет на прочность при растяжении и сжатии ведется по наибольшим нормальным напряжениям.

Условие прочности (5.9) требует, чтобы нормальное напряжение ни в одной точке не превысило расчетного сопротивления материала. Поскольку наибольшее нормальное напряжение в точке растянутого или сжатого стержня – это  $\sigma_z$ , условию прочности можно придать вид

$$\sigma_z \leq R. \quad (5.13)$$

Так выглядит условие прочности материала при линейном напряженном состоянии.

При растяжении и сжатии напряжения определяются формулой (5.10). Условие прочности сечения выглядит так:

$$N/A \leq R. \quad (5.14)$$

Если материал по-разному сопротивляется растяжению и сжатию, условие (5.14) записывают в виде

$$N/A \leq R_t, \quad N/A \leq R_c. \quad (5.15)$$

В левые части ограничений (5.13), (5.14) и (5.15) следует подставлять абсолютные значения напряжений и сил без учета их знака.

Для стержня или стержневой конструкции условие прочности соблюдается при

$$\max(N/A) \leq R_t, \quad \max(N/A) \leq R_c. \quad (5.16)$$

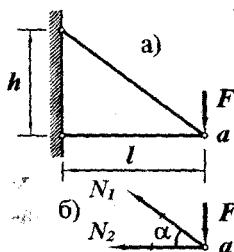
Условия прочности позволяют не только проверять конструкцию при заданной нагрузке. С их помощью можно решать и другие задачи:

- определять размеры поперечных сечений при известных материале и нагрузке,
- рассчитывать допустимый уровень воздействия при заданной конструкции и виде нагрузки,
- подбирать материал, если известны нагрузка и схема конструкции и т.п.

Рассмотрим пример решения одной из проекторочных задач.

**Пример 5.1.** Стержневая конструкция (рис. 5.26 а) при габаритных размерах  $l = 1,6$  м и  $h = 1,2$  м должна выдерживать вертикальную силу  $F = 12$  кН. Нужно запроектировать конструкцию (назначить размеры поперечных сечений): растянутый стержень сделать стальным с круглым сечением, сжатый – квадратного сечения из сосны. Расчетное сопротивление стали на растяжение  $R_t^{ст} = 220$  МПа, сосны на сжатие  $R_c^{с} = 11$  МПа.

Подготовим для последующих вычислений  $\alpha = \arctg(h/l) = \arctg(1,2/1,6) = 36,9^\circ$ ;  $\sin\alpha = 0,6$ ;  $\cos\alpha = 0,8$ .



Найдем усилия в стержнях.

Вырежем узел *a* (рис. 5.26 б), заменим действие отброшенной части на оставленную силами  $N_1$  и  $N_2$ , спроецируем силы сначала на вертикаль, затем на горизонталь:

$$N_1 \sin\alpha - F = 0, \Rightarrow N_1 = F / \sin\alpha, N_1 = 12 / 0,6 = 20 \text{ кН.}$$

Положительный результат говорит о том, что направление силы выбрано верно, наклонный стержень *растянут*.

Рис. 5.26

Проекция на горизонталь:

$$N_1 \cos\alpha + N_2 = 0, \Rightarrow N_2 = -N_1 \cos\alpha = -20 \cdot 0,8 = -16 \text{ кН.}$$

Сила  $N_2$  направлена в обратную сторону, горизонтальный стержень *сжат*.

Итак, наклонный стержень стальной, он должен воспринимать усилие 20 кН; горизонтальный – из сосны, способный держать 16 кН.

Условие прочности наклонного стержня:

$$N_1 / A_1 \leq R_t^{ст}, \text{ откуда } A_1 \geq N_1 / R_t^{ст} = 20 / 220 = 0,091 \text{ см}^2.$$

Обозначим диаметр сечения буквой  $d$ . Тогда  $A_1 = \pi d^2 / 4 \geq 0,091 \text{ см}^2$ , откуда  $d \geq \sqrt{4 \cdot 0,091 / 3,14} = 1,08 \text{ см}$ .

Для горизонтального стержня условие прочности аналогично:

$$N_2 / A_2 \leq R_c^{с}. \text{ Отсюда } A_2 \geq N_2 / R_c^{с} = 16 / 11 = 1,45 \text{ см}^2.$$

Если обозначить сторону квадрата буквой  $b$ , то  $A_2 = b^2 \geq 1,45 \text{ см}^2$ , или  $b \geq \sqrt{1,45} = 1,2 \text{ см}$ .

Таким образом, из условий прочности необходимо принять диаметр сечения стального стержня не менее 1,08 см, а сторону квадратного сечения соснового бруса не менее 1,2 см.

## 5.12. Равнонапряженный сжатый стержень

Часто при расчете конструкций, относящихся к категории стержней, приходится учитывать их собственный вес (высокие колонны, дымовые трубы, радио- и телебашни и т.п.). В них продольная сила от веса материала переменна по длине. Естественно в подобных случаях назначить переменной по длине и площадь поперечного сечения. Оптимальным является такое изменение площади, при котором напряжения во всех сечениях одинаковы.

Рассмотрим эту задачу.

Вертикальный стержень (рис. 5.27 а) воспринимает силу  $F$ . Установим, как должна изменяться площадь поперечного сечения по высоте, чтобы напряжения  $\sigma_z$  с учетом собственного веса стержня всюду были бы равными расчетному сопротивлению материала  $R_c$ .

Площадь верхнего сечения по условию прочности  $\sigma_z = F/A_0 \leq R_c$ , примем  $A_0 = F/R_c$ .

Из условия равновесия элементарного отрезка стержня (рис. 5.27 б) следует

$$R_c A(z) + \rho g A(z) dz - R_c (A(z) + dA(z)) = 0$$

( $\rho$  – плотность материала,  $g$  – ускорение свободного падения). Отсюда получаем дифференциальное уравнение

$$dA(z)/A(z) = \rho g dz/R_c.$$

Общий интеграл этого уравнения:  $\ln A(z) + C = \rho g z/R_c$ .

Постоянную интегрирования найдем из условия  $dA(z) = A_0$  при  $z = 0$ :  $C = -\ln A_0$ . После этого  $\ln(A(z)/A_0) = \rho g z/R_c$ , или

$$A(z) = A_0 e^{\rho g z/R_c}.$$

Криволинейные очертания, повторяющие эту зависимость, трудоемки в практическом исполнении, поэтому в подобных объектах принимают либо линейно переменные, либо ступенчато переменные очертания, близкие к полученным.

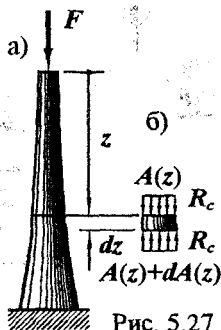


Рис. 5.27

### 5.13. Деформации при растяжении и сжатии

При растяжении и сжатии продольные и поперечные размеры стержня изменяются. В упругой стадии линейные деформации описываются законом Гука (5.4) и отношением Пуассона (5.5):

$$\varepsilon_z = \sigma_z / E, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \sigma_z / E.$$

Обозначим длину и ширину стержня до деформации соответственно  $l$  и  $b$  (рис. 5.28), после деформации —  $l_1$  и  $b_1$ . Тогда

$$l_1 - l = \Delta l, \quad b_1 - b = \Delta b. \quad (5.17)$$

$\Delta l$  — абсолютное удлинение стержня;  $\Delta b$  — абсолютное поперечное расширение<sup>1</sup>.

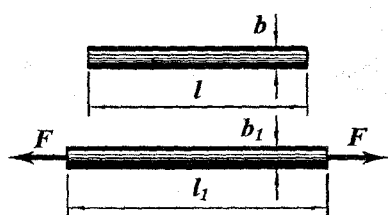


Рис. 5.28

В однородном стержне постоянного сечения деформации равномерны по длине, поэтому отношения

$$\Delta l / l = \varepsilon_z, \quad \Delta b / b = \varepsilon_x = \varepsilon_y \quad (5.18)$$

называются *относительными деформациями*:  $\varepsilon_z$  — *продольная деформация*,  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$  — *поперечные деформации*. Относительные деформации — безразмерные величины.

Из равенства (5.18) абсолютное удлинение стержня  $\Delta l = \varepsilon_z l$ . Но по закону Гука (5.4)  $\varepsilon_z = \sigma_z / E$ , следовательно  $\Delta l = \sigma_z l / E$ . Подставляя сюда напряжения (5.10), получаем формулу абсолютного удлинения

$$\Delta l = Nl / (EA). \quad (5.19)$$

Равенство (5.19) носит название *закона Гука для растянутого (сжатого) стержня*.

Произведение  $EA$  в знаменателе является жесткостной характеристикой при растяжении и сжатии (чем больше это произведение, тем меньше удлинение). Ее иногда называют *жесткостью при растяжении (сжатии)*. Жесткость всего стержня характеризуется отношением  $EA/l$ .

<sup>1</sup> При растяжении согласно формуле (5.17) “расширение” отрицательно, что свидетельствует об уменьшении поперечных размеров, при сжатии  $\Delta b$  положительно.

Поперечное расширение  $\Delta b = \varepsilon_y b = -\nu \varepsilon_z b$ . Ширина стержня после деформации  $b_1 = b + \Delta b = b - \nu \varepsilon_z b = b(1 - \nu \varepsilon_z)$ .

С изменением поперечных размеров изменяется и площадь сечения. Оценим это изменение. Площадь пропорциональна второй степени поперечного размера<sup>1</sup>.

Площади представим так:

– до деформации  $A = kb^2$ ;

– после деформации  $A_1 = k(b_1)^2 = kb^2(1 - \nu \varepsilon_z)^2$ .

Абсолютное изменение площади

$$\Delta A = A_1 - A = kb^2(1 - \nu \varepsilon_z)^2 - kb^2 = kb^2((1 - \nu \varepsilon_z)^2 - 1),$$

а относительное  $\varepsilon_A = \Delta A/A = (1 - \nu \varepsilon_z)^2 - 1 = -2\nu \varepsilon_z + \nu^2 \varepsilon_z^2$ . Второе слагаемое в полученном выражении мало по сравнению с первым. Отбросим его. Относительное изменение площади поперечного сечения  $\varepsilon_A = -2\nu \varepsilon_z$ .

Относительное изменение объема  $\varepsilon_V = \Delta V/V = (V_1 - V)/V$ .

– объем до деформации  $V = Al$ ;

– после деформации  $V_1 = A_1 l_1$ .

Но  $A_1 = A + \Delta A = A(1 + \Delta A/A) = A(1 + \varepsilon_A) = A(1 - 2\nu \varepsilon_z)$ ;

длина  $l_1 = l + \Delta l = l(1 + \Delta l/l) = l(1 + \varepsilon_z)$ .

Таким образом, объем после деформации

$$V_1 = A_1 l_1 = A(1 - 2\nu \varepsilon_z)l(1 + \varepsilon_z) = V(1 - 2\nu \varepsilon_z)(1 + \varepsilon_z).$$

Используя эти выражения, получаем

$$\varepsilon_V = (1 - 2\nu \varepsilon_z)(1 + \varepsilon_z) - 1 = -2\nu \varepsilon_z + \varepsilon_z - 2\nu \varepsilon_z^2.$$

Отбросив  $2\nu \varepsilon_z^2$  из-за малости, приходим к равенству

$$\varepsilon_V = (1 - 2\nu)\varepsilon_z. \quad (5.20)$$

У материалов, применяемых в строительстве,  $0 < \nu < 0,5$ . Поэтому при растяжении происходит увеличение их объема, при сжатии – уменьшение. Если  $\nu = 0,5$ , объем не изменяется (таким свойством обладает, например, каучук); при  $\nu = 0$  (коэффициент Пуассона близок к нулю у пробки) продольные деформации не влияют на поперечные.

Для количественной оценки деформаций рассмотрим пример.

<sup>1</sup> Площадь квадрата  $A = b^2$  ( $b$  – сторона квадрата); у круга  $A = \pi b^2/4$  ( $b$  – диаметр круга); аналогичные выражения можно записать и для сечений других форм.

**Пример 5.2.** Вычислить деформации стержня

- длиной 1 м;
- с квадратным сечением  $1 \cdot 1 \text{ см}^2$ ;
- материал стержня – сталь с  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$  и  $\nu = 0,25$ ;
- подверженного растягивающей силе  $F = 20 \text{ кН}$ .

Абсолютное удлинение

$$\Delta l = Nl/(EA) = 20 \cdot 100 / (2 \cdot 10^4 \cdot 1) = 0,1 \text{ см.}$$

Относительное удлинение  $\epsilon_z = \Delta l/l = 0,1/100 = 0,001$ .

Относительное изменение площади

$$\epsilon_A = -2\nu\epsilon_z = -2 \cdot 0,25 \cdot 0,001 = 0,0005.$$

Относительная объемная деформация

$$\epsilon_V = (1-2\nu)\epsilon_z = (1-2 \cdot 0,25) \cdot 0,001 = 0,0005.$$

Полученные результаты показывают, что *геометрические изменения, происходящие в стержне, малы по сравнению с первоначальными размерами*. Это позволяет упростить многие задачи. Так, в большинстве из них можно считать, что геометрическая схема конструкции под нагрузкой имеет то же очертание, что и в ненагруженном состоянии (длины стержней, углы между стержнями и линии действия сил не изменились).

При вычислении напряжений можно пренебречь изменением площадей сечений и в формулу (5.10) подставлять их первоначальные значения.

Однако такие упрощения возможны не всегда. В некоторых случаях они могут привести не только к существенным количественным погрешностям, но и дать качественно неверное представление о работе стержня.

Деление эффектов деформирования стержня на значимые и второстепенные – непростая процедура, требующая опыта, знаний, а порой и интуиции. Некоторые задачи подобного рода и методы оценки возможностей игнорирования влияния деформаций на результаты расчетов будут рассмотрены в дальнейшем.



## 5.14. Перемещения при растяжении и сжатии.

### Расчет на жесткость

5.14.1. В результате деформирования стержня его точки и сечения перемещаются в новые положения. Перемещения точек конструкции характеризуют ее жесткость. Поэтому определение перемещений необходимо для оценки пригодности конструкции.

Перемещение точки конструкции есть сумма деформаций. Однако слово “сумма” фигурирует здесь в очень широком смысле. Определение перемещения точки требует анализа геометрических изменений в конструкции. А этот процесс всегда индивидуален и зависит от особенностей схемы и воздействия. Для пояснения сказанного и знакомства с методами определения перемещений рассмотрим конкретные примеры.

**Пример 5.3.** Построим эпюру продольных перемещений поперечных сечений стержня, воспринимающего растягивающую силу  $F$  (рис. 5.29 а). Длина, площадь сечения и материал стержня известны.

Перемещение сечения, отстоящего от закрепленного конца на расстоянии  $z$ , равно удлинению левой части стержня. По формуле (5.19)  $w(z) = Fz/(EA)$ . Смещение  $w$  пропорционально расстоянию  $z$ . Левый конец закреплен, перемещение его равно нулю. На правом конце  $w(l) = Fl/(EA)$ .

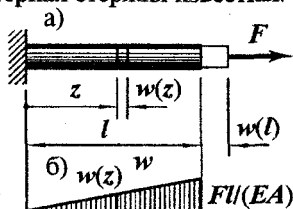


Рис. 5.29

Эпюра перемещений изображена на рис. 5.29 б.

**Пример 5.4.** Построим эпюру перемещений, вызванных собственным весом стержня (рис. 5.30 а). Известны площадь сечения  $A$ , длина стержня  $l$ , плотность  $\rho$  и модуль упругости материала  $E$ .

Воспользоваться непосредственно формулой (5.19) нельзя, так как она справедлива для стержня, нагруженного сосредоточенными силами на концах. Собственный же вес – нагрузка, распределенная по объему стержня.

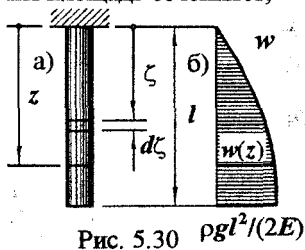


Рис. 5.30  $\rho gl^2/(2E)$

Рассмотрим бесконечно короткий отрезок длиной  $d\zeta$ , отстоящий от верхнего конца на расстоянии  $\zeta$ . Сила, растягивающая его, равна весу нижней части стержня:  $N = \rho g A(l - \zeta)$ , где  $g$  – ускорение свободного падения). Пренебрегая весом самого отрезка, его удлинение можно найти по формуле (5.19):  $\Delta d\zeta = \rho g A(l - \zeta)d\zeta/(EA)$ .

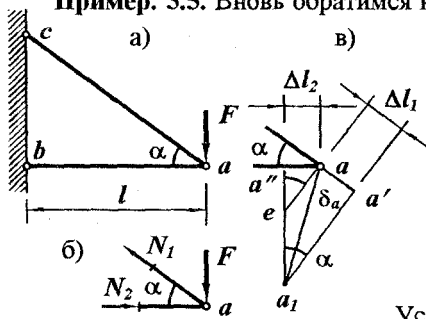
Вертикальное перемещение  $w(z)$  сечения, отстоящего на расстоянии  $z$  от верха, равно удлинению верхней части – сумме удлинений элементарных отрезков, содержащихся в ней:

$$w(z) = \int_0^z \Delta d\zeta = \int_0^z (\rho g A(l - \zeta)d\zeta/(EA)) = \rho g(lz - z^2/2)/E.$$

Изменение продольных перемещений описывается квадратной параболой с  $w(0) = 0$ ,  $w(l) = \rho g l^2/(2E)$ .

Для определения направления выпуклости кривой продифференцируем  $w(z)$  по  $z$ :  $w'(z) = \rho g(l - z)/E$ . При  $z = l$  производная  $w'(l) = 0$ . Эпюра перемещений изображена на рис. 5.30 б.

**Пример. 5.5.** Вновь обратимся к стержневой системе (рис. 5.31



а), рассчитанной на прочность в примере 5.1. Определим перемещение узла  $a$  при

$$F = 12 \text{ кН},$$

$$l = 1,6 \text{ м}, h = 1,2 \text{ м},$$

$$A_1 = 0,91 \text{ см}^2, A_2 = 14,5 \text{ см}^2.$$

Модуль упругости стали равен

$$E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа},$$

$$\text{у сосны он } E_2 = 10^4 \text{ МПа}.$$

Усилия в стержнях (рис. 5.31 б)

Рис. 5.31  $N_1 = 20 \text{ кН}$  и  $N_2 = 16 \text{ кН}$  (см. пример

5.1). Наклонный стержень (будем считать его первым) растянут, горизонтальный (второй) сжат.

По закону Гука (5.19) удлинение первого стержня

$$\Delta l_1 = N_1 l_1 / (E_1 A_1).$$

Учитывая, что  $l_1 = l / \cos \alpha = 1,6 / 0,8 = 2 \text{ м}$ , находим

$$\Delta l_1 = 20 \cdot 200 / (2 \cdot 10^4 \cdot 0,91) = 0,22 \text{ см}.$$

Укорочение горизонтального стержня

$$\Delta l_2 = N_2 l_2 / (E_2 A_2) = 16 \cdot 160 / (10^3 \cdot 14,5) = 0,18 \text{ см}.$$

Чтобы найти новое положение узла  $a$ , нужно из центра  $c$  провести дугу радиусом  $l_1 + \Delta l_1$  и из центра  $b$  радиусом  $l_2 - \Delta l_2$ . Точка пересечения дуг и есть новое положение узла.

Но, учитывая малость деформаций, можно упростить геометрическое построение – дуги заменить перпендикулярами:  $a'a_1$  к стержню 1 и  $a''a_1$  к стержню 2 (рис. 5.31 в). Определение перемещения узла  $a$  (отрезка  $aa_1 = \delta_a$ ) упростилось намного.

Горизонтальная часть перемещения  $u_a = \Delta l_2 = 0,18$  см. Для определения вертикальной составляющей проведем вспомогательную прямую  $ae$ . Тогда

$$v_a = a'e + ea_1 = \Delta l_2 \operatorname{tg} \alpha + \Delta l_1 / \sin \alpha = 0,18/0,75 + 0,22/0,6 = 0,61 \text{ см.}$$

Полное перемещение  $\delta_a = \sqrt{u_a^2 + v_a^2} = \sqrt{0,18^2 + 0,61^2} = 0,64 \text{ см.}$

Приведенные примеры проиллюстрировали индивидуальные приемы определения перемещений, вызванных продольными деформациями стержней. Используя примененные здесь методы, можно решать аналогичные задачи при других видах нагрузки и геометрических схемах конструкций.

