Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра «Технология обработки материалов»

531(07)
П408

Н.И. Пневская

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. СТАТИКА

Учебное пособие

Под редакцией В.И. Гузеева

Челябинск
Издательство ЮУрГУ
2007

УДК 531.2(075.8)
П408

Одобрено
учебно-методической комиссией филиала в г. Кыштыме

Рецензенты:
Н.А. Дружинин, Э.Р. Логунова

Пневская Н.И.
П408 Теоретическая механика. Статика: учебное пособие / Н.И. Пневская; под ред. В.И. Гузеева. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 56 с.

В учебном пособии даются краткие теоретические сведения по основным темам раздела «Статика» теоретической механики, а также примеры решения задач в учебном процессе. Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 151001 – «Технология машиностроения»

УДК 531.2(075.8)

Предисловие

Среди общетехнических дисциплин, изучаемых в высшей школе, одно из ведущих мест занимает теоретическая механика.

Важной задачей при изучении курса теоретической механики является самостоятельная работа студентов. Особую актуальность она приобретает в связи с сокращением для многих специальностей числа аудиторных часов, отводимых на этот предмет. Поэтому возникает потребность в учебных руководствах и пособиях, которые облегчили бы студентам самостоятельную проработку теоретических разделов курса, и применения их к решению практических задач.

Данное пособие содержит необходимые краткие теоретические сведения по основным темам раздела «Статика» теоретической механики. К каждой теме подобраны примеры, приведены решения задач, вопросы для самопроверки знаний, рекомендации к решению самостоятельных задач.

Введение

Статикой называется раздел механики, в котором излагается общее учение о силах и изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Под равновесием понимается состояние покоя тела по отношению к другим материальным телам.

При изучении условий равновесия допускается пренебрегать малыми деформациями соответствующих твердых тел и рассматривать их как недеформируемые или абсолютно твердые.

Чтобы твердое тело под действием некоторой системы сил находилось в равновесии, необходимо чтобы эти силы удовлетворяли определенным условиям равновесия данной системы сил. Нахождение этих условий равновесия − одна из основных задач статики. Для решения этой задачи, а также ряда других задач механики, нужно уметь складывать силы, действующие на твердое тело, т.е. приводить данную систему сил к простейшему виду.

Задачи статики могут решаться геометрически (с помощью соответствующих геометрических построений) или аналитически (с помощью численных расчетов). В пособии рассматриваются оба этих метода, однако следует иметь в виду, что наглядные геометрические построения всегда играют при решении задач механики первостепенную роль.

1. Основные понятия и аксиомы

Для упрощения исследования в статике вводится понятие абсолютно твердого тела. Абсолютно твердым телом называют такое материальное тело, в котором расстояние между двумя любыми точками всегда остается постоянным, т.е. геометрическая форма которого не изменяется ни при каких механических воздействиях со стороны других тел. В дальнейшем абсолютно твердое тело будем для краткости называть просто твердым телом.

Состояние покоя или движения рассматриваемого твердого тела (или его механическое состояние) зависит от характера его механических взаимодействий с другими телами.

Под механическим понимают такое взаимодействие, при котором может произойти изменение скоростей взаимодействующих тел. Количественную меру механического действия одного материального тела на другое, характеризующую интенсивность и направление этого действия, называют силой.

Сила является векторной величиной, и при написании ее обозначают большой буквой с чертой: $\overline{F}$.

Действие силы $\overline{F}$ на твердое тело определяется:

1) модулем $\overline{F} = |\overline{F}\,|$;

2) направлением BC (или линией действия силы);

3) точкой приложения A (рис. 1).

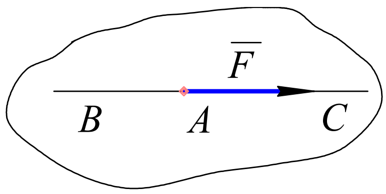


Рис. 1. Сила – вектор

В международной системе единиц силу измеряют в ньютонах: 1Н=кгм/с^2.

Несколько сил, различных по величине и направлению, образуют систему сил. Систему n сил обозначают: $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$.

Две системы сил называются эквивалентными, если каждая из них, действуя отдельно, может сообщить покоящемуся телу одно и то же движение. Две эквивалентные системы обозначают: $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \backsim (\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2, ..., \overline{\Phi}_n)$.

Если система сил, будучи приложенной к покоящемуся телу, не изменит его состояние покоя, то эту систему сил называют эквивалентной нулю $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n \backsim 0)$ или уравновешенной. Про само тело в этом случае говорят, что оно находится в равновесии. Если система сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$ эквивалентна одной силе $\overline{R}$, то эту силу называют равнодействующей данной системы сил, то есть

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \backsim \overline{R}.$$

Аксиома 1

Если на тело действуют две силы, то тело (рис. 2) может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю и направлены в противоположные стороны по одной прямой, соединяющей точки их приложения: $(\overline{F}_1 = -\overline{F}_2)$

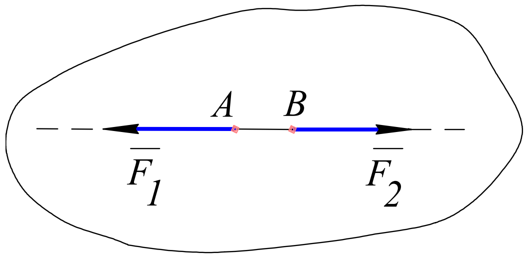


Рис. 2. Аксиома 1

Аксиома 2

Механическое состояние твердого тела не изменится, если к системе сил, действующих на тело, добавить или отнять от нее систему сил, эквивалентную нулю.

Из первых двух аксиом вытекает важное следствие: силу, действующую на твердое тело, можно переносить по линии ее действия в любую точку (рис. 3),

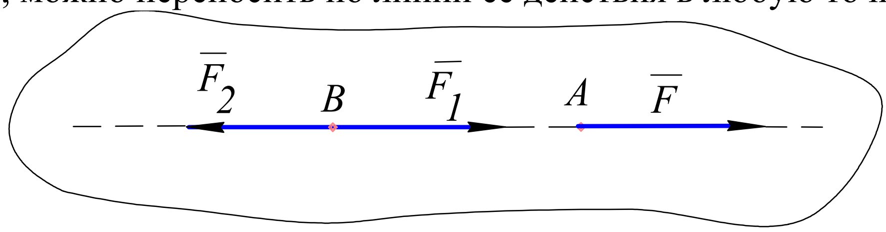


Рис. 3. Следствие из аксиом 1 и 2

то есть сила является скользящим вектором. Для доказательства этого свойства приложим на линии действия силы $\overline{F}$ в точке B систему сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2) \backsim 0$, которые по модулю равны силе $\overline{F}(F_1 = F_2 = F)$ и направлены вдоль линии действия силы $\overline{F}$. Затем систему сил $(\overline{F}_2, \overline{F}) \backsim 0$ исключим, тогда в точке B остается одна сила $\overline{F_1} = \overline{F}$.

Аксиома 3

Система двух сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$, приложенных к одной точке A твердого тела (рис. 4), эквивалентна одной силе $\overline{F}$, приложенной в той же точке и равной $\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$.

Напомним, что векторная сумма двух векторов есть вектор, направленный по диагонали параллелограмма, построенного на этих векторах, и модуль его равен длине этой диагонали: $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\overline{F}_1 \wedge \overline{F}_2)}$.

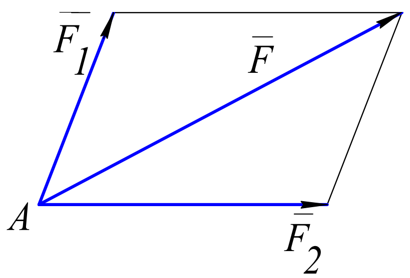


Рис. 4. Аксиома 3

На основании аксиомы 3 любую силу $\overline{R}$ можно разложить на составляющие по любым двум заданным направлениям (рис. 5): $\overline{R} = \overline{R}_1 + \overline{R}_2$;

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\cos\left(\overline{R}_1 \wedge \overline{R}_2\right)}.$$

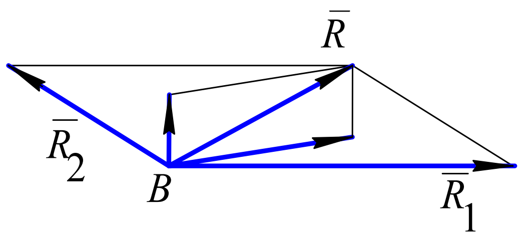


Рис. 5. Разложение силы

С помощью вышеприведенных аксиом нужно самостоятельно доказать теорему о том, что две параллельные силы, направленные в одну сторону, имеют равнодействующую силу, параллельную им, равную по величине их сумме и направленную в ту же сторону (рис. 6).