5.14.2. Условие жесткости ограничивает деформации или перемещения. Его записывают в разных видах в зависимости от ограничиваемой характеристики деформированного состояния, например,

$$\delta \leq [\delta], \quad \varepsilon \leq [\varepsilon]. \quad (5.21)$$

Здесь  $\delta$  – перемещение какой-либо точки,  $\varepsilon$  – деформация, вызванные внешней нагрузкой;  $[\delta]$  и  $[\varepsilon]$  – допустимые значения перемещения или деформации.

## 5.15. Работа внешних и внутренних сил.

### Потенциальная энергия деформации при растяжении и сжатии

Так как с процессе деформирования стержня точки приложения сил перемещаются, *внешние силы совершают работу*. Работа силы  $F$ , приложенной к концу стержня (5.32 а),

$$W = \int_0^{\Delta l} F_l dw. \quad (5.22)$$

Геометрическими образами работы являются площади фигур, заштрихованных на рис. 5.32 б, в. Если перемещение пропорционально силе (рис. 5.32 б), то  $W = F\Delta l/2$ .

Работа силы, изменяющейся пропорционально перемещению точки ее приложения, равна половине произведения конечного значения силы на конечное значение перемещения.

Если сила и перемещение точки ее приложения не пропорциональны друг другу, то работу следует определять из равенства (5.22).

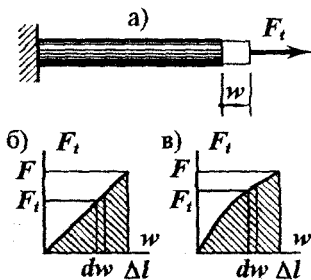


Рис. 5.32

В результате деформирования стержня изменяются внутренние усилия и межатомные расстояния – внутренние силы также совершают работу. Но так как внутренние силы – силы сопротивления, их работа отрицательна. При статическом нагружении (медленном, когда силы инерции пренебрежимы) внешние и внутренние силы совершают одинаковую работу (энергетическими затратами, связанными с термическими, электрическими, химическими и другими изменениями, можно также пренебречь).

В результате работы внешних сил накапливается *потенциальная энергия деформации*. Доля потенциальной энергии деформации в работе внешних сил зависит от характера нагружения (статическое, динамическое) и степени напряженного состояния (упругая стадия деформирования или упругопластическая). При статическом нагружении упругих конструкций потенциальная энергия деформации равна работе внешних сил:  $U = W$ .

Потенциальную энергию деформации можно найти и так (см. формулу (5.8)):  $U = \int_V (\sigma_z^2 / 2E) dV = \int_l (\int_A \sigma_z^2 dA) dz / (2E)$ . Учитывая равенство (5.10), получаем  $U = \int_l N^2 (\int_A dA) dz / (2EA^2)$ . Но  $\int_A dA = A$ .

Отсюда потенциальная энергия деформации стержня

$$U = N^2 l / (2EA). \quad (5.24)$$

Для стержневой конструкции, состоящей из  $n$  стержней, формула потенциальной энергии деформации принимает вид

$$U = \sum_{i=1}^n N_i^2 l_i / (2E_i A_i). \quad (5.25)$$

Формулу (5.25) можно применять, если  $N_i$ ,  $l_i$ ,  $E_i$  и  $A_i$  в пределах  $i$ -го стержня постоянны.

## 5.16. Понятие о коэффициенте запаса

*Коэффициент запаса* является одним из количественных показателей надежности конструкции. В нормах расчета и проектирования строительных конструкций это понятие дифференцировано и отдельно отражает

- изменчивость механических свойств материала;
- возможность отклонения нагрузки от предполагаемой;
- условия работы конструкции;
- достоверность теоретических методов прогнозирования возможных состояний конструкции и т.п.

Не обладая необходимыми сведениями, будем толковать этот термин упрощенно. *Под коэффициентом запаса будем понимать число, показывающее, во сколько раз можно увеличить нагрузку до достижения предельного состояния.*

Из приведенной формулировки следует, что коэффициент запаса связан с видом предельного состояния. Можно говорить о коэффициенте запаса *прочности*, коэффициенте запаса *жесткости*. В дальнейшем будут введены новые понятия предельных состояний и вместе с ними новые понятия коэффициентов запаса.

Согласно данному определению коэффициент запаса

$$n = F_u / F, \quad (5.26)$$

$F_u$  – предельный (по оговоренному критерию) параметр нагрузки;  $F$  – параметр действующей нагрузки.

В тех случаях, когда критерий предельного состояния изменяется пропорционально нагрузке, отношение сил можно заменить отношением критериев. Например, *коэффициент запаса прочности*  $n = \sigma_u / \sigma_{max}$ . Приняв в качестве предельного напряжения нормативное сопротивление материала, приходим к выражению

$$n = R_n / \sigma_{max}. \quad (5.27)$$

Здесь  $\sigma_{max}$  – максимальное напряжение в конструкции от действующей нагрузки.

Если нормативные сопротивления на растяжение и сжатие у материала разные, отдельно определяют запас прочности по растяжению  $n_t = R_{nt} / \max \sigma_t$ , и по сжатию  $n_c = R_{nc} / \max \sigma_c$ . Действительный – меньший из них, он определяет запас прочности конструкции.

Осевое растяжение и сжатие являются простейшими видами нагружения. По этой причине они достаточно хорошо изучены экспериментально. Лабораторные исследования показали, что при нагружении стержня

- изменяются внутренние силы;
- изменяются размеры стержня;
- накапливается потенциальная энергия деформации;
- скорость нарастания деформаций зависит от величины напряжений и условий, в которых стержень воспринимает нагрузку.

#### Использование

- гипотезы плоских сечений,
- зависимости напряжений от деформаций,
- законов статики

позволило получить важные приближенные решения задач о напряженном и деформированном состоянии стержня – аппарат теоретического прогнозирования поведения элементов стержневых строительных конструкций.

## 6. Кручение

Кручение – это такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают крутящие моменты, а следовательно, и касательные напряжения. Как и в предыдущем разделе

– познакомимся с результатами испытаний материалов на сдвиг;

– решим простейшие задачи о кручении стержней с сечением круглой или кольцевой формы;

– используем математическую аналогию задач изгиба мембран и кручения стержней для получения представлений о распределении напряжений в различных типах некруглых сечений;

– приведем основные положения и формулы расчетов стержневых элементов строительных конструкций на кручение.

### 6.1. Испытания на сдвиг.

#### Расчетное сопротивление материала на срез.

#### Условие прочности

6.1.1. Для испытаний материалов на сдвиг используют тонкостенные трубчатые образцы и нагружают их крутящими моментами (рис. 6.1 а).

В поперечных сечениях таких образцов возникают касательные напряжения  $\tau_{zs}$  (рис. 6.1 б). Из-за малой толщины стенки и кольцевой формы сечения напряженное состояние трубок однородное.

Касательные напряжения по свойству парности возникают и в радиальных

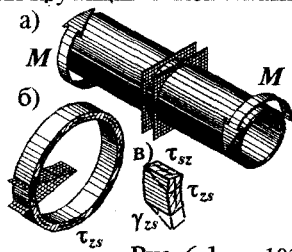


Рис. 6.1 103

продольных площадках ( $\tau_{xz}$  на рис. 6.1 в). Частный случай плоского напряженного состояния, при котором существуют площадки, подверженные касательным напряжениям и свободные от нормальных напряжений, называется **чистым сдвигом**.

В процессе нагружения образца его поперечные сечения поворачиваются вокруг продольной оси; прямые углы, образованные продольными и поперечными линиями, изменяются. Количественной мерой деформации при чистом сдвиге является **относительный сдвиг**  $\gamma_{xz}$  – изменение прямого угла между продольными радиальными и поперечными площадками.

Диаграмму сдвига материала строят в осях  $\tau$ – $\gamma$ .

У пластичных материалов диаграммы сдвига, растяжения и сжатия аналогичны (на рис. 6.2 приведена диаграмма сдвига малоуглеродистой стали). Есть участок упругих деформаций ( $pa$ ), площадка текучести ( $bc$ ), участок упрочнения ( $cd$ ). Ниспадающий участок в конце диаграммы ( $de$ ) объясняется нарушением кольцевой формы сечения, что квалифицируют как разрушение.

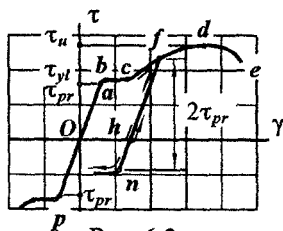


Рис. 6.2

Ординаты точек  $a$ ,  $b$  и  $d$  определяют характеристики прочности:

- $\tau_{pr}$  – предел пропорциональности;
- $\tau_{yt}$  – предел текучести;
- $\tau_u$  – предел прочности при сдвиге.

Испытания обнаруживают свойство упругой разгрузки (линия  $fh$ ), наклеп ( $hf > Oa$ ), эффект Баушингера ( $fn \approx ap$ ).

Механические свойства, проявляющиеся при растяжении и сжатии пластичных материалов, повторяются и при сдвиге.

У хрупких материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию, диаграммы сдвига качественно ближе к диаграммам растяжения.

Близость начальных участков диаграмм сдвига к линейности позволило обобщить закон Гука и на этот вид деформирования:

$$\gamma = \tau/G. \quad (6.1)$$

Здесь  $G$  – *модуль сдвига*. Модуль сдвига – механическая константа материала. Его значения приведены в справочных источниках.



Аналогично равенству (5.8) удельная потенциальная энергия деформации при сдвиге равна

$$u = \tau\gamma/2 = \tau^2/2G. \quad (6.2)$$

6.1.2. В соответствии со статистической методикой, учитывающей разброс механических характеристик, направленной на обеспечение запаса прочности и описанной в разделе 5.6, вводят *нормативное и расчетное сопротивления материала на срез*. Их обозначают<sup>1</sup>  $R_{ns}$  и  $R_s$ .

Условие прочности материала на срез записывают так:

$$\tau \leq R_s. \quad (6.3)$$

Оно ограничивает возможность достижения предельного состояния материала. Критический комментарий, данный условию (5.9), в равной мере относится и к ограничению (6.3).

## 6.2. Напряжения

### в круглом или кольцевом поперечном сечении стержня

Обратимся к задаче о напряжениях в поперечном сечении стержня. Поскольку согласно лабораторным и теоретическим исследованиям напряжения при кручении в значительной мере зависят от формы сечения, ограничимся простейшими типами – кругом и кольцом. Установим

- какие напряжения возникают в сечении (нормальные, касательные или и те, и другие);
- как они направлены и распределены по сечению;
- как напряжения зависят от крутящего момента, формы и размеров сечения.

#### Геометрическая сторона задачи

Если на боковую поверхность стержня нанести продольные и поперечные линии (рис. 6.3 а), загрузить его моментами (рис. 6.3 б), то по искажению сетки можно предположительно судить о деформациях во внутренних точках. Лабораторные исследования показали, что

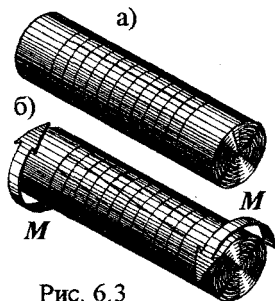


Рис. 6.3

<sup>1</sup> Индекс от англ. *shift* – сдвиг.

- поперечные линии, плоские до деформации, остались плоскими и после деформации;
- расстояния между поперечными линиями не изменились;
- прямоугольники, образованные продольными и поперечными линиями, приняли форму параллелограммов.

Наблюдения и замеры поверхностных деформаций позволили обосновать и принять предпосылки о геометрических изменениях внутри стержня. Теория кручения стержней с сечением круглой и кольцевой формы опирается на предположение о том, что поперечные сечения поворачиваются вокруг продольной оси, как жесткие диски, т.е.

- в процессе деформирования стержня они остаются плоскими;
- расстояния между любыми двумя точками одного сечения не изменяются.

С точностью введенной предпосылки можно утверждать, что линейные деформации в трех взаимно перпендикулярных направлениях, соответствующих цилиндрической координатной системе  $z, r, s$ , отсутствуют:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_r = \varepsilon_s = 0. \quad (a)$$

Для описания сдвиговой деформации вырежем из стержня элемент

- двумя бесконечно близкими поперечными плоскостями
- и двумя радиальными плоскостями (рис. 6.4).

Сравним вид элемента до деформации (сплошные линии) и после

нее (штриховые линии), совместив невидимые на рисунке треугольные грани:

- радиус  $cb$  повернулся на угол  $d\varphi$ ;
- точка  $k$  сместилась перпендикулярно радиусу в положение  $k_1$ ;
- угол между волокном  $lk$  и поперечным сечением (до деформации прямой) изменился на  $\gamma_{zs}$ .

Из треугольников  $klk_1$  и  $kck_1$  получаем:  $kk_1 = \gamma_{zs}dz$ ,  $kk_1 = rd\varphi$ , или  $\gamma_{zs}dz = rd\varphi$ , откуда  $\gamma_{zs} = rd\varphi/dz$ . (б)

Здесь  $\gamma_{zs}$  - относительный сдвиг в плоскости, перпендикулярной радиусу;  $d\varphi/dz$  - относительный угол закручивания.

Равенства (а) и (б) описывают деформации в сечении стержня:  
 – удлинения в продольном, радиальном и окружном направлениях отсутствуют;

– в плоскостях, перпендикулярных радиусам, происходят сдвиги;

– величины сдвиговых деформаций растут пропорционально удаленности точки от центра сечения.

### Физическая сторона задачи

Отсутствие линейных деформаций свидетельствует об отсутствии нормальных напряжений (в указанных направлениях):

$$\sigma_z = \sigma_r = \sigma_s = 0.$$

Касательное напряжение связано с относительным сдвигом законом Гука (6.1):

$$\tau_{zs} = G\gamma_{zs}. \quad (в)$$

Напряжение  $\tau_{zs}$  как и сдвиг  $\gamma_{zs}$  направлено перпендикулярно радиусу, проведенному в точку.

### Статическая сторона задачи

Запишем условие статической эквивалентности (см. равенства (3.1)) между касательными напряжениями и крутящим моментом (рис. 6.5).

$$M_z = \int_A \tau_{zs} r dA. \quad (г)$$

Уравнения (а) ... (г) позволяют решить поставленную задачу.

Подстановка выражения (б) в (в) показывает, что

$$\tau_{zs} = G r d\phi/dz. \quad (д)$$

Подставляя теперь равенство (д) в условие (г), находим

$$M_z = \int_A \tau_{zs} r dA = G(d\phi/dz) \int_A r^2 dA.$$

Но  $\int_A r^2 dA = J_p$  – полярный момент инерции сечения. Итак,

$$M_z = G J_p d\phi/dz. \quad (6.4)$$

Поделив левые и правые части равенств (д) и (6.4), получаем окончательный результат

$$\tau_{zs} = M_z r / J_p. \quad (6.5)$$

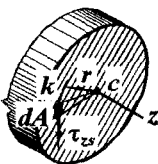


Рис. 6.5

В поперечном сечении круглой или кольцевой формы при кручении

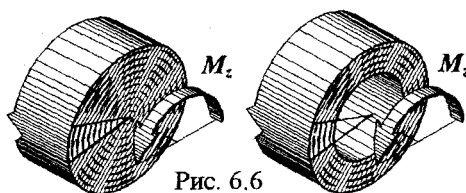


Рис. 6.6

— возникают только касательные напряжения;  
— линии их действия — концентрические окружности, центры которых совпадают с центром сечения;

— напряжения растут по мере удаления точки от центра;  
— величина напряжения прямо пропорциональна крутящему моменту, расстоянию от точки до центра и обратно пропорциональна полярному моменту инерции сечения.

Распределение напряжений в круглом и кольцевом сечениях проиллюстрировано рис. 6.6.

Формула (6.5) справедлива

— до тех пор, пока наибольшие касательные напряжения не превысят предел пропорциональности (при ее выводе использован закон Гука);

— независимо от материала стержня (правда, в процессе вывода формулы негласно использовано предположение об однородности и изотропии материала, следовательно это ограничение следует иметь в виду);

— в местах, удаленных от точек приложения внешних сил (см. принцип Сен-Венана).

При нарушении какого-либо из отмеченных ограничений распределение напряжений в сечении будет иным.

### 6.3. Напряженное состояние при кручении.

#### Расчет на прочность

6.3.1. Напряженное состояние материала при кручении стержня в разных точках сечения однотипно — чистый сдвиг. Однако величины напряжений в разноудаленных от центра точках различны. Исследуем напряженное состояние в некоторой произвольной точке  $k$  (рис. 6.4, 6.5, 6.7 а). Выясним,

- как ориентированы в ней главные площадки;
- каковы главные напряжения;

– в каких площадках возникают наибольшие касательные напряжения;

– чему равны максимальные касательные напряжения.

Для рассматриваемого типа плоского напряженного состояния

олицетворением всевозможных площадок, проходящих через точку  $k$ , служит боковая поверхность элементарного цилиндра (рис. 6.7 б, в). В соответствии с формулами

(4.2) и (4.3)<sup>1</sup>  $\sigma_\alpha = -\tau_{zs} \sin 2\alpha$

(рис. 6.7 б),  $\tau_\alpha = -\tau_{zs} \cos 2\alpha$

(рис. 6.7 в). Отсюда следует:



Рис. 6.7

– главные площадки наклонены к поперечному сечению под  $45^\circ$  (в плоскости, перпендикулярной радиусу);

– главные напряжения  $\sigma_{max} = \tau_{zs}$

(растягивающее),  $\sigma_{min} = -\tau_{zs}$  (такое же по величине, но сжимающее);

– наибольшие касательные напряжения возникают в площадках, лежащих в плоскости поперечного сечения, и перпендикулярных им радиальных площадках;

– наибольшие касательные напряжения  $\tau_{max} = \tau_{zs}$ .

6.3.2. Формула (6.5) и проведенный анализ напряженного состояния свидетельствует, что в круглом или кольцевом сечении

– опасными являются точки, наиболее удаленные от центра;

– максимальные касательные напряжения возникают в площадках, лежащих в поперечном сечении.

В соответствии с формулой (6.5)  $\tau_{max} = M_z r_{max} / J_p = M_z D / (2J_p)$ , где  $D$  – диаметр сечения (у кольца – наружный диаметр). Если объединить геометрические характеристики сечения и обозначить

$$2J_p / D = W_p, \quad (6.6)$$

<sup>1</sup> Знак “минус” введен потому, что направление касательного напряжения в рассматриваемом случае противоположно принятому положительным при выводе используемых формул.

то формула максимальных касательных напряжений при кручении примет вид

$$\tau_{max} = M_z / W_p. \quad (6.7)$$

Новая геометрическая характеристика  $W_p$  носит название *полярного момента сопротивления сечения*. У круга согласно формулам (6.6) и (2.17)

$$W_p = \pi D^3 / 16; \quad (6.8)$$

у кольца (2.19)

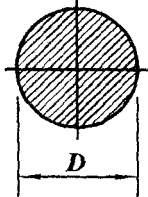
$$W_p = \pi D^3 (1 - \delta^4) / 16. \quad (6.9)$$

В соответствии с ограничением (6.3) и формулой (6.7) условие прочности материала при кручении стержня записывают так:

$$\tau_{max} = M_z / W_p \leq R_s. \quad (6.10)$$

Левая и средняя часть условия (6.10) — напряжения в опасных точках от внешней нагрузки. Таким образом, максимальные касательные напряжения, вызванные внешней нагрузкой, не должны превышать расчетного сопротивления материала на срез.

**Пример 6.1.** Подберем диаметр стержня (рис. 6.8), воспринимающего крутящий момент 220 Нм, если расчетное сопротивление материала на срез  $R_s = 150$  МПа.



Из условия прочности (6.10) требуемый момент сопротивления  $W_p \geq M_z / R_s = 220 / (150 \cdot 10^6) = 1,47 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ . У круга момент сопротивления (6.8)  $W_p = \pi D^3 / 16$ . Отсюда  $D \geq \sqrt[3]{16 W_p / \pi} = \sqrt[3]{16 \cdot 1,47 \cdot 10^{-6} / 3,14} = 1,96 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ .

Рис. 6.8 Принимаем  $D = 2$  см.

## 6.4. Деформации и перемещения при кручении.

### Расчет на жесткость

#### 6.4.1. При кручении (рис. 6.9)

— элементарные параллелепипеды с ребрами, параллельными цилиндрическим координатам  $z$ ,  $r$ ,  $s$  претерпевают деформацию сдвига: поперечные грани перемещаются, оставаясь в плоскости сечения;

— стержень закручивается;

— поперечные сечения поворачиваются как жесткие диски вокруг оси стержня.

Количественной мерой сдвиговой деформации является относительный сдвиг, который по закону Гука (6.1) пропорционален касательному напряжению:  $\gamma_{zs} = \tau_{zs} / G$ .

Мерой интенсивности деформирования стержня является *относительный угол закручивания*  $\theta = d\varphi/dz$ . По равенству (6.4)

$$\theta = d\varphi/dz = M_z/(GJ_p). \quad (6.11)$$

Пропорциональность деформации ( $\theta$ ) усилию ( $M_z$ ) – утверждение Гука. Поэтому равенство (6.11) – представляет собой закон Гука при кручении.

Взаимный поворот крайних сечений участка – это *угол закручивания*. Из равенства (6.11)  $d\varphi = M_z dz/(GJ_p)$ , откуда  $\varphi(l) = \int_0^l M_z dz/(GJ_p)$ .

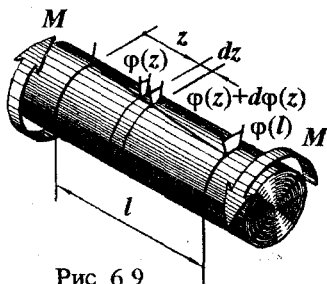


Рис. 6.9

В стержне постоянного сечения при неизменном крутящем моменте

$$\varphi(l) = M_z l/(GJ_p). \quad (6.12)$$

Формула (6.12) является еще одной разновидностью закона Гука при кручении.

Произведение  $GJ_p$ , стоящее в знаменателях равенств (6.11) и (6.12), носит название *жесткости при кручении*.

В результате закручивания стержня поперечные сечения поворачиваются вокруг продольной оси. Мерой смещения сечения является *угол поворота*. Угол поворота – сумма углов закручивания от закрепленного места до рассматриваемого.

6.4.2. Расчет на жесткость при кручении производят по условиям

$$\theta \leq [\theta] \quad \text{или} \quad \varphi \leq [\varphi] \quad (6.13)$$

в зависимости от того, на какую характеристику деформации установлено ограничение. В условиях (6.13)  $\theta$  и  $\varphi$  – относительный и полный углы закручивания или угол поворота, вызванные внешней нагрузкой,  $[\theta]$  и  $[\varphi]$  – допускаемые их значения.

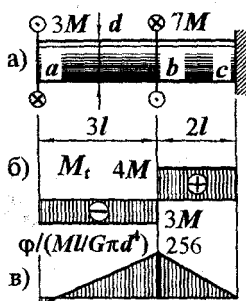
**Пример 6.2.** Определим нагрузку, при которой углы поворота стального стержня (рис. 6.10 а) с  $l = 40$  см и  $d = 8$  см не превысят  $3^\circ$ .

Первый этап решения – построение эпюры крутящего момента. Она изображена на рис. 6.10 б.

Второй этап – построение эпюры углов поворота сечений.

Правый конец стержня закреплен. Угол поворота сечения с  $\varphi_c = 0$ .

Сечение  $b$  повернется на величину угла закручивания участка



$$bc: \varphi_b = \varphi_{bc}. \text{ По закону Гука } \varphi_{bc} = M_z l_{bc} / (GJ_p) = 4M \cdot 2l / (G\pi d^4 / 32) = 256MU / (G\pi d^4).$$

Угол поворота сечения  $a$  равен углу поворота сечения  $b$  минус угол закручивания участка  $ab$ :  $\varphi_a = \varphi_b - \varphi_{ab} = 256MU / (G\pi d^4) - [3M \cdot 3l / (G\pi d^4 / 32)] = -32MU / (G\pi d^4)$ .

Эпюра углов поворота сечений изображена на рис. 6.10 в.

Из эпюры видно, что больше других повернется сечение  $b$ . Ограничивая его:

$$\varphi_b = 256MU / (G\pi d^4) \leq [\varphi],$$

где  $([\varphi] = 3^\circ = 0,0523 \text{ рад.})$ , получаем  $M \leq [\varphi] G\pi d^4 / (256l) = 0,0523 \cdot 8000 \cdot 3,14 \cdot 8^4 / (256 \cdot 40) = 526 \text{ кНсм.}$

## 6.5. Потенциальная энергия деформации при кручении

Имея формулы касательных напряжений (6.5) и удельной потенциальной энергии при сдвиге (6.2), нетрудно определить потенциальную энергию деформации стержня при кручении. Действительно,

$$\begin{aligned} U &= \int_V u dV = \int_V (\tau_{zs}^2 / 2G) dV = \int_V \left( \int_A (M_z r / (2GJ_p))^2 dA \right) dz = \\ &= \int_A (M_z^2 / (2GJ_p)) \left( \int_A r^2 dA \right) dz. \text{ Но } \int_A r^2 dA = J_p. \text{ Отсюда} \\ U &= M_z^2 l / (2GJ_p). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Для конструкции из  $n$  стержней, или стержня с  $n$  участками формула потенциальной энергии деформации принимает вид

$$U = \sum_{i=1}^n M_{zi}^2 l_i / (2GJ_{pi}). \quad (6.15)$$

Формулу (6.15) можно применять, если  $M_{zi}$ ,  $G_i$  и  $J_{pi}$  в пределах  $i$ -го стержня (участка) постоянны.

## 6.6. Кольцо – оптимальная форма сечения при кручении

Из-за неравномерного распределения напряжений при кручении прочностные свойства материала, расположенного вблизи центральной зоны сечения, используются не полностью. Поэтому целесообразно материал изъять из центра и добавить к периферийной части. В итоге при сохранении прочности уменьшается расход материала.



Согласно условию прочности (6.10) круглое и кольцевое сечения (рис. 6.11) способны воспринять одинаковые крутящие моменты, если полярные моменты сопротивления  $W_p$  у них равны:

$$\pi D_1^3/16 = \pi D_2^3(1 - \delta^4)/16.$$

Отсюда

$$D_2/D_1 = (1 - \delta^4)^{-1/3}.$$

Верхняя кривая на рис. 6.12 показывает, во сколько раз внешний диаметр равнопрочного кольцевого сечения превышает диаметр круга при разных отношениях  $\delta = d/D_2$ . Так, если заменить круг кольцом, например, с  $\delta = 0,8$ , то его наружный диаметр следует принять  $D_2 = 1,2 D_1$ .

Расход материала пропорционален площади сечения. Поэтому экономию материала можно оценить отношением

$$A_2/A_1 = D_2^2(1 - \delta^2)/D_1^2.$$

Соответствующая этому равенству

кривая также изображена на рис. 6.12. У заменяющего круг кольца с  $\delta = 0,8$  диаметр  $D_2 = 1,2D_1$  — на 20% больше, площадь же  $A_2 = 0,512A_1$  уменьшена почти вдвое. Если круг заменить кольцом с  $\delta = 0,95$ , то  $D_2 = 1,75D_1$ , площадь  $A_2 = 0,3A_1$ . Чем тоньше кольцо, тем больше экономия материала.

Отметим, что отношение полярных моментов инерции равнопрочных кольца и круга  $J_{p2}/J_{p1} = D_2/D_1$ . Восходящая кривая отношения диаметров говорит о том, что с заменой круга кольцом увеличивается и жесткость стержня.

Несмотря на то, что с ростом  $\delta$  растет экономия материала, нельзя беспределно приближаться к  $\delta = 1$ , так как кольцо станет чрезмерно тонкостенным. Возникнет опасность искривления сечения в процессе кручения. О качественном описании подобных процессов и количественной их оценке — в последующих разделах курса.

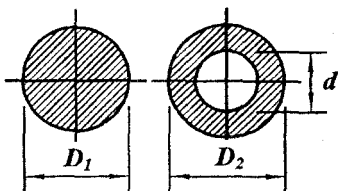


Рис. 6.11

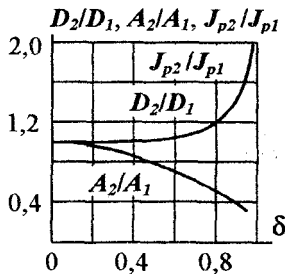


Рис. 6.12

## 6.7. Понятие о свободном и стесненном кручении.

### Мембранная аналогия

6.7.1. В задаче о кручении стержня круглого или кольцевого поперечного сечения последние рассматривались, как жесткие диски. Основанием такой предпосылки служили лабораторные испытания.

Аналогичные наблюдения и замеры деформаций показывают, что поперечные сечения некруглой формы в процессе закручивания стержня искривляются — депланируются. Оснований для введения гипотезы плоских сечений нет.

Депланация прямоугольного сечения показана на рис. 6.13 а. Поверхность, которую представляет собой депланированное сечение, состоит из восьми треугольных областей, разделенных осями симметрии прямоугольника и его диагоналями. Знаки депланаций в соседних областях различны: выпуклые области соседствуют с вогнутыми.

Депланацию сечений тонкостенных стержней закрытого профиля иллюстрирует рис. 6.13 б, открытого — рис. 6.13 в. Прямолinéйные участки сечений остаются прямолинейными, но выходят из начальной плоскости. Знаки продольных смещений углов различны: один наружу, соседний внутрь.

Если продольные перемещения точек происходят беспрепятственно (свободная депланация), то нормальные напряжения в сечении не возникают. В таком случае кручение называют *свободным* или *чистым*. Если же депланация стеснена, то в поперечных сечениях наряду с касательными возникают и нормальные напряжения. Кручение носит название *стесненного*.

Решение задачи о кручении стержня с сечением некруглой формы основано на более общих геометрических предпосылках и сводится к сравнительно сложным уравнениям теории упругости.

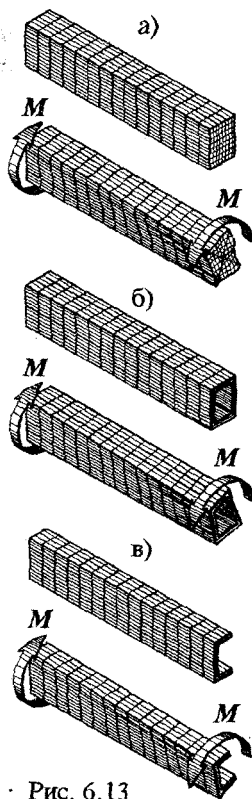


Рис. 6.13

6.7.2. В естествознании нередко встречаются совершенно различные по своей сущности явления, приводящиеся к одной и той же математической задаче. Уравнения, описывающие эти явления, одинаковы (сравни, например, формулы разделов 2 и 4). Наличие математической аналогии позволяет изучение одного процесса заменить изучением другого.

Задача о кручении стержня с математической точки зрения аналогична другой задаче – деформации гибкой упругой мембраны под равномерным давлением. Эта аналогия устанавливает, что, если

- в жесткой невесомой пластинке вырезать отверстие, повторяющее сечение стержня, подверженного кручению,

- затянуть это отверстие пленкой,

- нагрузить пленку давлением, то

- направление касательного напряжения в рассматриваемой точке сечения стержня совпадает с касательной к линии уровня (параллельной плоскости пластины) изогнутой поверхности пленки в соответствующей точке;

- величина касательного напряжения пропорциональна тангенсу угла между линией наибольшего ската (касательной к пленке и перпендикулярной линии уровня) и плоскостью отверстия.

Отмеченные положения мембранной аналогии позволяют

- установить направление потока касательных напряжений;

- представить картину распределения напряжений;

- выявить опасные точки.

Полученная таким образом информация предоставляет возможность в отдельных случаях ввести необходимые предпосылки и решить задачу. Часто пользуются готовыми решениями теории упругости. В итоге появляется возможность вычисления напряжений и деформаций, проверки прочности материала и жесткости стержня.

## 6.8. Свободное кручение стержней массивного сечения.

### Прямоугольное сечение

К массивным относят сечения с соизмеримыми высотой и шириной. Рассмотрим стержень прямоугольного сечения.

Распределение касательных напряжений установим с помощью мембранной аналогии (рис. 6.14 а). Из нее следует:

– в точках, расположенных на контуре сечения, напряжения параллельны соответствующим сторонам (линии уровня, эллипсообразные вблизи вершины, по мере приближения к краю отверстия трансформируются в прямоугольник);

– напряжение в центре сечения равно нулю (все касательные линии к изогнутой поверхности пленки в ее вершине параллельны плоскости пластины);

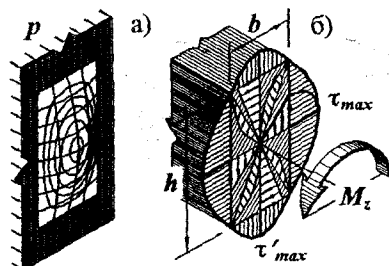


Рис. 6.14

– наибольшие касательные напряжения возникают в точках, лежащих посередине длинных сторон прямоугольника (здесь максимальные углы между линиями наибольшего ската и плоскостью пластины);

– в точках, расположенных посередине коротких сторон напряжения также достигают значительных величин;

– в угловых точках сечения напряжения равны нулю (что, впрочем, вытекает из свойства парности касательных напряжений).

Эпюры касательных напряжений в частных направлениях показаны на рис. 6.14 б.

Формулы для определения напряжений и деформаций:

Максимальные касательные напряжения

Таблица 6.1

$h/b$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1,0	0,140	0,208	1,0
1,5	0,294	0,346	0,859
2,0	0,457	0,493	0,795
3,0	0,790	0,801	0,753
4,0	1,123	1,128	0,745
6,0	1,789	1,789	0,743
8,0	2,456	2,456	0,742
10,0	3,123	3,123	0,742

$$\tau_{max} = M_z / W_t \quad (6.16)$$

Здесь  $W_t$  – геометрическая характеристика, называемая *моментом сопротивления при свободном кручении*,

$$W_t = \beta b^3, \quad (6.17)$$

$b$  – меньшая сторона прямоугольника.

Напряжения посередине коротких сторон  $\tau'_{max} = \gamma \tau_{max}$ . (6.18)

Относительный угол закручивания

$$\theta = d\phi/dz = M_z / GJ_t \quad (6.19)$$

В этой формуле  $J_t$  – *момент инерции при свободном кручении*,

$$J_t = \alpha b^4. \quad (6.20)$$

В формулах (6.17), (6.18) и (6.20)  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  – безразмерные коэффициенты, зависящие от отношения большей стороны прямоугольника к меньшей. Их значения приведены в табл. 6.1.

Напряжения и деформации в стержнях с сечениями иной формы также определяются по формулам (6.16) и (6.19). Но моменты инерции и моменты сопротивления у них иные. Формулы  $W_t$  и  $J_t$  наиболее распространенных типов сечений приведены в справочной литературе.

**Пример 6.3.** Определить допустимый крутящий момент  $[M_z]$ , если сечение стержня – прямоугольник  $6 \cdot 10 \text{ см}^2$ , материал – сталь 09Г2С ( $R_s = 195 \text{ МПа}$ ,  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ); допустимый относительный угол закручивания  $[\theta] = 5^\circ/\text{м}$ .

Согласно условию прочности (6.10) запишем  $M_z \leq R_s \cdot W_t$ . По равенству (6.17)  $W_t = \beta b^3$ . Из таблицы 6.1  $\beta(h/b = 1,5) = 0,346$ ,  $\beta(h/b = 2) = 0,493$ ; по линейной интерполяции,  $\beta(h/b = 10/6 = 1,667) = 0,346 + (0,493 - 0,346) \cdot 0,167/0,5 = 0,394$ . Теперь

$$W_t = \beta b^3 = 0,394 \cdot 6^3 = 85,1 \text{ см}^3.$$

По условию прочности  $M_z \leq R_s \cdot W_t = 195 \cdot 10^3 \cdot 85,1 \cdot 10^{-6} = 16,6 \text{ кНм}$ .

Условие жесткости (6.13) при подстановке в него формулы (6.19) имеет вид  $\theta = M_z / (GJ_t) \leq [\theta]$ . В нем (см. формулу (6.20))  $J_t = \alpha b^4$ . По таблице 6.1, линейно интерполируя, находим  $\alpha = 0,348$ ;  $J_t = 0,348 \cdot 6^4 = 451 \text{ см}^4$ . По условию жесткости  $M_z \leq [\theta] GJ_t = 5 \cdot (\pi/180) \cdot 8 \cdot 10^7 \cdot 451 \cdot 10^{-8} = 31,4 \text{ кНм}$ .

Окончательно  $[M_z] = 16,6 \text{ кНм}$ .

## 6.9. Свободное кручение

### тонкостенных стержней открытого профиля

Тонкостенными считают сечения, у которых толщина стенки значительно меньше ширины и высоты.

На основе мембранной аналогии (рис. 6.15 а) можно принять следующее распределение касательных напряжений (рис. 6.15 б):

– напряжение в точке направлено параллельно средней линии того участка, которому принадлежит точка (линии уровня параллельны средним линиям практически всюду за исключением малых зон у концов участков);

– в точках средней линии напряжения равны нулю (плоскости, касательные к поверхности пленки, параллельны плите);

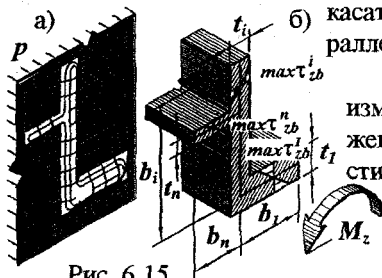


Рис. 6.15

– по толщине участка напряжения изменяются линейно (это – предположение, не дающее большой погрешности из-за малой толщины стенки).

Напряжения в контурных точках  $i$ -го участка определяются по формуле  $\max \tau_{zb}^i = M_z t_i / J_t$ . (6.21)

В ней  $t_i$  – толщина  $i$ -го участка;  $J_t$  – момент инерции сечения при свободном кручении:

$$J_t = \sum_i b_i t_i^3 / 3. \quad (6.22)$$

Максимальные напряжения возникают в контурных точках участка с наибольшей толщиной:  $\tau_{max} = M_z t_{max} / J_t$ . Обозначив

$$J_t / t_{max} = W_t, \quad (6.23)$$

получаем

$$\tau_{max} = M_z / W_t. \quad (6.24)$$

$W_t$  – момент сопротивления сечения при свободном кручении.

Углы закручивания:

$$\theta = d\varphi/dz = M_z / (GJ_t), \quad \varphi(l) = M_z l / (GJ_t). \quad (6.25)$$

### 6.10. Напряжения в поперечном сечении тонкостенного стержня закрытого профиля при свободном кручении

Наблюдения за деформациями мембраны (рис. 6.16 а) позволяют принять следующее распределение касательных напряжений по сечению (рис. 6.16 б):

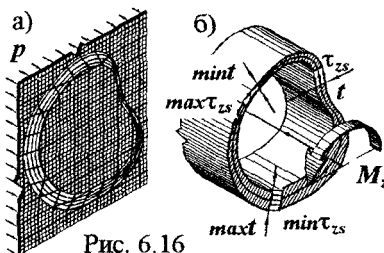


Рис. 6.16

– напряжение параллельно средней линии стенки в месте расположения рассматриваемой точки (линии уровня практически параллельны средней линии);

– по толщине стенки напряжения не изменяются (линии наибольшего ската можно считать прямыми).

Исходя из принятых предпосылок, выведем формулу касательных напряжений.

Условие статической эквивалентности имеет вид  $M_z = \int_s \tau_{zs} r dA$  (рис. 6.17 а). Но  $dA = t ds$ . Тогда  $M_z = \int_s \tau_{zs} r t ds$  (а)

Знак "s" под интегралом указывает, что интегрирование ведется по всей средней линии стенки (по замкнутому контуру).

Двумя перпендикулярными средней линии продольными плоскостями и двумя поперечными плоскостями вырежем элемент из стержня (рис. 6.17 б). В точке 1 обозначим толщину стенки  $t_1$ , напряжение  $\tau_{zs1}$ ; в точке 2 —  $t_2$  и  $\tau_{zs2}$ . На основании свойства парности касательных напряжений в продольных сечениях также возникают напряжения  $\tau_{sz1}$  и  $\tau_{sz2}$ .