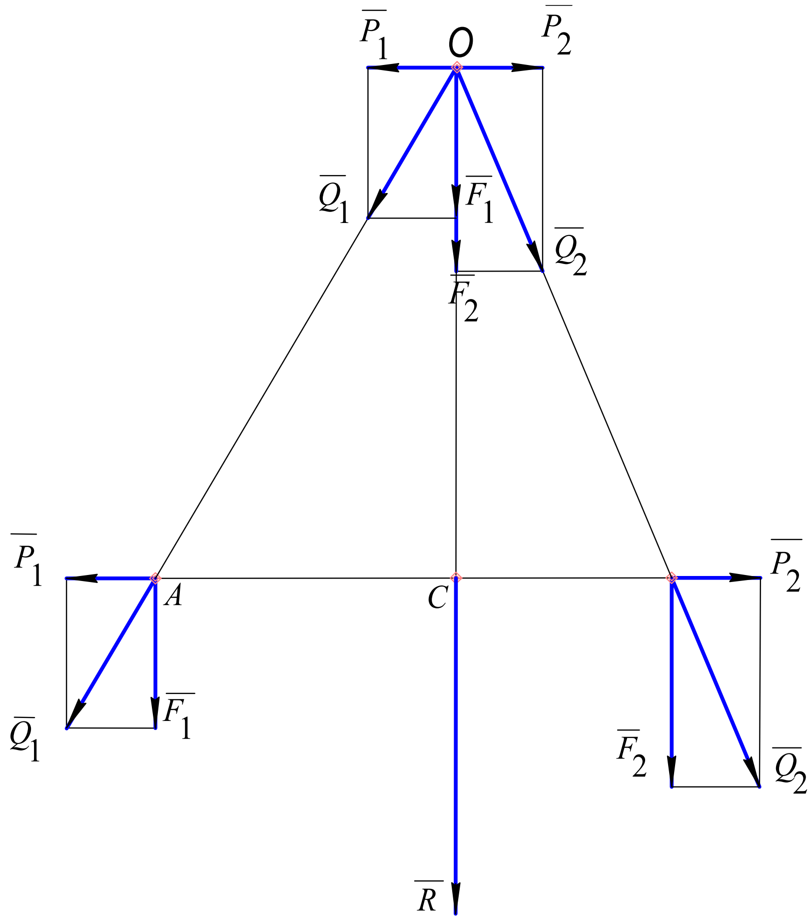


Рис. 6. Сложение параллельных сил

Линия действия равнодействующей силы расположена между линиями действия заданных сил и делит отрезок, соединяющий точки приложения этих сил, внутренним образом на части, обратно пропорциональные модулям сил.

Аксиома 4

При действии одного тела на другое силы их взаимодействия равны по модулю, направлены по общей линии действия в противоположные стороны.

Так, на рис. 7 тело I действует на тело II в точке A силой $\overline{F}_{12}$, а тело II оказывает противодействие, равное силе $\overline{F}_{21}$. Силы $\overline{F}_{12}$ и $\overline{F}_{21}$ равны по величине и противоположно направлены по общей линии действия: $(\overline{F}_{12} = -\overline{F}_{21})$.

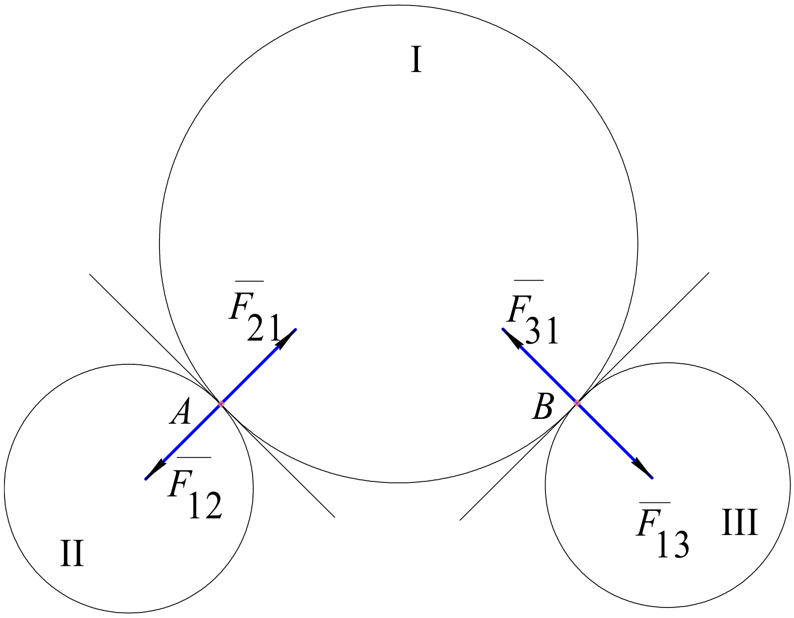


Рис. 7. Аксиома 4

Несвободным называется тело, перемещения которого как-то ограничены. Если тело *A* находится в соприкосновении с телом *B* (рис. 8), вследствие чего последнее ограничивает перемещения тела *A*, то тело *B* называют связью по отношению к телу *A*.

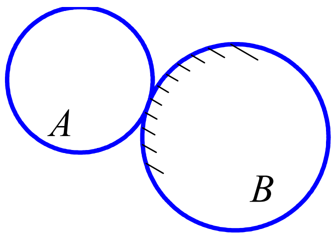


Рис. 8. Несвободное тело. Связь

Сила, с которой связь действует на несвободное тело, называется реакцией связи. Модуль и направление реакции связей зависят как от характера связей, так и от заданных сил, приложенных к телу.

Рассмотрим примеры определения реакций связей.

1. Если твердое тело (рис. 9) опирается в точке *A* на гладкую (без трения) поверхность, препятствующую перемещению тела в направлении, перпендикулярном этой поверхности, то реакция этой поверхности направлена по перпендикуляру, восстановленному из точки *A* к общей касательной плоскости τ, и называется нормальной реакцией $\overline{N}_A$.

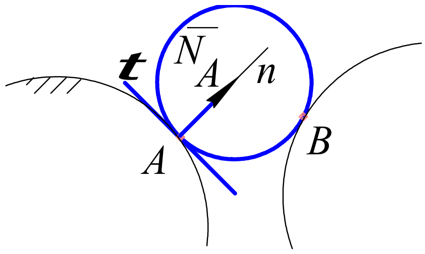


Рис. 9. Реакция гладкой поверхности

Если тело опирается на острие (рис. 10), то реакция, $\overline{N}_A$ направлена перпендикулярно к поверхности самого тела. Если тело острием C опирается на поверхность связи, то реакция $\overline{N_C}$ направлена перпендикулярно к поверхности связи. Определите самостоятельно направление нормальной реакции в точке B на рис. 9 и 10.

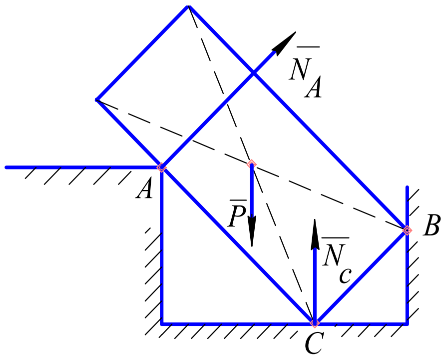


Рис. 10. Касание точкой или на точку

2. Связь в виде нерастяжимой нити (троса, цепи и т.д.), изображенная на рис. 11, препятствует перемещению тела вдоль направления AB, под действием, например, силы тяжести $\overline{P}$ тела. Поэтому реакция нити $\overline{T}_A$ (натяжение нити) направлена всегда вдоль нити (троса, цепи и т.д.) от тела из точки A.