Спроецируем силы, приложенные к рассматриваемому элементу, на ось z:

$$\tau_{sz1} t_1 dz - \tau_{sz2} t_2 dz = 0,$$

отсюда  $\tau_{sz1} t_1 = \tau_{sz2} t_2$ . Поскольку полученное равенство справедливо при любых положениях точек 1 и 2, то  $\tau_{sz} t = \text{const}$ . Произведение  $\tau_{sz} t$  по длине контура не изменяется. В том

месте, где стенка тоньше, напряжение соответственно больше, и наоборот. Принимая во внимание парность касательных напряжений, вынесем в равенстве (а) произведение  $\tau_{zs} t$  за знак интеграла:

$$M_z = \tau_{zs} t \int_s r ds.$$

Произведение же  $r ds$  представляет собой удвоенную площадь треугольника  $abc$ , а интеграл по длине замкнутого контура — удвоенную площадь фигуры, ограниченной средней линией стенки. Итак,  $M_z = \tau_{zs} t 2\Omega$ , т.е.

$$\tau_{zs} = M_z / (2\Omega t). \quad (6.26)$$

Здесь  $\Omega$  — площадь фигуры, ограниченной средней линией стенки;  $t$  — толщина стенки в рассматриваемом месте.

Из формулы (6.26) видно, что наибольшие касательные напряжения возникают там, где стенка имеет меньшую толщину:  $\tau_{max} = M_z / (2\Omega t_{min})$ . Обозначив  $2\Omega t_{min} = W_t$ ,

$$\tau_{max} = M_z / W_t. \quad (6.27)$$

приведем формулу к общепринятому виду:

$$\tau_{max} = M_z / W_t. \quad (6.28)$$

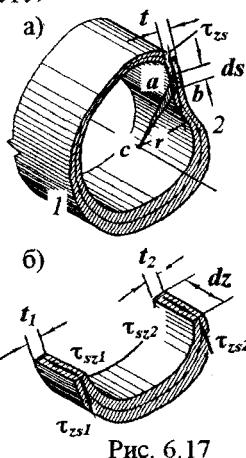


Рис. 6.17

## 6.11. Деформации тонкостенных стержней закрытого профиля при свободном кручении

Выведем формулу угла закручивания. Для этого приравняем работу внешнего момента и потенциальную энергию деформации. Работа, совершаемая внешним моментом  $M$ , возрастающим пропорционально углу поворота  $\varphi$  (рис. 6.18 а),

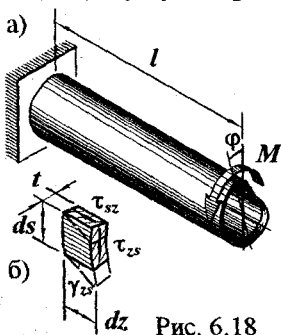


Рис. 6.18

$$W_M = M\varphi/2. \quad (a)$$

Потенциальная энергия деформации, накопленная в бесконечно малом элементе (рис. 6.18 б),  $dU = \tau_{zs} t ds \cdot \gamma_{zs} dz / 2$ . Но по закону Гука (6.1)  $\gamma_{zs} = \tau_{zs} / G$ , следовательно,

$$dU = \tau_{zs}^2 \cdot t ds \cdot dz / (2G).$$

Чтобы получить потенциальную энергию, накопленную в стержне, проинтегрируем по замкнутому контуру и по длине:

$$U = \int_l \left( \int_s \tau_{zs}^2 t ds / (2G) \right) dz. \quad (б)$$

Подставим равенство (6.26) в выражение (б):  $U = \int_l \left( \int_s M_z^2 t \cdot ds / (2G \cdot 4\Omega^2 t^2) \right) dz$ . Вынося за знак интеграла постоянные множители, имеем  $U = M_z^2 \int_l \left( \int_s ds/t \right) / (8G\Omega^2) dz$ .

Интеграл по замкнутому контуру  $\int_s (ds/t)$  является геометрической характеристикой сечения. Если сечение постоянно, она не зависит от  $z$ . Тогда

$$U = M_z^2 l \left( \int_s ds/t \right) / (8G\Omega^2). \quad (в)$$

Приравняем теперь работу внешнего момента (а) потенциальной энергии деформации (в):  $M\varphi/2 = M_z^2 l \left( \int_s ds/t \right) / (8G\Omega^2)$ . А так как  $M_z = M$ , приходим к равенству  $\varphi = M_z l \left( \int_s ds/t \right) / (4G\Omega^2)$ . Если обозначить

$$4\Omega^2 / \left( \int_s ds/t \right) = J_t, \quad (6.29)$$

получим формулу угла закручивания в обычном виде:

$$\varphi = M_z l / (GJ_t). \quad (6.30)$$

$J_t$  — момент инерции тонкостенного замкнутого сечения при свободном кручении.

Для иллюстрации применения формул и сравнения прочностных и жесткостных характеристик прямоугольного и тонкостенных стержней открытого и закрытого профилей приведем примеры.



**Пример 6.4.** Подберем коробчатое сечение (рис. 6.19), равнопрочное при кручении прямоугольнику  $6 \times 10$  см. Сравним расход материала и жесткости при кручении.

Два стержня при кручении равнопрочны, если имеют одинаковые моменты сопротивления  $W_t$ . В примере 6.3 у прямоугольного сечения  $W_t = 85,1 \text{ см}^3$ .

У коробчатого сечения по формуле (6.27)  $W_t = 2\Omega \cdot t_{\min} = 2 \cdot 9t \cdot 16t \cdot t = 85,1 \text{ см}^3$ . Отсюда  $t = 0,67$  см.

Расход материала пропорционален площади сечения. У прямоугольника  $A = 6 \cdot 10 = 60 \text{ см}^2$ . У коробчатого сечения  $A = 68t^2 = 30,1 \text{ см}^2$ . Материала для него требуется меньше почти в два раза.

Жесткость при кручении пропорциональна моменту инерции  $J_t$ . По формуле (6.29)  $J_t = 4\Omega^2 / (\int ds/t) =$

$$= 4(9t \cdot 16t)^2 / (2(9t/2t) + 2(16t/t)) = 2023t^4 = 2023 \cdot 0,67^4 = 408 \text{ см}^4$$

на 10 % ниже чем у прямоугольника ( $451 \text{ см}^4$ ).

**Пример 6.5.** Во сколько раз изменится допустимый крутящий момент, если коробчатое сечение, рассмотренное в примере 6.4 разомкнуть (рис. 6.20)? Как изменится жесткость?

Величина допустимого момента  $[M]$  пропорциональна моменту сопротивления сечения  $W_t$ .

У тонкостенного открытого профиля по формулам (6.22) и (6.23)  $W_t = (\sum_1^n b_i t_i^3) / (3t_{\max}) =$

$$= 9t(2t)^3 + 16t \cdot t^3 / (3 \cdot 2t) =$$

$$= 29,3t^3 = 29,3 \cdot 0,67^3 = 8,82 \text{ см}^3.$$

У замкнутого сечения  $W_t = 85,1 \text{ см}^3$ . Отношение  $85,1/8,82 = 9,65$  говорит о том, что у открытого профиля допустимый момент почти на порядок ниже.

$$\text{Момент инерции } J_t = (\sum_1^n b_i t_i^3) / 3 =$$

$$= (9t(2t)^3 + 16t \cdot t^3) / 3 = 58,7t^4 = 58,7 \cdot 0,67^4 = 11,6 \text{ см}^4$$

в 35 раз меньше чем у замкнутого профиля.

Сопоставление показывает, что тонкостенные стержни открытого профиля обладают низкой прочностью и жесткостью при кручении.

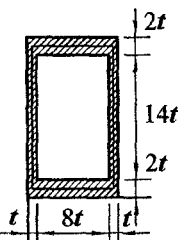


Рис. 6.19

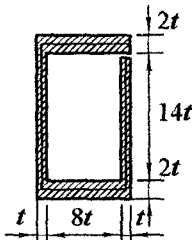


Рис. 6.20

- Материал, приведенный в этом разделе, показывает, что
- распределение напряжений по сечению при кручении существенно неравномерно;
  - в сечениях различных типов распределение напряжений качественно различно;
  - все типы сечений следует делить на четыре группы:
    - круглые и кольцевые;
    - массивные сечения некруглой формы;
    - тонкостенные замкнутого профиля;
    - тонкостенные открытого профиля;
  - для каждого типа сечения соответственно применимы разные формулы определения напряжений и деформаций;
  - наиболее подходящей формой сечения является кольцо;
  - наименее пригодны тонкостенные открытые профили.

## 7. Прямой изгиб

Изгиб – это такой вид нагружения, при котором в поперечном сечении балки возникают изгибающие моменты.

В общем случае в поперечном сечении балки могут возникнуть два изгибающих момента –  $M_x$  и  $M_y$ . Их можно заменить одним суммарным, лежащим в плоскости, перпендикулярной сечению балки. В зависимости от положения этой плоскости по отношению к главным осям сечения изгиб подразделяют на два вида. Если плоскость действия изгибающего момента совпадает с какой-либо главной осью сечения, изгиб называют *прямым*. Если нет – *косым*.

В том случае, когда в сечении возникает только изгибающий момент, а поперечная сила отсутствует, изгиб называют *чистым*. При наличии поперечной силы изгиб носит название *поперечного*.

В этом разделе рассмотрим прямой изгиб (чистый и поперечный).

### 7.1. Напряжения в поперечном сечении балки при чистом изгибе

Обратимся к основной задаче сопротивления материалов – задаче о напряжениях в поперечном сечении. Вначале рассмотрим простейший изгиб – чистый.

Задачу сформулируем так. Балка, все размеры которой известны, нагружена моментами в главной плоскости (рис. 7.1). Установим:

- какие напряжения возникают в поперечном сечении;
- как они распределены по сечению;

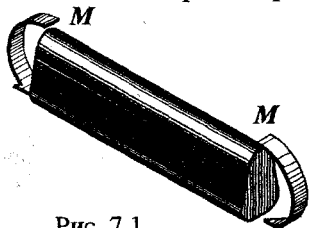


Рис. 7.1

– как напряжения зависят от изгибающего момента, формы и размеров сечения.

План решения подобных задач изложен в разд. 5.8. Следующему.

Для конкретности рассуждений будем считать, что балка нагружена моментами в главной плоскости  $zy$ .

### Геометрическая сторона задачи

Проследим за деформациями балки при прямом изгибе, нанеся на ее поверхность сетку из продольных и поперечных линий (рис. 7.2 а).

При экспериментальном исследовании деформирования балки установлено (рис. 7.2 б):

– расстояния между поперечными линиями в верхней части увеличились, в нижней уменьшились;

– прямоугольные контуры, образованные поперечными линиями, плоские до деформации, остались плоскими и после изгиба балки;

– прямые углы между продольными и поперечными линиями не изменились;

– ширина балки в верхней части уменьшилась, в нижней возросла.

Таким образом, продольные волокна в верхней части балки удлинились, в нижней укоротились. Поскольку по высоте балки деформации изменяются непрерывно, то существуют волокна, не изменившие своей длины. Такие волокна называют **нейтральными**. Они образуют **нейтральный слой**. Линию пересечения нейтрального слоя с поперечным сечением называют **нейтральной линией**.

Наблюдения за деформациями, происходящими на поверхности балки, позволяют сформулировать исходные предпосылки решения задачи для балки с сечением любой формы:

– поскольку поперечные прямоугольные контуры остались плоскими, будем считать, что *плоскими остаются и поперечные сечения*;

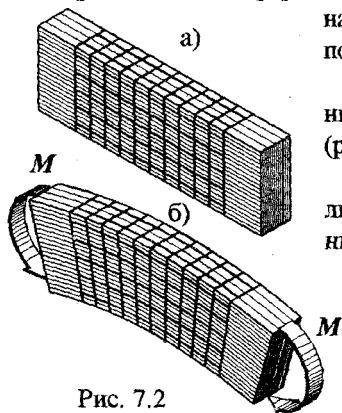


Рис. 7.2

– допустим также, что *прямые углы между поперечными сечениями и продольными волокнами не изменились* (деформаций сдвига  $\gamma_z$  нет).

– наконец, предположим, что продольные волокна балки работают, как отдельные стерженьки, друг на друга не действуют (в продольных сечениях нормальные напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  не возникают и, следовательно, материал балки испытывает линейное напряженное состояние).

Опишем количественно распределение деформаций по сечению. С этой целью сопоставим вид элементарного отрезка балки до и после деформации.

На рис. 7.3 сплошными линиями показан вид отрезка балки до деформации, пунктирными – после ее изгиба. Радиус кривизны нейтрального слоя обозначим  $r$ , а расстояние от нейтрального слоя до произвольной точки  $k$  буквой  $\eta$ .

Из подобия треугольников  $ck_1k$  и  $Oce$  следует  $k_1k/ce = ck/Oe$ . Но  $k_1k = \Delta dz$ ,  $ce = dz$ ,  $ck = \eta$ ,  $Oe = r$ . Итак, приходим к соотношению  $\Delta dz/dz = \eta/r$ , откуда

$$\varepsilon_z = \eta/r. \quad (a)$$

*Относительное удлинение прямо пропорционально расстоянию от рассматриваемой точки до нейтрального слоя и обратно пропорционально радиусу его кривизны.*

При неизменности прямого угла между продольными волокнами и поперечным сечением

$$\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0. \quad (б)$$

Равенства (а) и (б) описывают распределение деформаций по сечению балки и являются геометрическими уравнениями задачи.

### Физическая сторона задачи

При линейном напряженном состоянии нормальные напряжения и удлинения связаны законом Гука (5.4):

$$\sigma_z = E\varepsilon_z. \quad (в)$$

Касательные напряжения и относительный сдвиг также связаны законом Гука (6.1):  $\tau_{zx} = G\gamma_{zx}$ ,  $\tau_{zy} = G\gamma_{zy}$ . (г)

Выражения закона Гука (в) и (г) образуют физические уравнения.

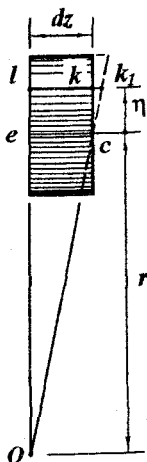


Рис. 7.3

## Статическая сторона задачи

Статические уравнения состоят из двух групп: условий статической эквивалентности (3.1) (рис. 7.4):

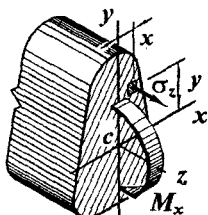


Рис. 7.4

$$N = \int_A \sigma_z dA, \quad (е)$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA, \quad (ж)$$

$$M_y = \int_A \sigma_z x dA \quad (и)$$

и условий равновесия:

$$N = 0, \quad (к)$$

$$M_y = 0. \quad (л)$$

Система уравнений (а) ... (л) позволяет решить поставленную задачу.

Приступим к решению уравнений.

По равенствам (б) и (г) устанавливаем, что  $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$  — при чистом изгибе касательные напряжения в поперечном сечении балки не возникают.

Из выражений (а) и (в) следует:

$$\sigma_z = E\eta/r. \quad (м)$$

Подставим теперь выражение (м) в равенство (е):

$$N = \int_A \sigma_z dA = (E/r) \int_A \eta dA.$$

Принимая во внимание равенство (к), приходим к выводу, что  $(E/r) \int_A \eta dA = 0$ . Но так как  $E/r \neq 0$ , то  $\int_A \eta dA = 0$ . Левая часть полученного равенства является статическим моментом поперечного сечения относительно нейтральной линии. Равенство его нулю означает, что *нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения*.

Пусть нейтральная линия наклонена к оси  $x$  под углом  $\alpha$  (рис.

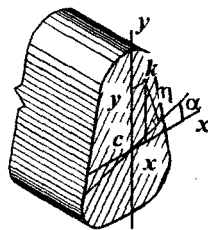


Рис. 7.5

7.5). Подставим выражение (м) в равенство (и):

$$M_y = \int_A \sigma_z x dA = (E/r) \int_A \eta x dA. \quad \text{Но}$$

$$\eta = y \cos \alpha - x \sin \alpha. \quad (н)$$

Следовательно,  $M_y = (E/r) \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha) x dA$ .

По равенству (л)  $M_y = 0$ , значит

$$\int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha) x dA = 0.$$

Преобразуем полученное равенство:

$$\int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha) x dA = \int_A (x y \cos \alpha - x^2 \sin \alpha) dA =$$

$$= \cos \alpha \int_A x y dA - \sin \alpha \int_A x^2 dA = J_{xy} \cos \alpha - J_y \sin \alpha. \quad \text{Так как оси } x \text{ и } y$$

главные, центробежный момент инерции  $J_{xy} = 0$ . Осевой же момент инерции сечения  $J_y > 0$ . Отсюда следует, что  $\sin \alpha = 0$ ,

$$\alpha = 0; \quad (\text{п})$$

при прямом изгибе нейтральная линия совпадает с главной центральной осью, перпендикулярной плоскости изгиба.

По равенствам (н) и (п)  $\eta = y$ . Формулы (а) и (м) примут вид

$$\varepsilon_z = y/r. \quad (7.1)$$

$$\sigma_z = E y/r. \quad (\text{р})$$

Подставим равенство (р) в выражение (ж):

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA = (E/r) \int_A y^2 dA = EJ_x/r, \text{ откуда} \\ 1/r = M_x/EJ_x. \quad (7.2)$$

Равенство (7.2) является законом Гука при изгибе. Оно показывает, что кривизна оси балки пропорциональна изгибающему моменту.

Из равенств (р) и (7.2) следует конечный результат:

$$\sigma_z = M_x y/J_x. \quad (7.3)$$

В формуле (7.3):

$\sigma_z$  – нормальное напряжение в рассматриваемой точке;

$M_x$  – изгибающий момент, действующий в сечении балки;

$y$  – расстояние от рассматриваемой точки до нейтральной линии (главной центральной оси, перпендикулярной плоскости изгиба);

$J_x$  – осевой момент инерции сечения балки относительно нейтральной линии.

Итак, получены ответы на все поставленные вопросы<sup>1</sup>:

– при чистом изгибе в поперечном сечении балки возникают только нормальные напряжения;

– величина напряжений растет по мере удаления точки от нейтральной линии;

– напряжение в точке прямо пропорционально изгибающему моменту, расстоянию от рассматриваемой точки до нейтральной линии и обратно пропорционально осевому моменту инерции сечения относительно нейтральной линии.

<sup>1</sup> К задаче о нормальных напряжениях в поперечном сечении балки обращались Галилей, Мариотт, Лейбниц, Вариньон, Яков Бернулли, Паран, Бильфингер, Навье и др. История вывода формулы (7.3) изобилует чередованием передовых идей, странных заблуждений и даже арифметических ошибок. Для решения задачи потребовалось почти два столетия – 188 лет.

Эпюры нормальных напряжений в балках с некоторыми типами сечений показаны на рис. 7.6.

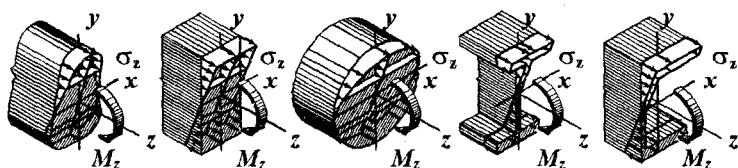


Рис. 7.6

Вывод формулы нормальных напряжений при изгибе опирается на приведенные выше приближенные предположения. Поэтому точность решения, полученного на ее основе, зависит от того, в какой степени эти предположения соответствуют действительности. Экспериментальные исследования и строгие теоретические решения обнаруживают условия, в которых формула (7.3) дает значительную погрешность.

Гипотеза плоских сечений подтверждается экспериментом для сравнительно невысоких балок ( $l/h \geq 10$ ). Расчет высоких балок по обсуждаемой формуле может дать лишь качественное представление о напряжениях в сечении, исказив их величину. Распределение напряжений в сечениях тонкостенных балок, несимметричных относительно плоскости изгиба, во многих случаях существенно отличается от прогнозируемого формулой (7.3).