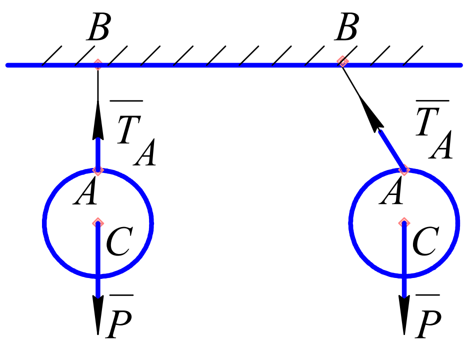


Рис. 11. Реакция нити

3. Сочленение тел часто осуществляется посредством шарниров. Шарнирами называются устройства, связывающие тела и позволяющие им совершать взаимно относительное вращение. Цилиндрический шарнир допускает вращение

тела вокруг одной оси и скольжение вдоль нее. При отсутствии трения реакция такого шарнира располагается в плоскости, перпендикулярной оси вращения шарнира. Модуль и направление реакции шарнира неизвестны, поэтому такую реакцию представляют двумя неизвестными по величине, но взаимно перпендикулярными по направлению составляющими (рис. 12 б): $\overline{R}_A = \overline{R}_1 + \overline{R}_2$.

Рис. 12. Шарнирно-неподвижная опора

Тогда $\overline{R}_A = \left|\overline{R}_A\right| = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$; $\cos(\overline{R}_1 \wedge \overline{R}_A) = \dfrac{R_1}{R_A}$.

Шарнирно-неподвижную опору на расчетных схемах обозначают условно, как показано на рис. 12 а.

4. У шарнирно-подвижной опоры ось шарнира поставлена на катки, которые могут кататься по гладкой плоскости (рис. 13).

Реакция такой связи направлена перпендикулярно плоскости, на которую опираются катки, и проходит через ось вращения (рис. 13 б). На схемах шарнирно-подвижную опору условно изображают, как показано на рис. 13 а.

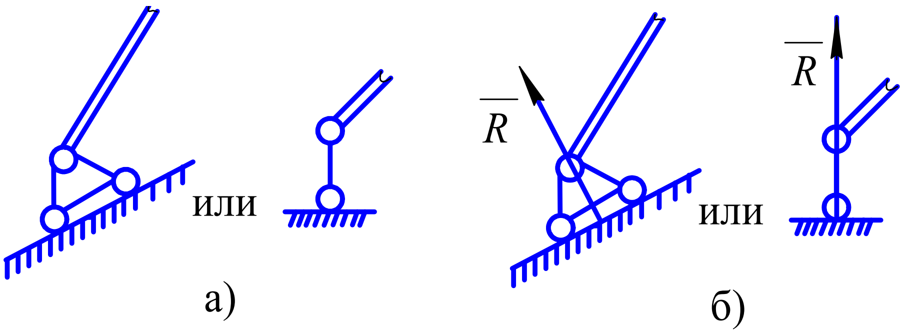


Рис. 13. Шарнирно-подвижная опора

5. Если твердое тело укреплено с помощью абсолютно жестких невесомых стержней, на концах которых имеются неподвижные шарниры, то линию действия реакции каждой стержневой связи следует провести через оси опорных шарниров (рис. 14).

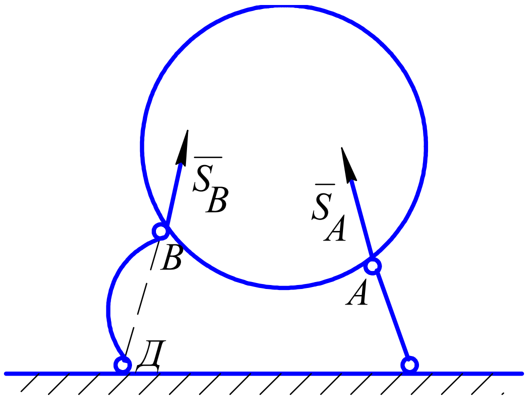


Рис. 14. Реакция стержня

Аксиома 5 (аксиома связей)

Равновесие тела не нарушится, если освободить его от связей, оставив приложенными к нему реакции связей.

Аксиома 6 (аксиома отвердевания)

Равновесие механической системы не нарушается от наложения новых связей.

При этом под механической системой подразумевается совокупность материальных тел и точек.

Выполните самостоятельно упражнение: покажите направления реакций связей для примеров, приведенных на рис. 15 и 16.

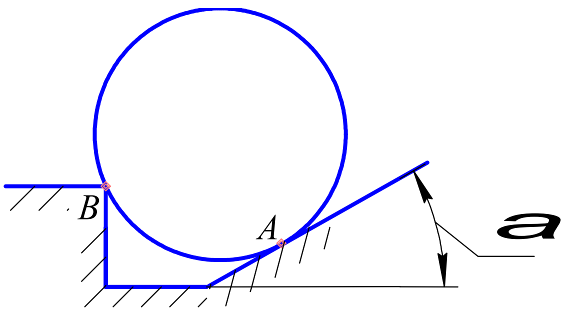


Рис. 15. Самостоятельное упражнение

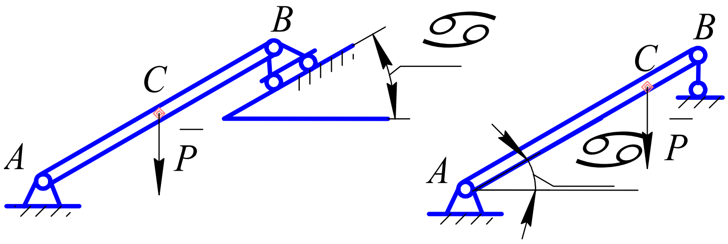


Рис. 16. Самостоятельное упражнение

Контрольные вопросы

1. Если твердое тело находится в покое, а на него действует система двух сил, то какими свойствами эти две силы обладают?
2. Докажите, что сила, действующая на твердое тело, – скользящий вектор.
3. Как определить величину и направление равнодействующей двух сил, приложенных к одной точке твердого тела?
4. Какую силу мы называем равнодействующей данной системы сил?
5. Чему равна, как направлена и в какой точке приложена равнодействующая двух параллельных сил, действующих на твердое тело?
6. Какова зависимость между действием и противодействием?
7. Как читается аксиома о связях?
8. Приведите примеры связей и укажите направления соответствующих реакций.

2. Система сходящих сил

Силы называются сходящимися, если линии действия всех сил, составляющих систему, пересекаются в одной точке (рис. 17).

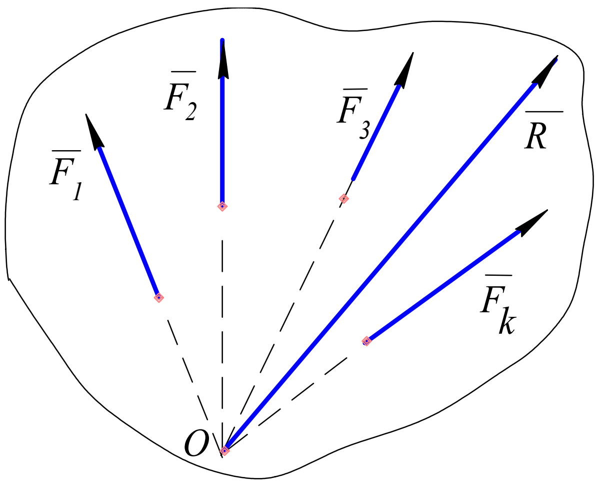


Рис. 17. Сходящиеся силы

Приведем без доказательства теорему: система сходящих сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$, действующих на твердое тело, эквивалентна одной силе $\overline{R}$ (равнодействующей), которая равна векторной сумме этих сил и проходит через точку O пересечения их линий действия: $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \backsim \overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$.

Определим величину и направление равнодействующей, воспользовавшись аналитическим способом. Поместим начало прямоугольной системы координат в точку O (рис. 18).