При выводе формулы (7.3) применен закон Гука. Это значит, что она справедлива, если во всех точках сечения  $\sigma_z \leq \sigma_{pr}$ .

В использованном законе Гука модуль упругости  $E$  был принят одинаковым для растянутой и сжатой частей сечения. Следовательно, для материалов с разными модулями упругости при растяжении и сжатии полученная формула не применима.

Следует также отметить, что в балках резко переменного сечения и в криволинейных балках с сильно искривленной осью распределение нормальных напряжений по сечению нелинейно и не соответствует полученной формуле.

Ниже будут проведены некоторые дополнительные исследования, расширяющие представление о возможностях формулы (7.3) и области ее применимости.



**Пример 7.1.** Балка прямоугольного сечения (рис. 7.7) с  $b = 20$  см и  $h = 30$  см нагружена двумя силами  $F = 10$  кН. В балке выбрано сечение  $l$ , в нем точка  $d$ . Найдем нормальное напряжение  $\sigma_z^d$  в этой точке, если  $l = 1,2$  м.

Реакции опор  $Y_a = Y_b = F = 10$  кН.

Изгибающий момент в рассматриваемом сечении  $M_{Ix} = F \cdot 2l - F \cdot l = Fl = 10 \cdot 120 = 1200$  кНсм.

Растянута верхняя половина сечения. Нейтральная линия – ось  $x$ .

Осевой момент инерции сечения (2.11):

$$J_x = bh^3/12 = 20 \cdot 30^3/12 = 45000 \text{ см}^4.$$

Расстояние от нейтральной линии до точки  $d$

$$y_d = h/2 - h/6 = h/3 = 30/3 = 10 \text{ см}.$$

По формуле (7.3) в точке  $d$  напряжение

$$\sigma_z^d = M_{Ix} y_d / J_x = 1200 \cdot 10 / 45000 = 0,267 \text{ кН/см}^2.$$

Так как у балки растянуты верхние волокна, а точка лежит в нижней половине сечения, напряжение в ней сжимающее.

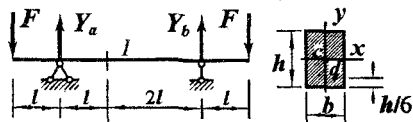


Рис. 7.7

## 7.2. Нормальные напряжения в сечении балки при поперечном изгибе

При поперечном изгибе в сечении балки возникает не только изгибающий момент, но и поперечная сила. Наличие поперечной силы свидетельствует о том, что в сечении возникают касательные напряжения.

Касательные напряжения вызывают деформации сдвига. Если распределение касательных напряжений по сечению неравномерно (именно в таком предположении следует вести качественный анализ), неравномерны и сдвиги. Поперечные сечения балки искривляются и не остаются плоскими. Оценим с качественных позиций влияние деформаций сдвига на нормальные напряжения в сечении балки.

На рис. 7.8 а изображена консольная балка, нагруженная силой  $F$  на свободном конце. В ее сечениях возникают поперечные силы и изгибающие моменты. Поперечные силы во всех сечениях одинаковы, моменты разные.

Рассмотрим деформацию отрезка балки (рис. 7.8 б).

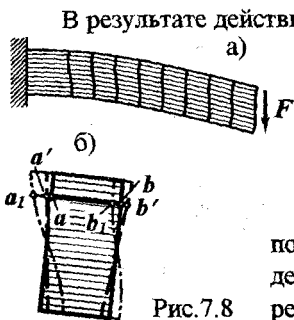


Рис. 7.8

В результате действия изгибающего момента точки  $a$  и  $b$  волокна  $ab$  переместятся соответственно в положения  $a'b'$  — волокно удлинится.

Искривления сечений приведут к тому, что точки  $a$  и  $b$  получат дополнительные продольные перемещения  $a'a_1$  и  $b'b_1$ .

Если в пределах балки (или ее участка) поперечная сила постоянна, то вызванные ею деформации сдвига будут одинаковыми. Отрезки  $a'a_1$  и  $b'b_1$  будут равными. В таком случае дополнительные перемещения точек  $a$  и  $b$ , вызванные деформациями сдвига, не приведут к дополнительному удлинению продольного волокна. Распределение продольных деформаций по сечению будет таким же, как и при чистом изгибе. Не изменится и распределение нормальных напряжений.

При переменной поперечной силе подобное утверждать нельзя. Нормальные напряжения в сечении балки будут отличаться от предсказания (7.3). Количественное отличие будет зависеть от величины касательных напряжений и вызванных ими сдвигов. Ниже это влияние будет оценено.

Другой особенностью поперечного изгиба является наличие нормальных напряжений  $\sigma_x$  в горизонтальных продольных сечениях балки. Эти напряжения возникают оттого, что на балку действуют поперечные внешние силы. Величины напряжений  $\sigma_x$  и их значимость также будут обсуждены ниже.

Не имея пока достаточных оснований и отложив на будущее анализ истоков высказанных сомнений, будем считать, что формула (7.3) справедлива и для поперечного изгиба.

### 7.3. Касательные напряжения в балке прямоугольного сечения (вывод формулы Журавского)

Строго говоря, задача о напряжениях при поперечном изгибе может быть решена методами теории упругости. В сопротивлении материалов для определения касательных напряжений используют приближенный метод, предложенный Д.И. Журавским<sup>1</sup>.

Ознакомимся с методом и его результатом на примере балки прямоугольного сечения.

Решение задачи опирается на следующие предпосылки:

- касательные напряжения в прямоугольном сечении параллельны поперечной силе  $Q_y$ ;
- по ширине сечения касательные напряжения постоянны;
- распределение нормальных напряжений по сечению описывается формулой (7.3).

Из балки (рис. 7.9 а, б) двумя сечениями вырежем элементарный отрезок (рис. 7.9 в).

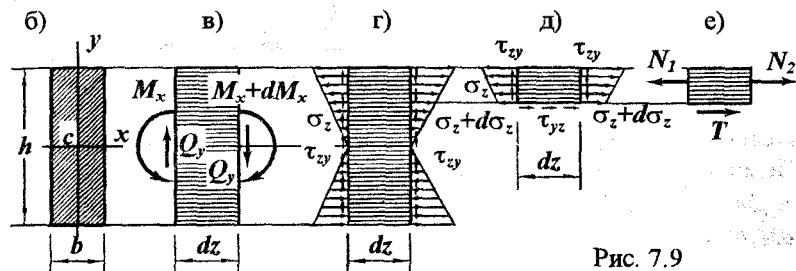


Рис. 7.9

Он находится в равновесии при действии на него со стороны отброшенных частей поперечных сил и изгибающих моментов.

На рис. 7.9 г то же действие представлено нормальными и касательными напряжениями.

Продольной плоскостью, параллельной оси  $x$ , рассечем отрезок балки на две части. Рассмотрим равновесие одной из них, например верхней (рис. 7.9 д, е). На нее действуют горизонтальные силы:

$N_1$  и  $N_2$  – равнодействующие нормальных напряжений в отсеченных частях поперечных сечений;

$T$  – касательная сила со стороны нижней отброшенной части элементарного отрезка балки.

<sup>1</sup> Дмитрий Иванович Журавский (1821–1891) – инженер, выпускник Петербургского института путей сообщений. Не будучи профессионалом-ученым, он свои замечательные научные работы выполнял, когда чувствовал в этом практическую потребность. За научные открытия в теории мостов премирован Академией наук России.

Силы уравновешены, поэтому

$$T = N_1 - N_2. \quad (a)$$

Равнодействующая  $N_1 = \int_{A_{cl}} \sigma_z dA$ , ( $A_{cl}$  — площадь отсеченной части поперечного сечения). Применяя формулу (7.3), имеем

$$N_1 = \int_{A_{cl}} (M_x y / J_x) dA = (M_x / J_x) \int_{A_{cl}} y dA.$$

Интеграл в полученном выражении является статическим моментом отсеченной части поперечного сечения относительно нейтральной линии  $x$ . Итак,

$$N_1 = M_x S_x^{cl} / J_x. \quad (б)$$

Аналогично,

$$N_2 = (M_x + dM_x) S_x^{cl} / J_x. \quad (в)$$

Подстановка выражений (б) и (в) в условие (а) дает

$$T = -dM_x S_x^{cl} / J_x. \quad (г)$$

Сила  $T$  является равнодействующей касательных напряжений, возникающих в горизонтальном сечении отрезка балки. Учитывая малость отрезка  $dz$ , можно считать, что напряжения  $\tau_{yz}$  распределены равномерно по продольному сечению. В таком случае  $T = \tau_{yz} b dz$ . Подставив полученное выражение в равенство (г), получаем  $\tau_{yz} b dz = -dM_x S_x^{cl} / J_x$ , или  $\tau_{yz} = (-dM_x / dz) S_x^{cl} / (J_x b)$ . А так как  $dM_x / dz = -Q_y$ , то  $\tau_{yz} = Q_y S_x^{cl} / (J_x b)$ . Но  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ . Теперь окончательно

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = Q_y S_x^{cl} / (J_x b). \quad (7.4)$$

Это и есть формула Журавского.

В формуле (7.4):

$Q_y$  — поперечная сила в сечении балки;

$S_x^{cl}$  — статический момент отсеченной части поперечного сечения относительно нейтральной линии;

$J_x$  — момент инерции сечения относительно нейтральной линии;

$b$  — ширина сечения.

Распределение касательных напряжений по сечению балки определяется характером изменения  $S_x^{cl}$ , так как остальные величины, входящие в формулу (7.4), для конкретного сечения постоянны. Статический момент отсеченной части играет роль своеобразной координаты, определяющей изменение касательных напряжений по высоте сечения. Выразим его через ординату точки и размеры сечения.

Статический момент отсеченной части  $S_x^{\alpha} = A_{\alpha} y^{\alpha}$ . Из рис. 7.10 следует, что площадь отсеченной части  $A_{\alpha} = b(h/2 - y)$ , расстояние от ее центра тяжести до нейтральной линии (оси  $x$ )  $y^{\alpha} = (h/2 + y)/2$ . После этого статический момент  $S_x^{\alpha} = b(h^2/4 - y^2)/2$ . Момент инерции сечения  $J_x = bh^3/12$ . Подставив полученные равенства в формулу (7.4), получаем

$$\tau_{zy} = 6Q_y (h^2/4 - y^2) / (bh^3). \quad (7.5)$$

Полученное выражение показывает, что изменение касательных напряжений по высоте сечения описывается квадратной параболой. При  $y = h/2$  напряжения  $\tau_{zy} = 0$ . Чем ближе точка к оси  $x$ , тем больше напряжение в ней. В точках нейтральной линии, когда  $y = 0$ ,  $\max \tau_{zy} = 3Q_y / (2bh)$ .

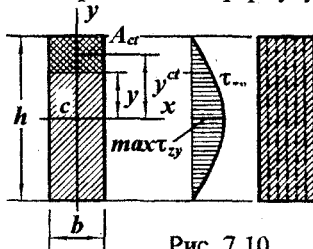


Рис. 7.10

#### 7.4. Касательные напряжения в сечении двутавровой балки.

#### Обобщение формулы Журавского на другие типы сечений

7.4.1. Рассмотрим двутавровое сечение (рис. 7.11). Если к нему применить формулу (7.4), получим эпюру  $\tau_{zy}$ , изображенную справа. Скачок в месте перехода от полки к стенке объясняется изменением ширины сечения. Следует, однако, отметить, что использование формулы (7.4) для определения напряжений  $\tau_{zy}$  в полках далеко не бесспорно. Во-первых, нет оснований полагать, что напряжения равномерно распределены по ширине полки  $b$ . Во-вторых, наличие напряжений  $\tau_{zy}$  в точках, расположенных на границе полки (например, в точке  $a$ ), противоречит закону парности касательных напряжений. В-третьих, они малы по сравнению с напряжениями в стенке. Поэтому будем считать, что в двутавровой балке касательные напряжения  $\tau_{zy}$  возникают лишь в стенке. Формула (7.4) для них примет вид

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = Q_y S_x^{\alpha} / (J_x d).$$

T-образная отсеченная часть, статический момент которой фигурирует в формуле, выделена наверху двутавра двойной штриховкой.

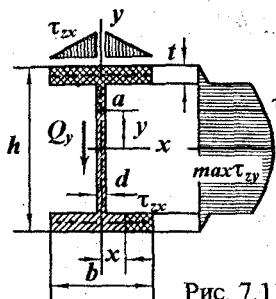


Рис. 7.11

7.4.2. Нет оснований отрицать возможность появления в полках касательных напряжений  $\tau_{zx}$ . Из-за малости толщины полок можно принять распределение напряжений  $\tau_{zx}$  вдоль размера  $t$  равномерным. Повторение вывода формулы (7.4) для напряжений  $\tau_{zx}$  приводит к результату

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = Q_y S_x^a / (J_x t).$$

Отсеченная часть полки на рис. 7.11 также выделена двойной штриховкой внизу сечения. Эпюра  $\tau_{zx}$  показана в верхней части рисунка.

7.4.3. Два типа сечения, рассмотренные выше, показывают, что формулы касательных напряжений в прямоугольном сечении и в двутавре имеют по существу один и тот же вид. Это свидетельствует о возможности использования метода и формулы Журавского для определения касательных напряжений и в других типах сечений.

Обобщая формулу (7.4), следует иметь в виду, что во всех вариантах ее вывода заложены два предположения:

- первое – равномерность распределения касательных напряжений по какому-либо направлению в сечении;
- второе – справедливость формулы (7.3) для нормальных напряжений.

По этим причинам формулу (7.4) можно применять тогда, когда обоснованы названные предпосылки.

При определении касательного напряжения  $\tau_z$  в какой-либо точке

- отсеченную часть поперечного сечения следует выделять линией, перпендикулярной искомым касательным напряжениям;
- под размером  $b$ , стоящим в знаменателе, нужно понимать длину условно нарушенного контакта между двумя частями сечения.

В качестве иллюстрации применения метода Журавского приведем пример.

**Пример. 7.2.** Консольная балка длиной  $3l = 4,5$  м нагружена равномерно распределенной нагрузкой  $q = 20$  кН/м (рис. 7.12 а). Сечение балки – швеллер с размерами  $b = 10$  см,  $h = 18$  см,  $d = 10$  мм,  $t = 15$  мм (рис. 7.12 в). В балке выбрано сечение 1, в нем точка  $a$ . Найдем величину и направление касательного напряжения в точке  $a$ .

Из свойства парности касательных напряжений следует  $\tau_{xy} = 0$  в точках  $a_1$  и  $a_2$ . Так как размер  $t$  мал, будем считать, что напряжения  $\tau_{xy}$  равны нулю во всех точках отрезка  $a_1a_2$ . По той же причине предположим, что напряжения  $\tau_{xx}$  по толщине полки распределены равномерно.

Так как искомые касательные напряжения горизонтальны, проводим вертикальную секущую и отделяем часть сечения (на рис. 7.12 в она заштрихована дважды). Формула напряжения в точке  $a$  имеет вид

$$\tau_{zx} = Q_y S_x^a / (J_x t).$$

Находим:  $Q_y = 2ql = 2 \cdot 20 \cdot 1,5 = 60$  кН;

$$S_x^a = (b/2) t (h/2) = (10/2) 1,5 (18/2) = 67,5 \text{ см}^3;$$

$$J_x = ((b+d/2)(h+t)^3 - (b-d/2)(h-t)^3) / 12 = \\ = ((10+1/2)(18+1,5)^3 - (10-1/2)(18-1,5)^3) / 12 = 2932 \text{ см}^4.$$

Касательное напряжение в точке  $a$  –

$$\tau_{zx} = 60 \cdot 67,5 / (2932 \cdot 1,5) = 0,92 \text{ кН/см}^2.$$

Для определения направления напряжения сечениями 1 и 2 вырежем отрезок балки. Из него вертикальной продольной плоскостью, проведенной через точку  $a$ , отделим часть полки (рис. 7.12 г).

У балки растянуты верхние волокна (рис. 7.12 б), силы  $N_1$  и  $N_2$  растягивающие.  $M_1 < M_2$ , отсюда  $N_1 < N_2$ . По условию равновесия сила  $T$  направлена влево. Влево направлены и напряжения  $\tau_{xz}$  в продольном сечении. По свойству парности заключаем, что в точке  $a$  касательное напряжение  $\tau_{zx}$  направлено вправо. Описанный прием определения величин и направлений касательных напряжений может быть применен практически к любым типам сечений.

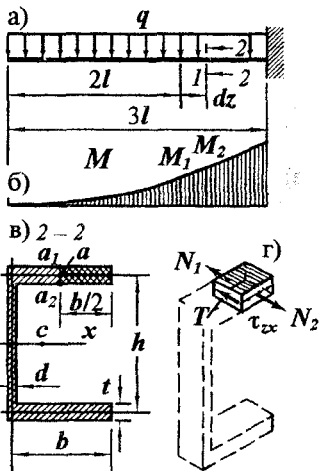


Рис. 7.12

## 7.5. Оценка нормальных напряжений в горизонтальных сечениях балок

Формула нормальных напряжений (7.3) и полученная с ее использованием (7.4) основаны на предположении отсутствия в балке напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ . Но при действии поперечных сил очевидно, что  $\sigma_y \neq 0$ . Оценим влияние поперечной нагрузки на давления волокон балки.

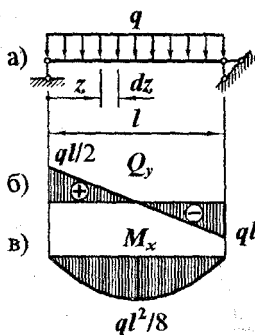


Рис. 7.13

Проведем это на примере свободно опертой балки прямоугольного сечения при равномерной поперечной нагрузке (рис. 7.13 а).

В сечениях балки возникают переменные по длине поперечные силы (рис. 7.13 б) и изгибающие моменты (рис. 7.13 в).

Двумя поперечными сечениями вырежем элементарный отрезок балки (рис. 7.13 а). Вертикальные внешние силы, действующие на него изображены на рис. 7.14 а.

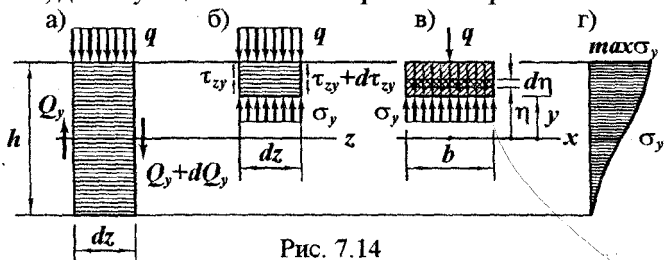


Рис. 7.14

Рассечем отрезок балки горизонтальной плоскостью и отбросим нижнюю часть (рис. 7.14 б, в). Из равновесия верхней части следует:

$$qdz - \int_y^{h/2} \tau_{zy} b d\eta - \sigma_y b dz + \int_y^{h/2} (\tau_{zy} + d\tau_{zy}) b d\eta = 0, \text{ откуда} \quad (a)$$

$$\sigma_y = q/b + \int_y^{h/2} (d\tau_{zy}/dz) d\eta. \quad (a)$$

По формуле (7.5)  $\tau_{zy} = 6Q_y(h^2/4 - \eta^2)/(bh^3)$ ,  $\Rightarrow d\tau_{zy}/dz = 6(dQ_y/dz)(h^2/4 - \eta^2)/(bh^3)$ . Но  $dQ_y/dz = -q$ , т.е.

$$d\tau_{zy}/dz = -6q(h^2/4 - \eta^2)/(bh^3). \quad (б)$$

После подстановки равенства (б) в (а) и интегрирования получаем

$$\sigma_y = q(1 + 3y/h - 4(y/h)^3)/(2b). \quad (в)$$

Эпюра  $\sigma_y$  изображена на рис. 7.14 г;  $\max \sigma_y = q/b$ .



Сравним найденные напряжения с  $\max \sigma_z$ . Согласно формуле (7.3)  $\max \sigma_z = \max M_x y_{\max} / J_x = (ql^2/8)(h/2)/(bh^3/12) = 0,75ql^2/(bh^2)$ . Отношение  $\max \sigma_y / \max \sigma_z = 1,33(h/l)^2$ . При  $h/l < 0,1$   $\max \sigma_y / \max \sigma_z < 0,013$ . Таким образом,  $\sigma_y \ll \sigma_z$ . Это подтверждает обоснованность предпосылки об отсутствии напряжений  $\sigma_y$ .

Строго говоря, полученный результат ограничен рассмотренной расчетной схемой и типом сечения. Аналогичные исследования для других видов нагрузок и форм сечений показывают, что

– при распределенных нагрузках напряжениями  $\sigma_y$  можно пренебречь;

– в случаях действия сосредоточенных сил

– в балках с массивными сечениями их также можно игнорировать,

– в тонкостенных же балках напряжения  $\sigma_y$  следует учитывать в местах приложения усилий.

Распределение напряжений в тонкостенных балках вблизи “сосредоточенных” сил устанавливается специальными методами.

На основании проведенного анализа напряжения в поперечных сечениях балок будем определять по формулам (7.3) и (7.4).

## 7.6. Напряженное состояние балок при поперечном изгибе

Выше установлено, что в балке обычно возникают как нормальные  $\sigma_z$ , так и касательные  $\tau_{zy}$  напряжения. Поэтому площадки, лежащие в поперечном сечении, в общем случае не являются главными, а следовательно, в любой точке  $\sigma_{\min} \leq \sigma_z \leq \sigma_{\max}$ ,  $\tau_{zy} \leq \tau_{\max}$ .

При отсутствии нормального напряжения  $\sigma_y$  формула (4.5), определяющая положения главных площадок, принимает вид

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2\tau_{zy}/\sigma_z. \quad (7.6)$$

Главные напряжения (4.6) при поперечном изгибе

$$\sigma_{\max/\min} = (\sigma_z \pm \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2})/2, \quad (7.7)$$

Поскольку  $\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} \geq \sigma_z$ , то  $\sigma_{\max} \geq 0$ , а  $\sigma_{\min} \leq 0$ . По правилам нумерации главных напряжений с учетом того, что  $\sigma_x = 0$ , следует принимать  $\sigma_1 = \sigma_{\max}$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{\min}$ .

Согласно равенствам (7.7) наибольшее касательное напряжение (4.7) в точке балки

$$\tau_{\max} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2}/2. \quad (7.8)$$

Распределение напряжений по сечению балки при поперечном изгибе характерно тем, что

– и нормальные  $\sigma_z$ , и касательные напряжения  $\tau_{zy}$  изменяются по высоте сечения;

– отношение  $\tau_{zy}/\sigma_z$  переменено по высоте.

В этом случае из формул (7.6) – (7.8) следует, что в точках, занимающих разные положения по высоте сечения, будут соответственно разными

- максимальные нормальные напряжения;
- минимальные нормальные напряжения;
- наибольшие касательные напряжения;
- углы наклона главных площадок к поперечному сечению (и площадок наибольшего сдвига, равнонаклоненных к главным).

Для иллюстрации отмеченного, а также техники анализа напряженного состояния рассмотрим пример.

**Пример 7.3.** В прямоугольном сечении балки (рис. 7.15 а) с  $b = 12 \text{ см}$ ,  $h = 36 \text{ см}$  возникли поперечная сила  $Q_y = 1,1 \text{ МН}$  и изгибающий момент  $M_x = 0,25 \text{ МНм}$  (рис. 7.15 б). Исследуем напряженное состояние материала балки в этом сечении:

- найдем положения главных площадок;
- определим величины главных напряжений;
- установим положения площадок с наибольшими касательными напряжениями;
- вычислим значения наибольших касательных напряжений.

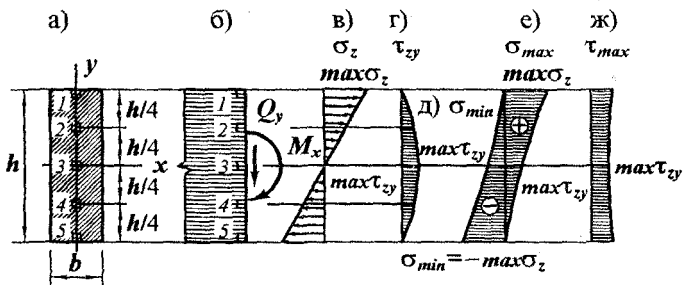


Рис. 7.15

Эпюры нормальных напряжений  $\sigma_z$  и касательных  $\tau_{zy}$  изображены на рис. 7.15 в, г.

Поскольку напряженное состояние при изгибе качественно и количественно неоднородно, выберем в сечении пять наиболее характерных представительных точек (рис. 7.15 а, б):

- две наиболее удаленные от нейтральной линии - 1 и 5;
- одну на нейтральной линии - 3;
- две точки общего положения - 2 и 4.

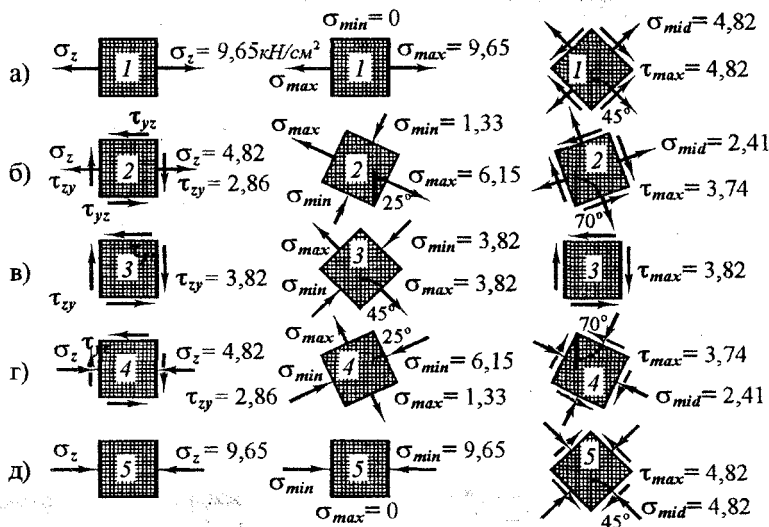


Рис. 7.16

Положения главных площадок и величины главных напряжений устанавливаются по формулам (7.6) и (7.7) после определения напряжений в поперечных площадках. Итак:

Точка 1 (рис. 7.16 а).

Нормальное напряжение в точке (7.3)

$$\sigma_z = M_x y_1 / J_x = 0,25 \cdot 10^5 \cdot 18 / (12 \cdot 36^3 / 12) = 9,65 \text{ кН/см}^2;$$

Касательное напряжение (7.5)  $\tau_{zy} = 0$ .

Материал испытывает одноосное растяжение.

Отсутствие касательного напряжения  $\tau_{zy}$  свидетельствует о том, что исходные площадки являются главными.

Главные напряжения  $\sigma_{max} = \sigma_z = 9,65 \text{ кН/см}^2$ ,  $\sigma_{min} = 0$ .

Место действия наибольших касательных напряжений – площадки, наклоненные к поперечному сечению под  $45^\circ$ ;  $\tau_{max} = \sigma_z/2 = 4,82 \text{ кН/см}^2$ . Направление  $\tau_{max}$  определяется двумя признаками:

- свойством парности,
- растяжением материала в горизонтальном направлении.

В площадках с максимальными касательными напряжениями действуют средние нормальные напряжения  $\sigma_{mid} = (\sigma_{max} + \sigma_{min})/2 = \sigma_z/2 = 4,82 \text{ кН/см}^2$ .

Точка 2 (рис. 7.16 б).

$$\sigma_z = M_x y_z / J_x = 0,25 \cdot 10^5 \cdot 9 / (12 \cdot 36^3 / 12) = 4,82 \text{ кН/см}^2;$$

$$\tau_{yz} = 6Q_y (h^2/4 - y_z^2) / (bh^3) = 6 \cdot 1100 (36^2/4 - 9^2) / (12 \cdot 36^3) = 2,86 \text{ кН/см}^2.$$

Материал находится в плоском напряженном состоянии.

Положение главных площадок:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2\tau_{yz} / \sigma_z = 2 \cdot 2,86 / 4,82 = 1,19; \alpha_0 = 25^\circ.$$

Повернуть исходный параллелепипед на указанный угол следует по часовой стрелке, ибо внутри этого  $45^\circ$ -градусного сектора накладываются растягивающие действия  $\sigma_z$  и  $\tau_{yz}$  и возникает наибольшее растягивающее напряжение  $\sigma_{max}^1$ .

$$\begin{aligned} \text{Главные напряжения (7.7)} \quad \sigma_{max(min)} &= (\sigma_z \pm \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{yz}^2}) / 2 = \\ &= (4,82 \pm \sqrt{4,82^2 + 4 \cdot 2,86^2}) / 2 = 6,15(-1,33) \text{ кН/см}^2. \end{aligned}$$

Площадки с наибольшими касательными напряжениями наклонены к главным площадкам под углом  $45^\circ$  (одна из них к вертикали наклонена под  $25^\circ + 45^\circ = 70^\circ$ ); Напряжение

$$\tau_{max} = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) / 2 = (6,15 - (-1,33)) / 2 = 3,74 \text{ кН/см}^2.$$

Направление  $\tau_{max}$  согласуется с направлениями  $\sigma_{max}$  и  $\sigma_{min}$ .

Средние нормальные напряжения, действующие в площадках с максимальными касательными напряжениями,

$$\sigma_{mid} = (\sigma_{max} + \sigma_{min}) / 2 = \sigma_z / 2 = 2,41 \text{ кН/см}^2.$$

<sup>1</sup> Направление поворота можно определить по знаку угла  $\alpha_0$ . Для этого необходимо в формулу (7.6) подставить напряжения со знаками, соответствующими установленным правилам. Однако такой путь представляется менее предпочтительным, поскольку использованный здесь вариант способствует формированию инженерных навыков анализа.

Точка 3 (рис. 7.16 в).

Нормальное напряжение  $\sigma_z = 0$ .

Касательное —  $\tau_{zy} = 3Q_y/(2bh) = 3 \cdot 1100/(2 \cdot 12 \cdot 36) = 3,82 \text{ кН/см}^2$ .

Вид напряженного состояния — чистый сдвиг (см. раздел 6).

Главные площадки наклонены к исходным под  $45^\circ$ .

Главные напряжения  $\sigma_{max(min)} = \pm \tau_{zy} = 3,82 \text{ кН/см}^2$ .

Площадки с наибольшими касательными напряжениями — исходные площадки;  $\tau_{max} = \tau_{zy} = 3,82 \text{ кН/см}^2$ .

Точка 4 (рис. 7.16 г).

Напряжения  $\sigma_z$  и  $\tau_{zy}$  в точке 4 такие же как в точке 2:  $\sigma_z = 4,82 \text{ кН/см}^2$ ;  $\tau_{zy} = 2,86 \text{ кН/см}^2$ . Различие в том, что нормальные напряжения — сжимающие.

Положение главных площадок определяется углом  $\alpha_0 = 25^\circ$ . Но в этой точке повернуть исходный параллелепипед на указанный угол следует против хода часовой стрелки, ибо внутри этого 45-градусного сектора накладываются сжимающие действия  $\sigma_z$  и  $\tau_{zy}$  и возникает наибольшее сжимающее напряжение  $\sigma_{min}$ .

Главные напряжения  $\sigma_{max(min)} = 1,33(-6,15) \text{ кН/см}^2$ .

Площадки с наибольшими касательными напряжениями наклонены к главным площадкам под углом  $45^\circ$ . Наибольшее касательное напряжение  $\tau_{max} = 3,74 \text{ кН/см}^2$ . Направление  $\tau_{max}$  согласуется с направлениями главных напряжений.

Средние нормальные напряжения, действующие в площадках с максимальными касательными напряжениями, сжимающие, равные  $2,41 \text{ кН/см}^2$ .

Точка 5 (рис. 7.16 д).

Нормальное напряжение в точке 5 такое же как в точке 1, но сжимающее;  $\sigma_z = 9,65 \text{ кН/см}^2$ ; касательное напряжение  $\tau_{zy} = 0$ .

Материал испытывает одноосное сжатие.

Исходные площадки являются главными.

Главные напряжения  $\sigma_{max} = 0$ ,  $\sigma_{min} = -9,65 \text{ кН/см}^2$ .

Наибольшие касательные напряжения действуют в площадках, наклоненных к поперечному сечению под  $45^\circ$ ;  $\tau_{max} = \sigma_z/2 = 4,82 \text{ кН/см}^2$ .

На рис. 7.15 д-ж по выполненным расчетам построены эпюры главных и наибольших касательных напряжений в сечении.

Приведенный пример показывает, что при поперечном изгибе материал находится в условиях смешанного плоского напряженного состояния: в одном главном направлении растянут, в другом сжат. В крайних точках (1 и 5) плоское напряженное состояние вырождается в линейное; в точках нейтральной линии – в чистый сдвиг.

Величины главных и наибольших касательных напряжений, ориентация главных площадок зависят не только от внутренних силовых факторов и положения точки в сечении, но и от типа сечения. Поэтому рассмотренный пример прямоугольного сечения иллюстрирует лишь методику анализа напряженного состояния в балке. В других случаях подобное исследование должно проводиться аналогично, но с учетом конкретного распределения напряжений.

## 7.7. Понятие о траекториях главных напряжений

Траектория главного напряжения – это линия, касательная к которой совпадает с направлением одного из главных напряжений в данной точке. В каждой точке балки существует два взаимно перпендикулярных направления главных напряжений. Поэтому можно построить два семейства соответствующих им линий.

Проиллюстрируем технику построения траекторий на балке прямоугольного сечения, изображенной на рис. 7.17.

В сечении балки, отстоящем на расстоянии  $z$  от левой опоры, действуют поперечная сила  $Q_y = ql/2 - qz$  и изгибающий момент  $M_x = qz^2/2 - qlz/2$  (опорные реакции на рисунке не показаны).

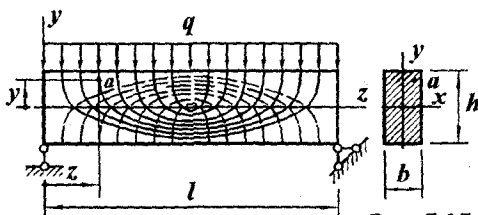


Рис. 7.17

Напряжения в произвольной точке  $a$ :

$$\sigma_z = M_x y / J_x = 6q(z^2 - lz)y / (bh^3);$$

$$\tau_{zy} = 6Q_y(h^2/4 - y^2) / (bh^3) = 6q(l/2 - z)(h^2/4 - y^2) / (bh^3).$$

Подставляя выражения напряжений в формулу (7.6) с учетом знака касательного напряжения (оно отрицательно), получаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2\tau_{xy}/\sigma_z = (l-2z)(h^2/4 - y^2)/(z(l-z)y).$$

Возможны дальнейшие преобразования полученного выражения в направлении формирования дифференциального уравнения траекторий главных напряжений. Однако решение такого уравнения чрезмерно трудоемко. Поэтому остановимся на этом равенстве.

Если на боковую поверхность балки нанести множество точек, в каждой из них найти главные направления и изобразить их взаимно перпендикулярными отрезками, сформируются два семейства линий. Они и будут изображать потоки главных напряжений. Характерными для траекторий являются следующие особенности:

- при  $y = \pm h/2$  угол  $\alpha_0 = 0$  - одно главное напряжение горизонтально, другое вертикально;
- угол  $\alpha_0 = 0$  и при  $z = l/2$ , в этом сечении поперечная сила равна нулю, касательных напряжений нет;
- если  $y = 0$ , угол  $\alpha_0 = 45^\circ$  - в точках нейтрального слоя главные напряжения наклонены к горизонтали под этим углом;
- под углом  $\alpha_0 = 45^\circ$  наклонены главные напряжения и в крайних сечениях балки:  $z = 0$  и  $z = l$ , где изгибающие моменты равны нулю.

На рис. 7.17 сплошными линиями показаны траектории главных растягивающих напряжений, штриховыми - главных сжимающих.

Очертания траекторий главных напряжений зависят от

- вида нагрузки на балку;
- условий ее закрепления;
- формы и размеров поперечного сечения балки.

Поэтому приведенный пример следует рассматривать как иллюстрацию методики построения траекторий.

На практике траектории главных напряжений используются в конструкциях из комбинированных материалов. В железобетоне стальные стержни располагают вдоль траекторий растягивающих напряжений, освобождая бетон от работы на растяжение. В конструкциях из пластмасс армирующие нити также располагают по направлению растягивающих напряжений, где они наиболее эффективны.

## 7.8. Расчет на прочность при поперечном изгибе

Выбор критерия, по которому следует оценивать прочность балки при поперечном изгибе, не столь очевиден как при растяжении (сжатии) и кручении. В сечении балки возникают и нормальные, и касательные напряжения. Правда, как правило, нормальные напряжения максимальны там, где нет касательных напряжений (в точках, максимально удаленных от нейтральной линии), касательные же напряжения наибольшие в точках нейтральной линии, где отсутствуют нормальные напряжения. Эти обстоятельства облегчают назначение критериев прочности.

7.8.1. Для обоснования условий прочности балки сопоставим максимальные нормальные  $\max\sigma_z$  и максимальные касательные  $\max\tau_{xy}$  напряжения, возникающие в поперечных сечениях консольной балки прямоугольного сечения (рис. 7.18):

$$\max\sigma_z = \max M_{xy} / J_x = Fl(h/2) / (bh^3/12) = 6Fl(bh^2);$$

$$\max\tau_{xy} = 3Q_y / (2bh) = 3F / (2bh).$$

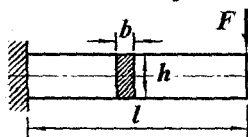


Рис. 7.18

Отношение напряжений

$$\max\tau_{xy} / \max\sigma_z = (3Fl(bh^2)) / (6Fl(h/2)) = h / (4l).$$

Если  $h/l \leq 0,1$ , соотношение  $\max\tau_{xy} / \max\sigma_z \leq 0,025$ . Аналогичные сопоставления для других типов сечений свидетельствуют о том, что в массивных сечениях

$\max\tau_{xy} \ll \max\sigma_z$ . Поэтому в балках массивных сечений можно игнорировать касательные напряжения и расчет на прочность вести по максимальным нормальным напряжениям  $\sigma_z$ .

Максимальное нормальное напряжение в сечении балки  $\max\sigma_z = M_{xy} / J_x$ . Это выражение целесообразно преобразовать, объединив в одну две геометрические величины —  $J_x$  и  $y_{max}$ . Обозначим

$$J_x / y_{max} = W_x \quad (7.9)$$

Вновь введенная геометрическая характеристика сечения  $W_x$  называется *осевым моментом сопротивления сечения балки*. Размерность осевого момента сопротивления  $\text{см}^3$ ,  $\text{м}^3$  и т.п. С учетом введенного понятия

$$\max\sigma_z = M_x / W_x \quad (7.10)$$

Условие прочности по нормальным напряжениям (5.9) при изгибе принимает вид

$$M_x / W_x \leq R, \quad (7.11)$$

где  $R$  — расчетное сопротивление материала балки при одноосном растяжении (сжатии).



7.8.2. В балках с тонкостенными сечениями касательные напряжения  $\tau_{xy}$  нередко соизмеримы с нормальными. Поэтому в тонкостенных балках наряду с проверкой (7.11) вводится условие прочности по касательным напряжениям (6.3):

$$\max \tau_{xy} \leq R_s, \quad (7.12)$$

в котором  $R_s$  – расчетное сопротивление материала на срез;  $\max \tau_{xy}$  определяется по формуле Журавского (7.4).

7.8.3. Остановимся на новом геометрическом понятии – осевом моменте сопротивления сечения балки (7.9). Найдем его для некоторых типов сечений.

Прямоугольник:  $J_x = bh^3/12$ ,  $y_{max} = h/2$ ;  
 $W_x = bh^2/6.$  (7.13)

Круг:  $J_x = \pi D^4/64$  (2.16),  $y_{max} = D/2$ ;  
 $W_x = \pi D^3/32.$  (7.14)

Кольцо:  $J_x = \pi D^4(1-\delta^4)/64$  (2.18),  $y_{max} = D/2$ ;  
 $W_x = \pi D^3(1-\delta^4)/32.$  (7.15)

У сечений, несимметричных относительно нейтральной линии, расстояния до наиболее удаленных от нее точек в растянутой и сжатой частях сечения неодинаковы. В таких случаях вводят два осевых момента сопротивления. Например, у равнобедренного треугольника (рис. 7.19) момент инерции  $J_x = bh^3/36$  (2.13). Расстояния от оси  $x$  до наиболее удаленных точек  $y^1_{max} = 2h/3$  и  $y^2_{max} = h/3$ . По формуле (7.9)

$$W_x^1 = bh^2/24, \quad W_x^2 = bh^2/12. \quad (7.16)$$

Применяя условие (7.11) к подобного рода сечениям, следует иметь это в виду.