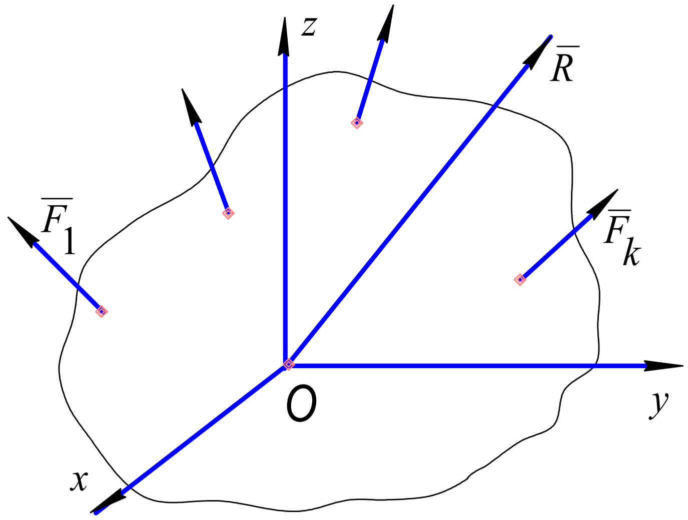


Рис. 18. Аналитический способ сложений сил

Тогда для проекций R_x, R_y, R_z равнодействующей $\overline{R}$ соответственно на оси x, y, z получим:

$$R_x = \sum F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx};$$
$$R_y = \sum F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny};$$
$$R_z = \sum F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz},$$

где $F_{kx}; F_{ky}; F_{kz}$ – проекции силы $\overline{F}_k$ на указанные оси. Таким образом, проекции равнодействующей системы сходящихся сил на оси координат равны алгебраическим суммам проекций этих сил на соответствующие оси. Тогда модуль равнодействующей

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2 + (\sum F_{kz})^2}.$$

Направляющие косинусы равнодействующей соответственно будут:

$$\cos\,(Ox\hat{;}\overline{R}) = \frac{R_x}{R};\ \cos\,(Oy\hat{;}\overline{R}) = \frac{R_y}{R};\ \cos\,(Oz\hat{;}\overline{R})\ \frac{R_z}{R}.$$

Условия равновесия системы сходящих сил

Для равновесия заданной системы сходящих сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая равнялась нулю, то есть $\overline{R} = 0$; $\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{F_k} = 0$ или в аналитической форме: $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx} = 0$; $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky} = 0$; $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{kz} = 0$.

При решении задачи на равновесие твердого тела, на которое действует три непараллельные силы, расположенные в одной плоскости, полезно использовать теорему о трех силах. Эта теорема утверждает, что в этом случае линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

<u>*Рассмотрим пример*</u>: однородный шар весом $\overline{P}$ и радиусом R опирается на гладкую вертикальную стенку и удерживается в равновесии при помощи нити AD длиной l (рис. 19), определить натяжение нити и реакцию вертикальной стенки.

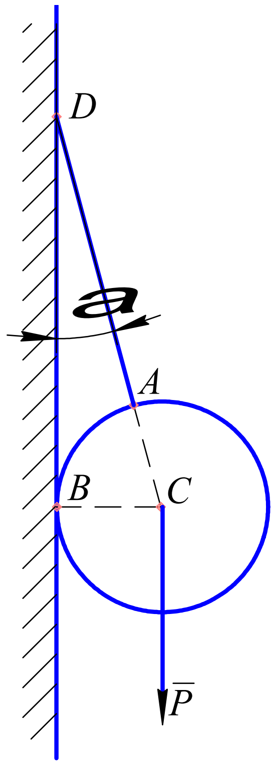


Рис. 19. Пример

Освободим шар от связей и рассмотрим его как свободное тело (рис. 20 а), на которое действует кроме известной силы $\overline{P}$ сила реакции гладкой стенки $\overline{N}_B$ и реакция нити $\overline{T}$.

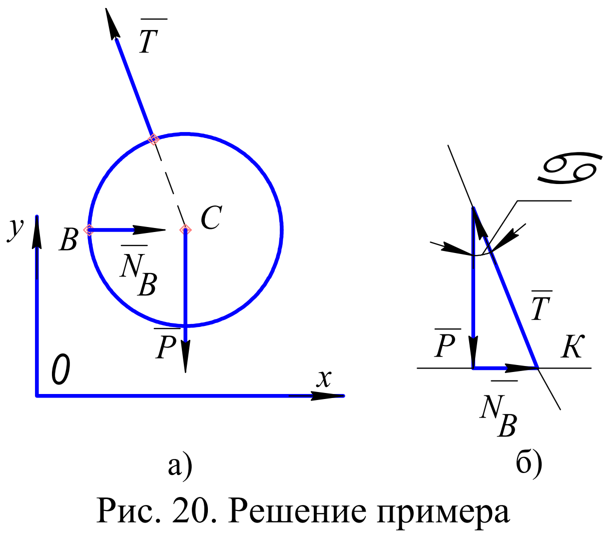


Рис. 20. Решение примера

Линия действия силы $\overline{N}_B$ перпендикулярна стенке и проходит через точку C. Тогда линия действия силы $\overline{T}$ (как третьей силы) должна проходить также через точку C. Следовательно, шар при равновесии займет такое положение, при котором нить AD будет продолжением его радиуса. В положении равновесия три силы образуют уравновешенную систему сил $\overline{P}+\overline{N}_B+\overline{T}=0$ или замкнутый силовой треугольник (рис. 20 б). Построение силового треугольника следует начинать с изображения заданной силы $\overline{P}$. Изобразив вектор $\overline{P}$, проводим через его начало и конец прямые, параллельные направлениям сил $\overline{N}_B$ и $\overline{T}$. Точка K – точка пересечения этих прямых, определит третью вершину силового треугольника. Ориентация векторов в силовом треугольнике должна быть такой, чтобы силовой треугольник был замкнутым. Это дает возможность проверить правильность направления неизвестных сил реакций. Построенный силовой треугольник подобен треугольнику BCD (рис. 19). Из их подобия получаем:

$$\frac{T}{R+l}=\frac{N_B}{R}=\frac{P}{\sqrt{(R+l)^2-R^2}} \text{ или } N_B=P\frac{R}{\sqrt{(R+l)^2-R^2}};\ T=P\frac{(R+l)}{\sqrt{(R+l)^2-R^2}}.$$

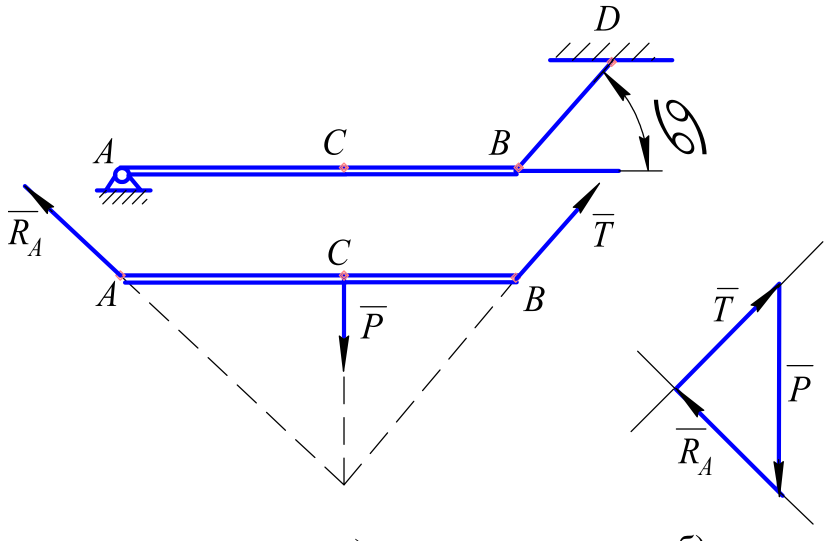
Рассмотрим также аналитический способ решения этой задачи.

Выберем декартовые оси координат Oxy (см. рис. 20). На шар действуют три силы, расположенные в плоскости Oxy. Для плоской системы сходящих сил запишем два уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx}=0; -T\sin\alpha+N_B=0;\ \sum F_{ky}=0;\ T\cos a-P=0; T=P\frac{1}{\cos\alpha};\ N_B=P\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

<u>*Решите самостоятельно задачу*</u> (рис. 21).

Однородный стержень весом $\overline{P}$ и длиной $2l$ (рис. 21 а), закрепленный в точке A при помощи цилиндрического шарнира, удерживается в горизонтальном положении нерастяжимой веревкой BD, составляющей угол α с горизонтом.



а) б)

Рис. 21. Самостоятельная задача

Определить опорные реакции.

<u>Решать задачу рекомендуется в такой последовательности</u>.

1. Выделите тело, равновесие которого необходимо изучить.
2. Покажите на рисунке заданные силы.
3. Покажите реакции связей.
4. Обратите внимание, что на стержень действует три силы, следовательно, их линии действия пересекутся в одной точке (рис. 21 а).