Осевые моменты сопротивления прокатных двутавров и швеллеров приведены в таблицах сортамента.

С целью детального знакомства с поиском опасных точек в балках, выбором критериев прочности и расчетом на прочность рассмотрим несколько примеров.

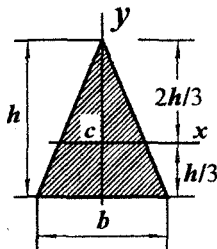


Рис. 7.19

**Пример 7.4.** Проверим прочность балки, изображенной на рис. 7.20 а. Числовые значения исходных данных:  $l = 1,2 \text{ м}$ ,  $q = 20 \text{ кН/м}$ , балка составлена из швеллеров № 30, материал балки – сталь 09Г2С ( $R = 335 \text{ МПа}$ ;  $R_s = 195 \text{ МПа}$ ).

Балка тонкостенная. Поэтому необходима проверка обоих условий прочности – (7.11) и (7.12).

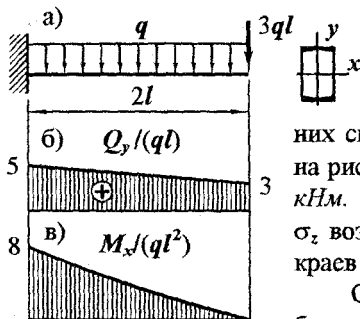


Рис. 7.20

Проверка условия (7.11).

Из формулы (7.10) ясно, что

$\max \sigma_z = \max M_x / W_x$ . Эпюры внутренних силовых факторов в балке изображены на рис. 7 б, в.  $\max M_x = 8ql^2 = 8 \cdot 20 \cdot 1,2^2 = 230 \text{ кНм}$ . Наибольшие нормальные напряжения  $\sigma_z$  возникают в точках верхнего и нижнего краев левого сечения балки.

Осевой момент сопротивления сечения балки равен сумме моментов сопротивления швеллеров. По таблице сортамента находим  $W_x = 2 \cdot 387 = 774 \text{ см}^3$ . Теперь  $\max \sigma_z = \max M_x / W_x = 23000 / 774 = 29,7 \text{ кН/см}^2$ . Сравнивая полученное значение нормального напряжения с расчетным сопротивлением на растяжение и сжатие, заключаем, что условие прочности (7.11) выполняется.

Проверка условия (7.12).

Поперечная сила наибольшая в левом сечении балки. В точках нейтральной линии этого сечения возникают  $\max \tau_{xy}$ .

По формуле Журавского  $\max \tau_{xy} = \max Q_y S_x^{\alpha} / (J_x b)$ . В ней:

– поперечная сила  $\max Q_y = 5ql = 5 \cdot 20 \cdot 1,2 = 120 \text{ кН}$ ;

– статический момент полусечения – сумма статических моментов полушвеллеров:  $S_x^{\alpha} = 2 \cdot 224 = 448 \text{ см}^3$ ;

– момент инерции сечения относительно нейтральной линии  $J_x = 2 \cdot 5810 = 11620 \text{ см}^4$ ;

– ширина контакта между двумя условно разделяемыми частями сечения – сумма толщин стенок швеллеров:  $b = 2 \cdot 0,65 = 1,3 \text{ см}$ .

Итак,  $\max \tau_{xy} = \max Q_y S_x^{\alpha} / J_x b = 120 \cdot 448 / (11620 \cdot 1,3) = 3,56 \text{ кН/см}^2$ . Напряжение значительно меньше расчетного сопротивления материала на срез. Условие прочности по касательным напряжениям (7.12) выполняется.

**Пример 7.5.** Шарнирно-консольная балка подвержена равномерно распределенной нагрузке  $q = 24 \text{ кН/м}$  (рис. 7.21 а). Длина участка балки  $l = 1,6 \text{ м}$ . Материал балки – чугун СЧ 15 ( $R_t = 55 \text{ МПа}$ ,  $R_c = 160 \text{ МПа}$ ). Сечение балки – тавр (рис. 7.21 б). Назначим размеры сечения по условиям прочности материала балки.

Сечение балки массивно, использование условия прочности по касательным напряжениям (7.12) не требуется.

Особенность рассматриваемого случая состоит в том, что

- сечение несимметрично относительно нейтральной линии;
- расчетные сопротивления растяжению и сжатию разные;
- в левой части балки растянуты нижние волокна, на правой верхние.

По отмеченному будем:

- искать точки с наибольшими растягивающими и сжимающими напряжениями,
- сопоставляя напряжения с расчетными сопротивлениями, устанавливать, какая из них является опасной.

Центр тяжести сечения балки отстоит от нижнего края на  $1,36b$ , момент инерции относительно нейтральной линии  $J_x = 9,44b^4$  (рис. 7.21 б); определение положения нейтральной линии (главной центральной оси  $x$ ) и величины главного момента инерции  $J_x$  опущено; последовательность этих подготовительных расчетов описана в разд. 2).

Эпюры поперечной силы и изгибающего момента изображены на рис. 7.21 в, г. По эпюре момента заключаем, что опасную точку следует искать в сечениях 1 и 2.

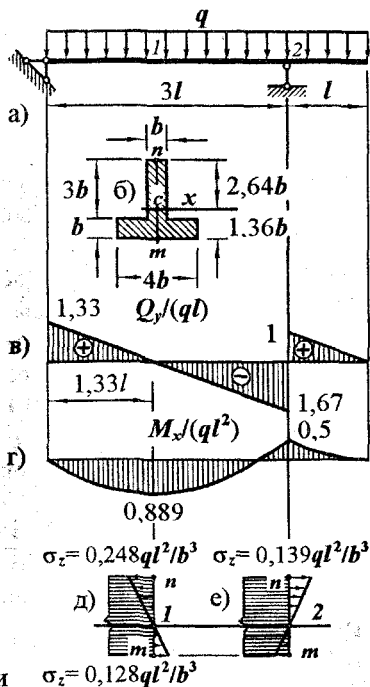


Рис. 7.21

Сечение 1 (рис. 7.21 д).

Изгибающий момент в сечении  $M_{x1} = 0,889ql^2$ ; растянуты нижние волокна.

Наибольшие растягивающие напряжения возникают в точках нижнего края сечения, в частности, точке  $m$ :

$$\max\sigma_{\text{д}} = M_{x1}y_m/J_x = 0,889ql^2 \cdot 1,36b/(9,44b^4) = 0,128ql^2/b^3.$$

Наибольшие сжимающие напряжения в точках верхнего края, где выбрана точка  $n$ :

$$\max\sigma_{\text{с}} = M_{x1}y_n/J_x = 0,889ql^2 \cdot 2,64b/(9,44b^4) = 0,248ql^2/b^3.$$

Сечение 2 (рис. 7.21 е).

Изгибающий момент  $M_{x2} = 0,5ql^2$ ; растянуты верхние волокна.

Наибольшие растягивающие напряжения возникают в точках верхнего края, среди которых точка  $n$ :

$$\max\sigma_{\text{д}} = M_{x2}y_n/J_x = 0,5ql^2 \cdot 2,64b/(9,44b^4) = 0,139ql^2/b^3.$$

Наибольшие сжимающие напряжения в сечении 2 считать не нужно, так как  $M_{x1} > M_{x2}$  и  $y_n > y_m$ .

Выполненные расчеты показали, что наибольшие растягивающие напряжения  $\max\sigma_{\text{д}} = 0,139ql^2/b^3$  возникают в верхних точках сечения 2;  $\max\sigma_{\text{с}} = 0,248ql^2/b^3$  – в верхних точках первого сечения.

Выясним, какие из них опаснее. В наиболее сжатых точках отношение  $R_c/\max\sigma_{\text{с}} = 160/(0,248ql^2/b^3) = 645b^3/(ql^2)$ , в растянутых же точках  $R_t/\max\sigma_{\text{д}} = 55/(0,139ql^2/b^3) = 396b^3/(ql^2)$  – резерв прочности при сжатии больше, опасны верхние точки сечения 2.

Выяснив положение опасных точек, завершаем решение задачи. Из условия прочности при растяжении (5.9)  $\max\sigma_{\text{д}} \leq R_t$  следует  $0,139ql^2/b^3 \leq R_t$ , откуда  $b^3 \geq 0,139ql^2/R_t = 0,139 \cdot 0,24 \cdot 160^2 / 5,5 = 155 \text{ см}^3$ , или  $b \geq 5,4 \text{ см}$ .

**Пример 7.6.** Рассмотрим теперь двутавровую балку из профиля № 24. Материал балки сталь 14Г2 с  $R = 320 \text{ МПа}$  и  $R_s = 185 \text{ МПа}$ . Длина участка  $l = 0,8 \text{ м}$ . Балка подвержена нагрузке, изображенной на рис. 7.22 а. Определим нагрузку (параметр  $q$ ), которую можно прикладывать к балке, не нарушая условий прочности.

Балка тонкостенная, с резким изменением ширины сечения в области больших нормальных напряжений. Поэтому ее следует проверить по

- нормальным напряжениям  $\sigma_z$ ;
- касательным  $\tau_{zy}$ ;
- главным напряжениям  $\sigma_{max/min}$ .

Эпюры внутренних силовых факторов при указанной нагрузке, приведены на рис. 7.22 б, в. Опасное сечение над правой опорой.

Расчет по нормальным напряжениям.

По формуле (7.10) и эпюре  $M_x$   $max\sigma_z = maxM_x / W_x = 4ql^2 / W_x$ .

По таблицам сортамента находим  $W_x = 289 \text{ см}^3$ . Таким образом,  $max\sigma_z = 4q \cdot 80^2 / 289 = 88,6q / \text{см}$ . Условие прочности (5.9):  $max\sigma_z \leq R$ :  $88,6q \leq 32$ ;  $q \leq 32 / 88,6 = 0,361 \text{ кН/см}$ .

Расчет по касательным напряжениям.

По формуле Журавского (7.4)

$max\tau_{zy} = Q_y S_x^a / (J_x d)$ . При  $Q_y = 4ql$ ,

$S_x^a = 163 \text{ см}^3$ ;  $J_x = 3460 \text{ см}^4$ ;  $d = 0,56 \text{ см}$

$max\tau_{zy} = 4q \cdot 80 \cdot 163 / (3460 \cdot 0,56) = 26,9q / \text{см}$ . Из условия прочности (7.12)  $max\tau_{zy} \leq R_s$ ;  $26,9q \leq 18,5$  находим  $q \leq 0,688 \text{ кН/см}$ .

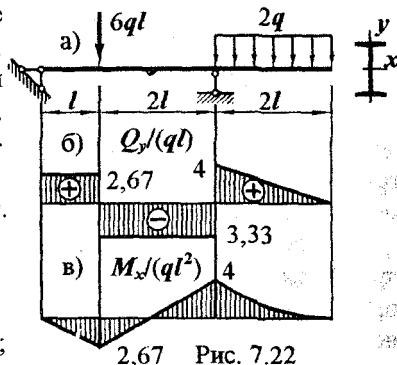
Расчет по главным напряжениям.

Наибольшие главные напряжения в двутавре возникают в месте соединения стенки и полки (точка  $a$  на рис. 7.23), где достаточно велики и нормальные  $\sigma_z$ , и касательные  $\tau_{zy}$  напряжения, хотя ни те, ни другие не максимальны в сечении.

Нормальное напряжение в точке  $a$   $\sigma_z = M_x y_a / J_x = 4ql^2 (h/2 - t) / J_x = 4q \cdot 80^2 (24/2 - 0,95) / 3460 = 81,7q / \text{см}$ .

Касательные напряжения  $max\tau_{zy} = Q_y S_x^a / (J_x d) = 4qlbt(h/2 - t/2) / (J_x d) = 4q \cdot 80 \cdot 11,5 \cdot 0,95 (24/2 - 0,95/2) / (3460 \cdot 0,56) = 20,8q / \text{см}$

Главные напряжения в точке  $\sigma_{max(min)} = (\sigma_z \pm \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2}) / 2 = ((81,7 \pm \sqrt{81,7^2 + 4 \cdot 20,8^2}) / 2)q = 86,7(-4,99)q / \text{см}$ . Итак,  $\sigma_{max} = 86,7q / \text{см}$ ,  $\sigma_{min} = -4,99q / \text{см}$ . Минимальное напряжение составляет около 6% от максимального, им можно пренебречь и считать напряженное состояние линейным. Так как  $\sigma_{max} < max\sigma_z$ , принимаем  $q = 0,361 \text{ кН/см}$ .



2,67 Рис. 7.22

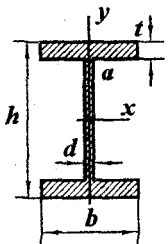


Рис. 7.23

## 7.9. Рациональные типы сечений балок

Распределение напряжений по сечению балки неоднородно:

– нормальные напряжения вблизи нейтральной линии малы и возрастают по мере удаления от нее;

– касательные напряжения в части сечения, прилегающей к нейтральной линии, хотя и достигают наибольших значений, но, как правило, существенно меньше нормальных.

Это предоставляет возможность рационально размещать материал, полнее используя его прочность.

При равных расчетных сопротивлениях растяжению и сжатию, целесообразно выбирать сечения, симметричные относительно нейтральной линии (прямоугольник, круг, двутавр и т.д.), или несимметричные, но с центром тяжести посередине высоты (рельс).

Величина изгибающего момента, допустимого по условию прочности (7.11),  $M_x \leq RW_x$  пропорциональна осевому моменту сопротивления сечения. Расход материала – площади  $A$ . Поэтому экономичность двух типов сечения можно оценить отношением площадей при равных моментах сопротивления.

Квадрат и круг.

Квадрат со стороной  $a$ :  $W_x^1 = a^3/6$  (7.13);  $A_1 = a^2$ .

Круг с диаметром  $D$ :  $W_x^2 = \pi D^3/32$  (7.14);  $A_2 = \pi D^2/4$ .

Из равенства моментов сопротивления следует  $(a/D)^3 = 6\pi/32 = 0,589$ , откуда  $a/D = 0,838$ . Отношение площадей  $A_1/A_2 = (4/\pi)(a/D)^2 = 0,895$ . Квадрат экономичнее круга.

Квадрат и прямоугольник.

Прямоугольник с основанием  $b$  и высотой  $h$ :  $W_x^3 = bh^2/6$ ;  $A_3 = bh$ .

При равных моментах сопротивления  $a^3 = bh^2$ . Запишем это соотношение по-другому:  $a^2/(bh) = h/a$ . Отношение площадей  $A_1/A_3 = a^2/(bh) = h/a$ . Экономичность прямоугольного сечения по сравнению с квадратным зависит от отношения их высот. Если  $h < a$ , прямоугольник неэкономичен. При  $h > a$ , равнопрочное прямоугольное сечение рациональнее квадратного. С ростом высоты прямоугольника растет и его экономичность. Это обстоятельство способствует увеличению высоты сечения балок с уменьшением его ширины. Однако делать это можно до определенного предела, пока балка не приобрела излишнюю податливость к случайным боковым воздействиям.

Сравним квадратное сечение балки с двутавром № 24. У двутавра  $W_x = 289 \text{ см}^3$ . Равнопрочный ему квадрат должен иметь сторону ( $a^3/6 = 289$ )  $a = 12 \text{ см}$ . Площадь квадрата  $144 \text{ см}^2$ , двутавра  $34,8 \text{ см}^2$  – в 4,1 раза меньше.

Основной принцип рационального конструирования сечения балки – изъять материал из слабонапряженных мест и добавить в области высоких напряжений. Такому принципу отвечают прокатные профили, сварные двутавры и швеллеры, сечения коробчатого типа и т.п., широко применяемые в строительных конструкциях.

## 7.10. Понятие о балках равного сопротивления

Изгибающие моменты, как правило, переменны по длине балки. Это обстоятельство также может быть использовано в экономических целях. Сечения с малыми изгибающими моментами можно сделать меньших размеров, убрав материал, в котором нет необходимости. Познакомимся с постановкой и решением подобных задач на примере.

**Пример 7.7.** Консольная балка длиной  $l = 2 \text{ м}$  несет равномерно распределенную нагрузку  $q = 40 \text{ кН/м}$  (рис. 7.24 а). Запроектируем балку при условиях:

- сечение балки прямоугольное шириной  $b$  и высотой  $h(z)$ ;
- ширина сечения по длине балки постоянна;
- отношение  $h(z)/b$  должно быть не более пяти;

– материал балки сталь 15ХСНД с  $R = 330 \text{ МПа}$ ;

– все сечения балки равноопасны –  $\max \sigma_z(z) = \text{const}$ .

Эпюра изгибающего момента показана на рис. 7.24 б. В сечении произвольного положения  $M_x(z) = qz^2/2$ ,  $\max M_x = ql^2/2$ .

Определим размеры сечения на правом конце балки, где действует максимальный изгибающий момент:

$$\max M_x / W_x = (ql^2/2) / (bh_0^2/6) \leq R.$$

Приняв согласно условию  $b = 0,2h_0$ , находим  $h_0^3 \geq 15ql^2/R = 15 \cdot 0,4 \cdot 200^2 / 33 = 7273 \text{ см}^3$ , т.е.  $h_0 \geq 19,4 \text{ см}$ ; Округляя, принимаем  $h_0 = 20 \text{ см}$ ;  $b = 0,2h_0 = 4 \text{ см}$ .

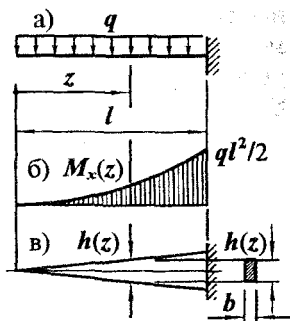


Рис. 7.24

Установим теперь зависимость высоты сечения от его положения. Условие равноопасности сечений имеет вид  $M_x(z)/W_x(z) = R$ . Подставив сюда  $M_x(z)$  и  $W_x(z)$ , получаем  $(qz^2/2)/(bh^2(z)/6) = R$ , откуда при постоянный  $b$  высота  $h(z) = z\sqrt{3q/(bR)}$  — линейная функция. На левом конце балки  $h(0) = 0$ , на правом  $h(l) = h_0$ , в произвольном сечении  $h(z) = h_0z/l = 20z/200 = 0,1z$ .

Итак, при ширине балки, равной 4 см, и высоте, линейно возрастающей от нуля на левом конце до 20 см на правом, максимальные нормальные напряжения от заданной нагрузки во всех сечениях одинаковы:  $\max \sigma_z = R$ .

Ясно, что полученное решение справедливо только при тех условиях, которые использованы в задаче. Если какое-либо из них изменить (вид нагрузки, постоянство ширины сечения), условие равноопасности сечений нарушится.

Описанный прием проектирования балок переменного сечения часто используют на практике. Широкое применение в строительстве нашли консольные и однопролетные железобетонные балки переменной высоты, стальные двутавровые балки с постоянной высотой, но переменной шириной полков. Они менее материалоемки и потому более экономичны.

### 7.11. Потенциальная энергия деформации при поперечном изгибе

Потенциальная энергия деформации является самостоятельной характеристикой напряженно-деформированного состояния балки. Кроме того, она часто используется в различных методах расчета конструкций. Выведем формулу потенциальной энергии деформации балки, испытывающей поперечный изгиб.

Материал балки подвержен нормальным напряжениям  $\sigma_z$  и касательным  $\tau_{zy}$ . Удельная потенциальная энергия деформации при одноосном растяжении и сжатии равна  $\sigma_z^2/(2E)$  (5.8), при чистом сдвиге  $\tau_{zy}^2/(2G)$  (6.2). Во всей балке  $U = \int\int_{IA} (\sigma_z^2/(2E) + \tau_{zy}^2/(2G)) dAdz$ . С помощью формул (7.3) и (7.4) выразим напряжения через внутренние силовые факторы:

$U = \int\int_{IA} ((M_x y/J_x^2)/(2E) + (Q_y S_x^{\alpha}/(J_x b))^2/(2G)) dAdz$ .