Таким образом, направления линий действия всех трех сил известны, требуется только определить неизвестные модули двух реакции: $\overline{T}$ и $\overline{R_A}$.

5. Можно построить силовой треугольник из сил $\overline{P}, \overline{T}, \overline{R_A}$ (рис. 21 б). Этот треугольник – равнобедренный. Отсюда следует $T = ...; R_A = ...$.

6. Выберите оси координат Axy и составьте уравнения равновесия сил, действующих на стержень AB:

1) $\sum F_{kx} = 0$;

2) $\sum F_{ky} = 0$.

7. Решите эти уравнения относительно $\overline{T}$ и $\overline{R_A}$ и посмотрите, как эти величины изменяются при увеличении угла α. Подсчитайте значения T и R_A при $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Ответ: $T = R_A = \frac{1}{2}P$.

<u>Решите контрольную задачу</u> (рис. 22). Через невесомый блок перекинута веревка AB. К концу B веревки привязан груз веса P, конец A закреплен на вертикальной стенке под углом α к ней. Определить зависимость реакций оси блока от угла α и подсчитать значения R_O при $\alpha_1 = 60°; \alpha_2 = 90°; \alpha_3 = 120°$.

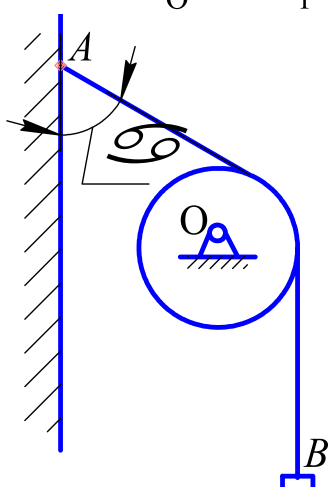


Рис. 22. Контрольная задача

Ответ: $R_{01} = P$; $R_{02} = P\sqrt{2}$; $R_{03} = P\sqrt{3}$.

Контрольные вопросы

1. Какие системы сил называются эквивалентными?
2. Какую силу называют равнодействующей данной системы сил?
3. Как определить величину и направление равнодействующей системы сходящихся сил?
4. Что значит – система сил эквивалентна нулю?
5. Напишите условия равновесия системы сходящихся сил в векторной и аналитической формах.
6. Вспомните все аксиомы статики.

Рекомендуемая литература:[1, гл. I, II; 2 гл. 1−4; 3 гл. I §1; гл.II §1].

3. Произвольная плоская система сил

Алгебраическим моментом силы $\overline{F}$ относительно точки *0* называют взятое со знаком (+) или (–) произведение модуля силы *F* на ее плечо h (рис. 23), то есть $m_0(\overline{F}) = \pm Fh$.

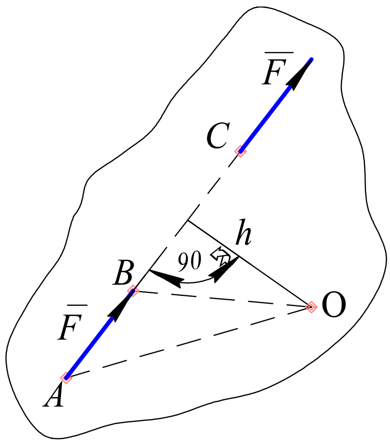


Рис. 23. Момент силы

Плечо h силы $\overline{F}$ относительно точки O равно длине перпендикуляра, опущенного из точки *O*на линию действия силы $\overline{F}$. Условимся, что момент силы считать положительным, если сила стремится вращать тело вокруг точки против хода часовой стрелки.

Из определения алгебраического момента силы следует, что абсолютная величина момента силы относительно точки равна удвоенной площади треугольника *OAB*, то есть (см. рис. 23) $\left| m_O(\overline{F}) \right| = 2S_{\Delta OAB}$.

Момент силы относительно точки равен нулю, если линия действия силы проходит через точку O то есть $h = 0$.

Момент силы относительно точки не изменится, если силу перенести вдоль ее линии действия в любую другую точку C .

Свойства пар сил на плоскости

Парой сил называют систему двух параллельных сил, равных по модулю и направленных в противоположные стороны (рис. 24).

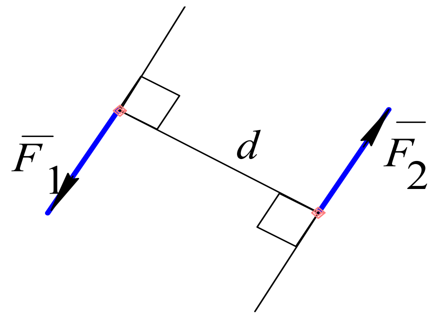


Рис. 24. Пара сил

Пара сил – неупрощаемый элемент статики. Наряду с силой пара сил является вторым самостоятельным элементом статики. Каждой из сил пары присущи свойства обычной силы, но пара сил обладает особыми свойствами: пара сил имеет свою плоскость действия, величина и направление действия пары сил на твердое тело определяются ее алгебраическим моментом. Алгебраическим моментом пары сил называют величину $m = m(\overline{F}_1, \overline{F}_2) = \pm F_1 d = \pm F_2 d$, т.е. взятое за знаком (+) или (−) произведение модуля одной из сил пары на плечо пары сил d (рис. 25). Плечом пары сил называют кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары. Момент пары сил считается положительным, если пара сил стремится вращать твердое тело против хода часовой стрелки. Момент пары сил численно равен площади параллелограмма, построенного на силах пары:

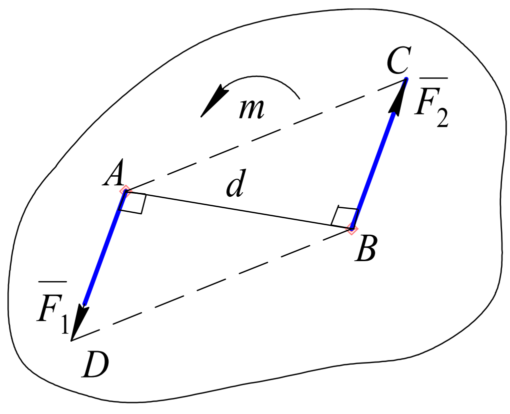


Рис. 25. Условное изображение пары сил

$$m = m(\overline{F}_1, \overline{F}_2) = F_1 d = S_{ACBD} = 2S_{\Delta ABD} = 2S_{\Delta ABC}.$$

На расчетных схемах пару сил условно изображают круговой стрелкой, показывающей направление действия пары сил, с указанием модуля m (см. рис. 25).

Приведем основные свойства пар сил на плоскости.

1. Сумма проекций сил, составляющих пару сил, на любую ось равна нулю.

2. Сумма моментов сил, составляющих пару сил, относительно любой точки в плоскости действия пары никогда не равна нулю и сохраняет неизменное значение, равное моменту пары сил.

3. Две пары сил, расположенные в одной плоскости, эквивалентны, если они имеют одинаковые алгебраические моменты:

$$m = \pm F_1 d = \pm F_1' d_1'.$$

4. Не изменяя действия пары сил на твердое тело, т.е. не изменяя величину и направление ее момента, пару сил можно поворачивать на любой угол и переносить в плоскости ее действия в любое место.

5. Не изменяя величину и направление момента пары сил, можно уменьшить (увеличить) силы пары и увеличить (уменьшить) плечо пары сил. Отсюда вытекает, что две заданные пары сил всегда можно привести к одному плечу.

6. Если на твердое тело действуют две пары сил, расположенные в одной плоскости, то их действие на твердое тело можно заменить действием одной эквивалентной пары сил, алгебраический момент которой равен алгебраической сумме моментов слагаемых пар.

7. Если на твердое тело в одной плоскости действует n пар сил, то момент эквивалентной пары сил равен алгебраической сумме моментов слагаемых пар сил, т.е. $M = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k$.

8. Для равновесия твердого тела, на которое действует n пар сил, расположенных в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы момент эквивалентной пары сил был равен нулю, то есть $M = 0$. При этом условии слагаемые пары взаимно уравновешиваются: $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k = 0$.

<u>Произвольная плоская система сил</u> – это такая система сил, линии действия которых произвольно располагаются в одной плоскости. Существует теорема Пуансона, на основании которой можно перенести силу $\overline{F}$ из одной точки приложения A твердого тела (рис. 26) на параллельную линию действия

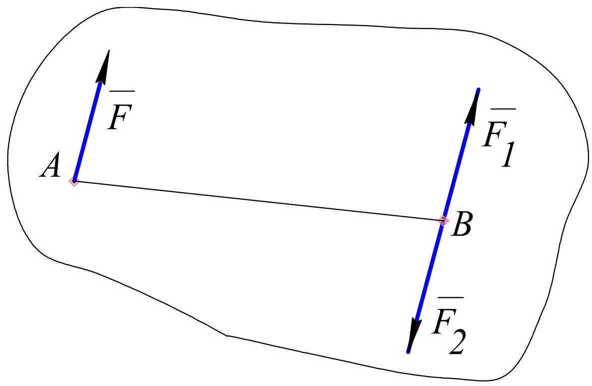


Рис. 26. Теорема о параллельном переносе сил

в любую точку B, присоединив к этой силе еще пару сил, алгебраический момент которой равен алгебраическому моменту силы $\overline{F}$ относительно новой точки приложения:

$$m = m(\overline{F}, \overline{F}_2) = m_B(\overline{F}).$$

Основная теорема статики утверждает, что любую плоскую систему сил, действующих на твердое тело, можно заменить силой, приложенной в произвольно выбранной точке O плоскости действия сил, и парой сил. Эту операцию называют приведением системы сил к центру O (рис. 27).

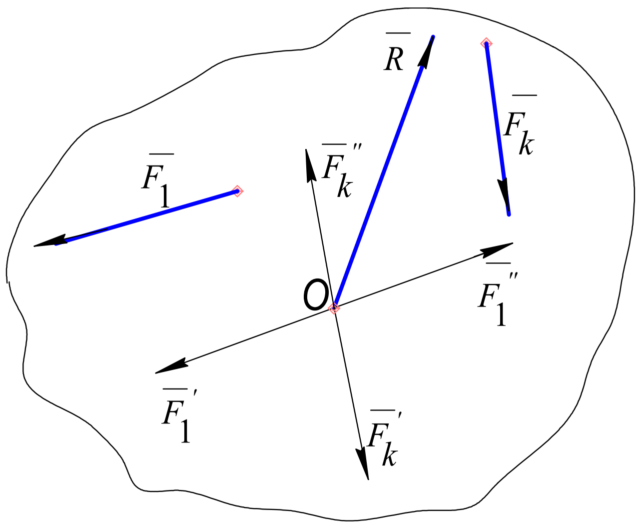


Рис. 27. Приведение плоской системы сил к центру

В результате приведения плоской системы сил к центру O (рис. 28) получим одну силу $\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$ и одну пару сил, алгебраический момент которой (обозначим его L_O) равен сумме алгебраических моментов сил плоской системы относительно центра приведения O: $L_O = \sum_{k=1}^{n} m_O(\overline{F}_k)$.

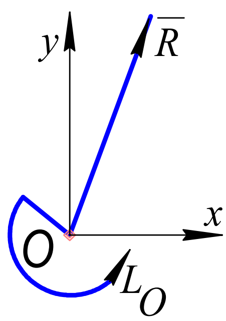


Рис. 28. Главный вектор и главный момент

Сумму алгебраических моментов сил заданной плоской системы относительно центра приведения называют алгебраическим главным моментом плоской системы сил относительно центра приведения. Силу $\overline{R}$, равную векторной сумме сил системы, называют главным вектором плоской системы сил. Заметим, что главный вектор $\overline{R}$ не зависит от выбора центра приведения, а главный момент L_O изменяется с переходом к другому центру приведения. Получим формулы для определения модуля и направления главного вектора. Для этого в точке O (см. рис. 28) построим декартовы оси координат Oxy.

Тогда $\overline{R} = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{F}_k = R_x \bar{i} + R_y \bar{j}$, где $R_x = \sum F_{kx}$, $R_y = \sum F_{ky}$ – проекции главного вектора на оси Ox, Oy равные алгебраическим суммам проекций всех сил системы на соответствующие оси. По известным проекциям определяют модуль главного вектора $R = \left|\overline{R}\right| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ и косинус его угла с любой из декартовых осей, например, с осью Ox: $\cos\,(Ox \hat{;} \overline{R}) = \dfrac{R_x}{R}$.

<u>*Условия равновесия произвольной плоской системы сил*</u>

Теорема. Для равновесия произвольной плоской системы сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент системы сил относительно любого центра, равнялись нулю:

$$\overline{R} = 0; \;\; L_O = 0.$$

Отсюда следуют три алгебраических уравнения равновесия плоской системы сил: 1) $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx} = 0$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky} = 0$; 3) $\sum\limits_{k=1}^{n} m_O(\overline{F}_k) = 0$.

Из алгебры известно, что из трех независимых уравнений можно определить только три неизвестные величины. Если в трех уравнениях равновесия плоской системы сил содержатся три неизвестные величины, то задача является статически определенной. Если неизвестных больше трех, то задача является статически неопределенной и такую задачу методами статики абсолютно твердого тела решить нельзя.

Рассмотрим примеры.

<u>Пример 1.</u> Горизонтальная балка AC укреплена при помощи неподвижного шарнира в точке A и подвижного шарнира в точке B (рис. 29).

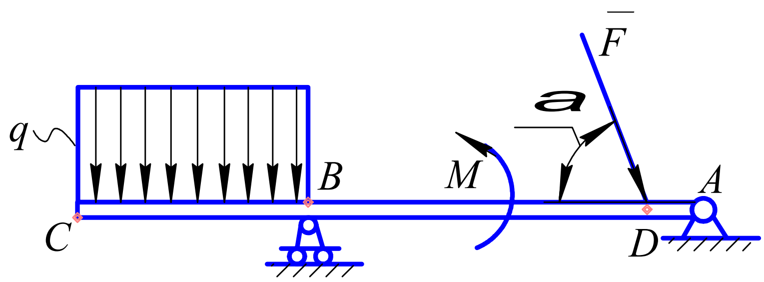


Рис. 29. К примеру 1

На балку действуют в точке D сосредоточенная сила $\overline{F}$, пара сил с положительным моментом M и на пролете $BC = l$ м балки равномерно распределенные силы интенсивности q Н/м. Написать условия равновесия балки и определить реакции опор A и B.

1. Так как все аксиомы и теоремы статики формулируются для сосредоточенных сил, приложенных к твердому телу, то рассмотрим способ перехода от параллельных распределенных сил к сосредоточенным. Распределенные силы характеризуются интенсивностью q, то есть силой, приходящейся на единицу объема, площади или длины. В рассматриваемом примере параллельные распределенные силы постоянной интенсивности q действуют на участке балки $BC = l$. Заменим их сосредоточенными (рис. 30).

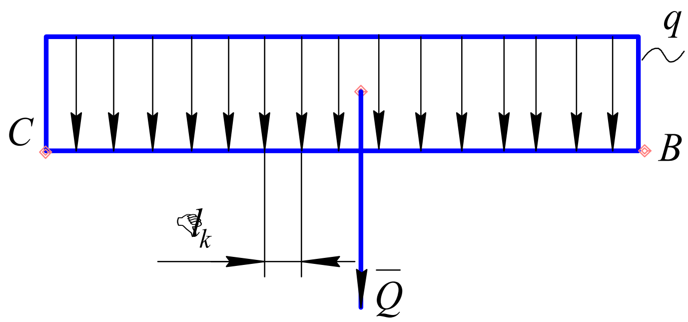


Рис. 30. Сосредоточенная сила

Для этого участок BC разобьем на отрезки Δl_k достаточно малых размеров по сравнению с длиной BC. На каждый отрезок Δl_k действует сила $\overline{q}\Delta l_k$, которую при достаточной малости длины отрезка Δl_k можно считать сосредоточенной элементарной силой. Таким образом, на отрезке BC будет действовать система элементарных сосредоточенных параллельных сил $(\overline{q}\Delta l_k)$, которые согласно теореме о сложении двух параллельных сил можно последовательно сложить и заменить одной равнодействующей силой, по модулю равной

$$Q = \sum_{k=1}^{n} q\Delta l_k = q \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k = ql .$$

Сила $\overline{Q}$ направлена параллельно распределенным силам и приложена в середине отрезка BC.