Преобразуем полученное выражение:

$$U = \int_I (M_x^2/(2EJ_x^2)) \int_A y^2 dAdz + \int_I (Q_y^2/(2GJ_x^2)) \int_A (S_x^{\alpha}/b)^2 dAdz.$$



Внутренний интеграл в первом слагаемом – осевой момент инерции сечения балки. Он сокращается со стоящим в знаменателе. Для преобразования второго слагаемого к виду, обычно используемому в расчетах, введем обозначение

$$A \int (S_x^{\alpha}/b)^2 dA / J_x^2 = \mu, \quad (7.17)$$

называемое *коэффициентом формы сечения*. После этого формула потенциальной энергии деформации балки примет вид

$$U = \int_l (M_x^2 / (2EJ_x)) dz + \int_l (\mu Q_y^2 / (2GA)) dz. \quad (7.18)$$

Если сечение балки постоянно,

$$U = \int_l (M_x^2 / (2EJ_x)) dz + \mu \int_l (Q_y^2 / (2GA)) dz. \quad (7.19)$$

Полученные формулы показывают, что потенциальная энергия деформации балки состоит из двух частей –  $U_M = \int_l (M_x^2 / (2EJ_x)) dz$ , связанной с действием момента, и  $U_Q = \mu \int_l (Q_y^2 / (2GA)) dz$ , отражающей энергию сдвигов от поперечных сил. Обычно  $U_M \gg U_Q$ . Если энергией сдвигов пренебречь,

$$U = \int_l (M_x^2 / (2EJ_x)) dz \quad (7.20)$$

**Пример 7.8.** С целью иллюстрации способа определения коэффициента формы сечения найдем его для прямоугольника (рис. 7.25).

Коэффициент  $\mu = A \int (S_x^{\alpha}/b)^2 dA / J_x^2$ . Найдем входящие в выражение геометрические величины:

$$A = bh;$$

$$S_x^{\alpha} = b(h^2/4 - y^2)/2;$$

$$J_x = bh^3/12;$$

$$\int_A (S_x^{\alpha}/b)^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} ((h^2/4 - y^2)/2)^2 b dy = bh^5/120.$$

$$\mu = A \int (S_x^{\alpha}/b)^2 dA / J_x^2 = bh(bh^5/120) / (bh^3/12)^2 = 1,2.$$

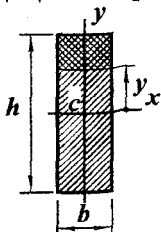


Рис. 7.25

Величины коэффициентов  $\mu$  для наиболее распространенных типов сечений обычно приводятся в справочной литературе.

## 7.12. Перемещения при прямом изгибе.

### Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.

#### Расчет на жесткость

7.12.1. В результате деформирования ось балки искривляется, поперечные сечения перемещаются в новые положения. На рис. 7.26 показан вид балки до и после деформации. На нем обозначено:

$w$  – продольное перемещение центра тяжести сечения;

$v$  – поперечное перемещение центра тяжести;

$\theta$  – угол поворота поперечного сечения.

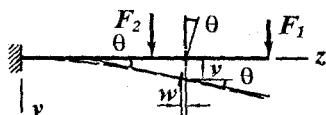


Рис. 7.26

Обычно поперечные перемещения в строительных балках невелики (редко превышают 1/200 пролета). Кроме того, из-за относительно слабого влияния сдвиговых деформаций их можно игнорировать. В таких случаях можно считать, что

– центры тяжести поперечных сечений перемещаются перпендикулярно недеформированной оси ( $w \ll v$ , продольными перемещениями пренебрегаем, полагая  $w = 0$ );

– угол поворота сечения равен углу наклона касательной к кривой  $v(z)$ , т.е.

$$\theta = \operatorname{tg} \theta = v'. \quad (7.21)$$

Таким образом, перемещения поперечных сечений балки определяются одной функцией  $v(z)$ . Ее называют *прогибом*. Для определения прогибов достаточно найти уравнение изогнутой оси балки.

7.12.2. При выводе формулы нормальных напряжений было получено выражение кривизны оси балки (7.2):  $1/r = M_x / (EJ_x)$ . В курсе математического анализа кривизна кривой  $1/r = v'' / (1 + (v')^2)^{3/2}$ . Приравнивая правые части приведенных равенств, получаем дифференциальное уравнение  $v'' / (1 + (v')^2)^{3/2} = M_x / (EJ_x)$ .

$$(7.22)$$

Уравнение (7.22) является нелинейным. Его интегрирование связано с большими математическими трудностями и не всегда возможно. Для решения практических задач уравнение упрощают. Учитывая, что углы поворота  $\theta$  малы, величиной  $(v')^2$  по сравнению с единицей пренебрегают. Тогда уравнение (7.22) принимает вид

$$v'' = M_x / (EJ_x). \quad (7.23)$$

Рассмотрим примеры.

**Пример 7.9.** Консольная балка постоянного сечения нагружена силой на свободном конце (рис. 7.27). Найдем

- уравнение изогнутой оси  $v(z)$ ;
- угол поворота на свободном конце  $\theta$ ;
- максимальный прогиб  $v_{max}$ .

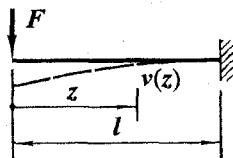


Рис. 7.27

Составим и решим дифференциальное уравнение (7.23).

Изгибающий момент в произвольном сечении  $M_x(z) = Fz$ .

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$v''(z) = Fz/(EJ_x).$$

После первого интегрирования имеем  $v'(z) = Fz^2/(2EJ_x) + C_1$ ;

после второго  $v(z) = Fz^3/(6EJ_x) + C_1z + C_2$ .

Из бесчисленного множества кривых, описываемых полученным общим решением, выберем одну, отвечающую изогнутой оси балки (штриховая линия на рис. 7.27). Подберем постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  так, чтобы выполнялись условия закрепления балки:

$v'(l) = 0$  (угол поворота сечения балки в месте защемления равен нулю),  $\Rightarrow C_1 = -Fl^2/(2EJ_x)$ ;

$v(l) = 0$  (прогиб на правом конце также отсутствует),  $\Rightarrow$

$$C_2 = -Fl^3/(6EJ_x) - C_1l = Fl^3/(3EJ_x).$$

В результате

$$v'(z) = F(z^2 - l^2)/(2EJ_x);$$

$v(z) = F(z^3/6 - l^2z/2 + l^3/3)/(EJ_x)$  – это и есть уравнение изогнутой оси балки.

Угол поворота левого конца балки  $\theta = v'(0) = -Fl^2/(2EJ_x)$ ; Знак свидетельствует о повороте против хода часовой стрелки, что согласуется с выбранными направлениями осей.

Максимальный прогиб  $v_{max} = v(0) = Fl^3/(3EJ_x)$ . Положительный прогиб – вниз.

Итак, в консольной балке, нагруженной силой на конце,

$$v_{max} = Fl^3/(3EJ_x). \quad (7.24)$$

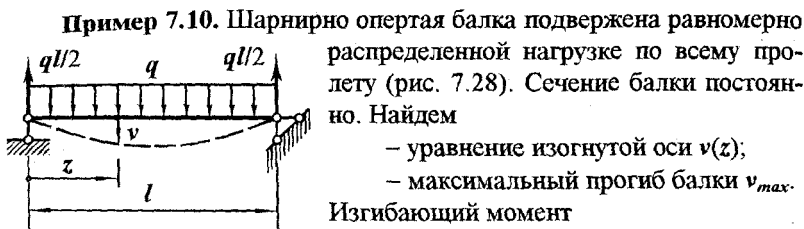


Рис. 7.28

$$M_x(z) = qz^2/2 - qlz/2.$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси

$$v''(z) = q(z^2 - lz)/(2EJ_x).$$

Интегрируем уравнение:

$$v'(z) = q(z^3/3 - lz^2/2)/(2EJ_x) + C_1;$$

$$v(z) = q(z^4/12 - lz^3/6)/(2EJ_x) + C_1z + C_2.$$

Постоянным интегрирования присвоим конкретные значения из условий закрепления балки:

$$v(0) = 0, \Rightarrow C_2 = 0;$$

$$v(l) = 0, \Rightarrow C_1 = ql^3/(24EJ_x).$$

Подставляя постоянные в общее решение дифференциального уравнения, находим уравнение изогнутой оси балки:

$$v(z) = q(z^4 - 2lz^3 + l^3z)/(24EJ_x).$$

Максимальный прогиб возникает посередине пролета:  $v_{max} = v(l/2)$ . Подставив в полученное уравнение  $z = l/2$ , находим

$$v_{max} = 5ql^4/(384EJ_x). \quad (7.25)$$

**Пример 7.11.** Рассмотрим такую же балку как и в предыдущем примере, но под асимметричной силой  $F$  (рис. 7.29). Найдем максимальный прогиб.

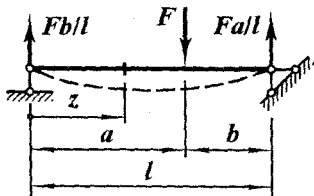


Рис. 7.29

На балке два участка:  $z \leq a$ ,  $z \geq a$ .

Левый участок ( $z \leq a$ ).

Изгибающий момент  $M_{Ix}(z) = -Fbz/l$ .

Дифференциальное уравнение изогнутой оси

$$v_1''(z) = -Fbz/(lEJ_x).$$

После его интегрирования имеем:

$$v_1'(z) = -Fbz^2/(2lEJ_x) + C_1; \quad (a)$$

$$v_1(z) = -Fbz^3/(6lEJ_x) + C_1z + C_2. \quad (б)$$

Правый участок ( $z \geq a$ ).

Изгибающий момент  $M_{2x}(z) = -Fbz/l + F(z-a)$ .

Дифференциальное уравнение изогнутой оси

$$v_2''(z) = -Fbz/(IEJ_x) + F(z-a)/(EJ_x).$$

Последовательное интегрирование приводит к равенствам

$$v_2'(z) = -Fbz^2/(2IEJ_x) + F(z-a)^2/(2EJ_x) + C_3; \quad (в)$$

$$v_2(z) = -Fbz^3/(6IEJ_x) + F(z-a)^3/(6EJ_x) + C_3z + C_4. \quad (г)$$

Итак, два участка, два дифференциальных уравнения, четыре постоянных интегрирования. Граничные условия:

– отсутствие прогиба на левом конце:  $v_1(0) = 0, \Rightarrow C_2 = 0$ ;

– общая касательная к обеим кривым на границе участков:

$$v_1'(a) = v_2'(a), \Rightarrow C_1 = C_3;$$

– равенство прогибов, соответствующих обем функциям, на границе участков:  $v_1(a) = v_2(a), \Rightarrow C_1a + C_2 = C_3a + C_4$ , что с учетом предыдущих равенств приводит к  $C_4 = 0$ ;

– отсутствие прогиба на правом конце балки:  $v_2(l) = 0, \Rightarrow$

$$C_1 = C_3 = Fbl/(6EJ_x) - F(l-a)^3/(6IEJ_x) = Fb(l^2 - b^2)/(6IEJ_x).$$

Подставив найденные постоянные интегрирования в равенства (б) и (г), находим

$$v_1(z) = Fbz(l^2 - b^2 - z^2)/(6IEJ_x); \quad (д)$$

$$v_2(z) = F(bz(l^2 - b^2 - z^2)/l + (z-a)^3)/(6EJ_x). \quad (е)$$

Прогиб достигает наибольшего значения там, где касательная горизонтальна:  $v'(z) = 0$ . В рассматриваемой балке  $a > b$ , максимальный прогиб, очевидно, будет на левом участке. Из условия  $v_1'(z) = Fb(l^2 - b^2 - 3z^2)/(6IEJ_x) = 0$  находим  $z = \sqrt{(l^2 - b^2)}/3$ . На таком расстоянии от левой опоры прогиб будет наибольшим. Подставив найденное значение в равенство (д), получаем

$$v_{max} = Fb(l^2 - b^2)^{3/2}/(9\sqrt{3} IEJ_x). \quad (7.26)$$

Приведенные примеры показывают, что определение прогибов в балках – сравнительно громоздкая задача. С целью снижения трудоемкости решения практических задач

– разработаны специальные компактные методы интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки;

– составлены таблицы формул прогибов в балках при наиболее распространенных видах нагрузок;

– разработаны способы определения перемещений, не требующие составления и решения дифференциальных уравнений.

Тем не менее к дифференциальным уравнениям приходится обращаться не только для определения перемещений. Многие задачи, связанные с анализом напряженно-деформированного состояния балок, требуют применения дифференциального соотношения между прогибом и моментом. Некоторые из таких задач рассмотрены ниже.

Обратим внимание на особенности геометрической реакции балки при изменении нагрузки. В уравнениях изогнутых осей всегда

- один из множителей – параметр нагрузки ( $F$  или  $q$ );
- второй множитель – геометрическая функция  $z$  с постоянными коэффициентами, не зависящими от нагрузки;
- в знаменателе – произведение  $EJ_x$ .

Это свидетельствует о том, что при изменении нагрузки пропорционально ей изменяются прогибы и углы поворота во всех местах балки – нагрузка и деформации синхронны. Произведение  $EJ_x$ , стоящее в знаменателе, носит название *изгибной жесткости*. Чем больше это произведение, тем меньше деформации, балка жестче.

7.12.3. Деформации и перемещения в балках обычно определяют для проверки ее жесткости. Условия жесткости имеют вид

$$\theta_{max} \leq [\theta], \quad v_{max} \leq [v] \quad (7.27)$$

в зависимости от того, на какой показатель деформирования балки наложено ограничение нормами проектирования. В квадратных скобках условия жесткости – допустимые значения соответствующих перемещений.

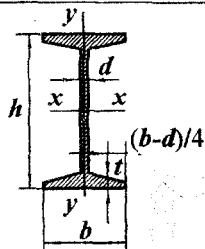
Балка – распространенный элемент строительных сооружений. Расчет на прочность и жесткость изгибаемых элементов конструкций объемней и сложнее чем при растяжении, сжатии и кручении. Методы расчета балок используют более широкий перечень геометрических понятий, требуют анализа внутренних силовых факторов, напряжений в ее сечениях, напряженного состояния в исследуемых точках, вовлекают в проверку прочности большее число механических характеристик материалов, применяют расчетный аппарат, выходящий за рамки элементарной математики. Этим объясняется то большое внимание, которое уделено расчету балок.

## Приложения

### 1. Сортамент прокатной стали в соответствии с ГОСТ 8239-72, 8240-72, 8509-72\* (СТ СЭВ 104-74)

Таблица 1

Двутавры



№ про- филя	Размеры				Пло- щадь сече- ния	Справочные величины						
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>t</i>		$J_x$	$W_x$	$i_x$	$S_x$	$J_y$	$W_y$	$i_y$
	мм					см <sup>2</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	см <sup>3</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10,0	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11,0	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12,0	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

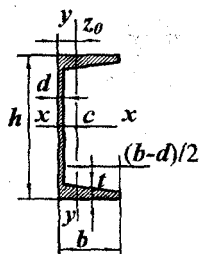
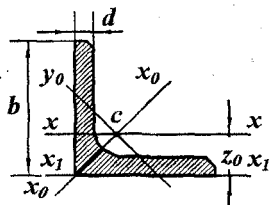


Таблица 2  
Швеллеры

№ про- филь	Размеры				Пло- щадь сече- ния	Справочные величины							
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>t</i>		$J_x$	$W_x$	$i_x$	$S_x$	$J_y$	$W_y$	$i_y$	$z_0$
	мм				см <sup>2</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	см <sup>3</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	см
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14а	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16а	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18а	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20а	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22а	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24а	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75



Таблица 3  
Уголки равнобокие



№ профиля	Размеры		Площадь сечения	Справочные величины								
	<i>b</i>	<i>d</i>		$J_x$	$i_x$	$J_{x_0}$ <i>max</i>	$i_{x_0}$ <i>max</i>	$J_{y_0}$ <i>min</i>	$i_{y_0}$ <i>min</i>	$J_{x_1}$	$z_0$	
	мм			см <sup>2</sup>	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	
		4	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	
		4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	
		4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94	
3,6	36	3	2,10	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99	
		4	2,75	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04	
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	
		4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,54	1,90	0,79	8,53	1,13	
		5	3,79	5,53	1,20	8,75	1,52	2,30	0,78	10,7	1,17	
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21	
		4	3,48	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26	
		5	4,29	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30	
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33	
		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38	
		5	4,80	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42	
5,6	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52	
		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57	
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69	
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74	
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78	
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	
7,5	75	8	10,7	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	
		5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	
8	80	7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	
		8	11,8	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113	2,15	
		9	12,8	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18	
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19	
		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23	
		8	12,3	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27	

№ про- филя	Размеры		Пло- щадь сече- ния	Справочные величины							
	<i>b</i>	<i>d</i>		$J_x$	$i_x$	$J_{x_0}$ max	$i_{x_0}$ max	$J_{y_0}$ min	$i_{y_0}$ min	$J_{x_1}$	$z_0$
	мм			см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47
		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51
		9	15,6	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
		10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
		14	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
		16	29,7	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06
11	110	7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96
		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00
12,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90
16	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31

## 2. Нормативные и расчетные сопротивления некоторых строительных материалов (МПа)

Таблица 4

### 2.1. Сталь

Марка стали	Вид деформации			
	Растяжение, сжатие		Сдвиг	
	Норм. сопр. $R_{yn}$	Расч. сопр. $R$	Норм. сопр. $R_{сг}$	Расч. сопр. $R_s$
18 кп	225	220	130	125
18 пс	235	230	135	130
09Г2	315	305	185	180
09Г2С	345	335	200	190
10Г2С1	355	340	205	195
14Г2	335	320	195	185
15ХСНД	345	330	200	190
10ХНДП	345	330	200	190
10ХСНД	390	355	225	205
15Г2СФ	440	400	255	230

Таблица 5

### 2.2. Чугун

Марка чугуна	Вид деформации			
	Растяжение		Сжатие	
	Норм. сопр. $R_{nt}$	Расч. сопр. $R_t$	Норм. сопр. $R_{sc}$	Расч. сопр. $R_c$
СЧ 15	100	55	220	160
СЧ 20	120	65	275	200
СЧ 25	155	85	315	230
СЧ 30	180	100	340	250

Таблица 6  
2.3. Бетон

Класс бетона	Вид деформации			
	Растяжение		Сжатие	
	Норм. сопр. $R_{nt}$	Расч. сопр. $R_t$	Норм. сопр. $R_{nc}$	Расч. сопр. $R_c$
<b>B15</b>	1,15	0,75	11,0	8,5
<b>B20</b>	1,40	0,95	15,0	11,5
<b>B25</b>	1,60	1,05	18,5	14,5
<b>B30</b>	1,80	1,20	22,0	17,0

Таблица 7  
2.4. Древесина

Порода древесины	Вид деформации			
	Растяжение вдоль волокон		Сжатие вдоль волокон	
	Норм. сопр. $R_{nt}$	Расч. сопр. $R_t$	Норм. сопр. $R_{nc}$	Расч. сопр. $R_c$
<b>Сосна, ель</b>	18,5	8,0	30	13,0
<b>Кедр</b>	16,5	7,2	27	11,7
<b>Пихта</b>	14,8	6,4	24	10,4
<b>Дуб</b>	24,0	10,4	39	16,9

Таблицы составлены в соответствии с нормативными документами:

– Бетонные и железобетонные конструкции: СНиП 2.03.01–84\*.–М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1989.

– Стальные конструкции. Нормы проектирования: СНиП П–23–81\*.–М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1988.

– Деревянные конструкции. Нормы проектирования: СНиП П–25–80.–М.: Стройиздат, 1982.

В таблицах не отражены многие специфические требования к конструкциям из указанных материалов. Они излагаются в профилирующих дисциплинах.

Владимир Андреевич Икрин

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Часть 1

Растяжение, кручение, изгиб

Учебник для студентов  
архитектурно-строительного факультета

Техн. редактор А.В.Миних

Издательство Южно-Уральского  
государственного университета

---

ИД № 00200 от 28.09.99. Подписано в печать 12.04.2001. Формат  
60×84 1/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,53. Уч.-изд. л. 8,91.  
Тираж 200 экз. Заказ 110/70.

---

ООО "ТРАМП". 454092, г. Челябинск, ул. Воровского, 41.

---