2. Освободим балку AC от связей. Приложим к точке A реакцию шарнира $\overline{R}_A = \overline{x}_A + \overline{y}_A$, в точке B – реакцию $\overline{R}_B = \overline{y}_B$.

3. Нарисуем расчетную схему, на которой отметим все силы, действующие на балку AC (рис. 31).

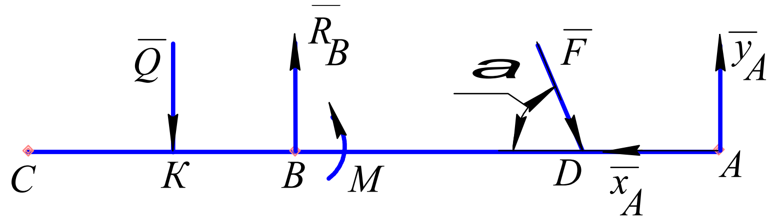


Рис. 31. Расчетная схема к примеру 1

4. Подсчитаем число неизвестных, их три: $\bar{x}_A$; $\bar{y}_A$; $\bar{y}_B$.

5. Составим уравнения равновесия плоской системы сил, действующих на балку AC:

1) $\sum F_{kx} = 0;\; -x_A + F\cos\alpha = 0;\; x_A = F\cos\alpha$;

2) $\sum F_{ky} = 0;\; y_A + y_B - F\sin\alpha - Q = 0;\; y_A = F\sin\alpha + Q - y_B$;

3) $\sum m_A(\bar{F}_K) = 0;\; -y_B(AB) + \mathrm{M} + Q(AK) + F(AD\sin\alpha)$;

$$y_B = \frac{1}{AB}\left[\mathrm{M} + Q(AK) + F(AD\sin\alpha)\right].$$

Пример 2. На балку AB действует пара сил с моментом M и распределенная нагрузка с максимальной интенсивностью $q_{\max}$. Конец A балки заделан в стену. Написать уравнения равновесия сил действующих на балку AB, и определить реакцию заделки (рис. 32).

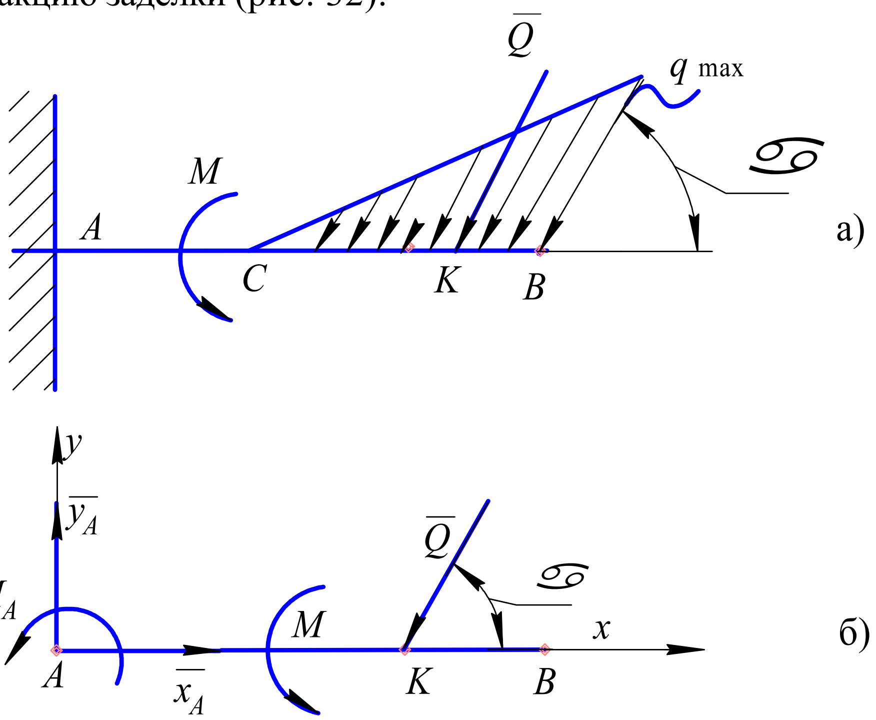


Рис. 32. К примеру 2

Обратите внимание на последовательность рассуждений при решении задачи.

1. Заменим действие распределенных сил сосредоточенной силой $\bar{Q}$. В случае распределенных сил с интенсивностью, изменяющейся по линейному закону

(рис. 32 а), сосредоточения сила равна $Q=\frac{1}{2}q_{max}l$, где q_{max} – наибольшая интенсивность распределенных сил. Линия действия силы $\overline{Q}$ параллельна линиям действия сил распределенной нагрузки и проходит через точку K балки AB. Точка K – точка приложения сосредоточенной силы $\overline{Q}$ отстоит от точки B на расстоянии $BK=\frac{1}{3}BC$ или от точки C на расстоянии $KC=\frac{2}{3}BC$.

2. Построим декартовые оси координат Axy.

3. Рассмотрим связи. Связь, наложенная на конец A балки, называется заделкой в точке A. Эта связь препятствует не только линейным перемещениям закрепленной в точке A балки, но и повороту балки вокруг этой точки. К концу балки A со стороны стены приложены неизвестные распределенные силы. Если эти неизвестные распределенные силы заменим сосредоточенными элементарными силами и приведем их к точке A, то в точке A получим неизвестную сосредоточенную силу $\overline{R}_A$ и пару сил с неизвестным моментом M_A, который называют моментом заделки. Следовательно, реакция заделки выражается неизвестной по величине и направлению силой $\overline{R}_A$ и неизвестным алгебраическим моментом заделки M_A.

4. Нарисуем расчетную схему (рис. 32 б). Силу $\overline{R}_A$ в точке A представим двумя взаимно перпендикулярными составляющими по осям x и y: $\overline{R}_A=\overline{x}_A+\overline{y}_A$.

Момент заделки M_A изобразим круговой стрелкой.

5. Подсчитаем число неизвестных, их три: x_A; y_A; M_A.

6. Составим уравнения равновесия плоской системы сил, действующих на балку AB, и определим неизвестные:

1) $\sum F_{kx}=0$; $x_A-Q\cos\alpha=0$; $x_A=Q\cos\alpha$;

2) $\sum F_{ky}=0$; $y_A-Q\sin\alpha=0$; $y_A=Q\sin\alpha$;

3) $\sum m_A(\overline{F}_k)=0$; $M_A+M-Q(AK\sin\alpha)=0$; $M_A=Q(AK\sin\alpha)-M$.

Решите контрольную задачу.

Из условия равновесия балки AB (рис. 33) определить опорные реакции, если

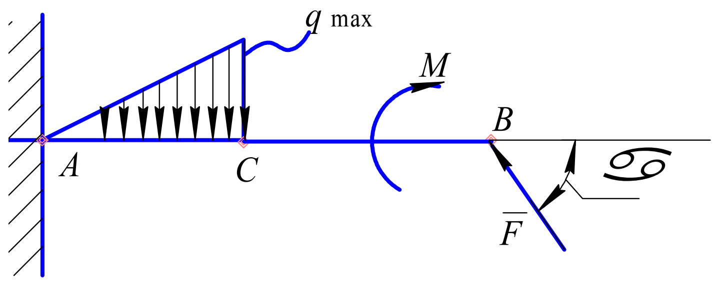


Рис. 33. К контрольной задаче

$AB = 8$ м; $AC = 6$ м; $F = 4$ кН; $\mathrm{M} = 2$ кН·м; $q_{max} = 3$ кН/м.

Ответ: $x_A = 2$ кН; $y_A =$ 5,5 кН; $M_A =$ 10,32 кН·м.

Контрольные вопросы

1. Какую систему сил называют плоской?
2. Какую силу называют главным вектором плоской системы сил?
3. Дайте определение главного момента плоской системы сил относительно центра приведения.
4. Сформулируйте условия равновесия плоской системы сил.
5. Какие задачи являются статически определенными, и какие статически неопределенными?

Рекомендуемая литература:[1, гл.III,IV; 2, гл. 5, 6; 3, гл I; 4,с.13−20].

4. Условия равновесия плоской системы сил, действующих на сочлененную систему

Системы, состоящие из нескольких твердых тел, соединенных между собой различными внутренними связями (шарнирные соединения, гибкие связи и т.д.), называют сочлененными системами. Силы, действующие на сочлененную систему, удобно разделить на:

1) внутренние силы – это силы взаимодействия между телами, образующими сочлененную систему;

2) внешние силы – это силы, действующие на тела сочлененной системы со стороны других тел, не входящих в рассматриваемую сочлененную систему.

Обычно после отбрасывания внешних связей (опор) сочлененная система не остается жесткой, так как ее отдельные части могут перемещаться друг относительно друга. Но на основании аксиомы отвердевания система сил, действующая на такую систему тел, должна при равновесии удовлетворять условиям равновесия твердого тела.

Каждое твердое тело, входящее в сочлененную систему, находится в покое, поэтому для плоской системы сил, действующих на каждое тело в отдельности, можно записать три уравнения равновесия. При расчленении системы надо следить, чтобы силы взаимодействия между телами сочлененной системы в точках сочленения были равны по величине, но противоположны по направлению.

Рассмотрим примеры

Пример 1 (рис. 34). Кронштейн состоит из невесомых стержней AD и BC, шарнирно соединенных между собой в точке B и шарнирно прикрепленных в точках A и C к вертикальной стенке. Горизонтальный стержень нагружен распределенной нагрузкой с максимальной интенсивностью q_{max}. Наклонный стержень нагружен парой сил с моментом M, в точке O силой $\overline{P}$, $OC = OB$. Определить реакции шарниров A, B, C.

Заменим распределенную нагрузку сосредоточенной силой $Q = \frac{1}{2} q_{\max} AD$, приложенной в точке K стержня AD. Отбросив внешние связи, приложим в точках A и C реакции. Рассмотрим равновесие всего кронштейна в целом. На него действуют заданные силы $\overline{P}$, $\overline{Q}$, пара сил с моментом M и реакции связей: $\overline{x}_A$; $\overline{y}_A$; $\overline{x}_C$; $\overline{y}_C$.

Нарисуем расчетную схему 1(рис. 34 б). Кронштейн, освобожденный от внешних связей, не образует жесткой конструкции (брусья могут поворачиваться вокруг шарнира B), но по аксиоме отвердевания, действующие на него силы при равновесии должны удовлетворять условиям равновесия статики. Составим эти условия по схеме 1 (см. рис. 34 б):

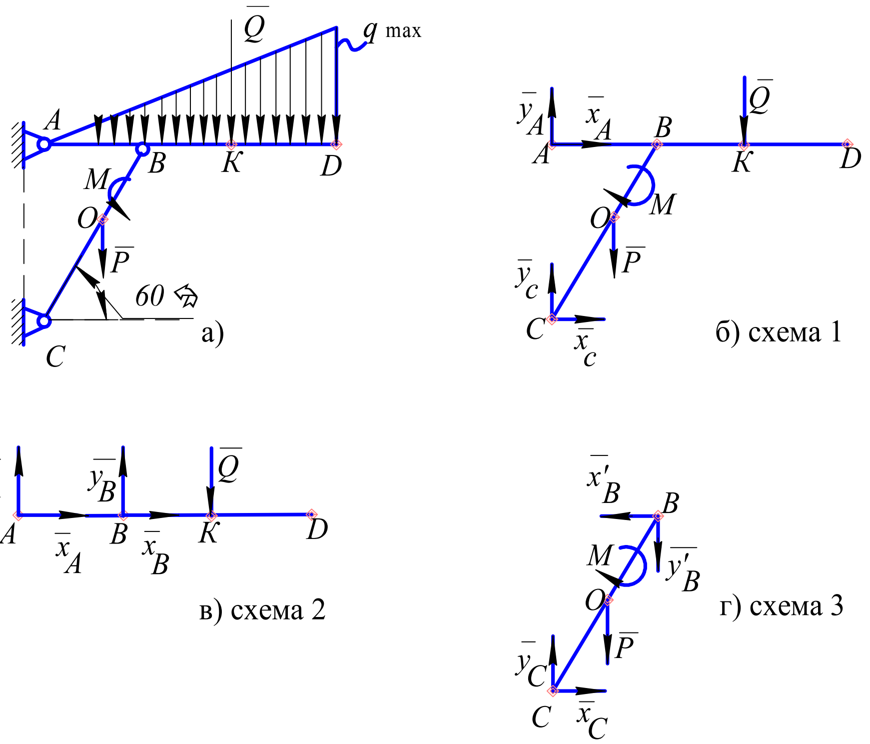


Рис. 34. К примеру 1

$$
\begin{aligned}
&1)\ \sum F_{kx} = 0;\ x_A + x_C = 0; \\
&2)\ \sum F_{ky} = 0;\ y_A + y_C - P - Q = 0; \qquad (1) \\
&3)\ \sum m_A(\overline{F}_K) = 0;\ x_C(AC) - \mathrm{M} - Q(AK) - P\left(\frac{1}{2}AB\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Полученные три уравнения содержат четыре неизвестных: $\overline{x}_A$; $\overline{y}_A$; $\overline{x}_C$; $\overline{y}_C$. Но это обстоятельство не делает задачу статически неопределенной, потому что сочлененную систему можно расчленить по шарниру B на отдельные твердые тела: горизонтальный стержень AD и наклонный стержень BC, приложив к каждому из тел в точке B силы действия одного тела на другое. Эти силы равны по величине, но противоположны по направлению: $\overline{R}_B = -\overline{R}'_B$; или $\overline{x}_B = -\overline{x}'_B$; $x_B = x'_B$; $\overline{y}_B = -\overline{y}'_B$; $y_B = y'_B$.

Расчетные схемы для горизонтального стержня (схема 2) и наклонного стержня (схема 3)приведены на рис. 34 в, г.

Составим уравнения равновесия для каждого стержня. Для горизонтального стержня AD согласно расчетной схеме 2:

1) $\sum F_{kx} = 0$; $x_A + x_B = 0$;

2) $\sum F_{ky} = 0$; $y_A + y_B - Q = 0$; (2)

3) $\sum m_B(\overline{F}_k) = 0$; $-y_A(AB) - Q(BK) = 0$.

Для наклонного стержня BC согласно расчетной схеме 3:

1) $\sum F_{kx} = 0$; $x_C - x'_B = 0$;

2) $\sum F_{ky} = 0$; $y_C - y'_B - P = 0$; (3)

3) $\sum m_B(\overline{F}_K) = 0; -y_C(BC\cos 60^\circ) + x_C(BC\sin 60^\circ) + P(\frac{1}{2}BC\cos 60^\circ) - \mathrm{M} = 0$.

Итак, для исследования рассматриваемой сочлененной системы написаны девять уравнений, в которых содержатся только шесть неизвестных. Для сочлененной системы, состоящей из двух тел, независимыми будут только шесть уравнений. Из девяти уравнений выберем шесть уравнений, из которых наиболее просто определяются шесть неизвестных величин: опорные реакции x_A; y_A; x_C; y_C и реакции внутреннего шарнира x_B; y_B.

Для определения опорных реакций можно выбрать следующие уравнения и в такой последовательности.

Из системы (1) выбираем уравнение 3 и определяем

$$x_C = \frac{1}{AC}\left[\mathrm{M} + Q(AK) + P(\frac{1}{2}AB)\right].$$

Тогда из уравнения 1 системы (1) можно найти

$$x_A = -x_C; x_A = -\frac{1}{AC}\left[\mathrm{M} + Q(AK) + P(\frac{1}{2}AB)\right].$$

Из системы (2) выбираем уравнение 3 и определяем $y_A = -Q\dfrac{BK}{AB}$.

А затем из уравнения 2 системы (1) можно определить

$$y_C = P + Q + Q\frac{BK}{AB}.$$

Для определения реакций x_B и y_B можно выбрать уравнения 1 и 2 из системы (2): $x_B = -x_A$; $x_B = \dfrac{1}{AC}\left[\mathrm{M} + Q(AK) + P(\frac{1}{2}AB)\right]$;

$$y_B = Q - y_A;\ y_B = Q\frac{AK}{AB}.$$

Из полученных результатов видно, что силы $\bar{x}_A$ и $\bar{y}_A$ имеют направления, противоположные, показанным на расчетных схемах (см. рис. 34).

<u>Пример 2</u> (рис. 35). Невесомый стержень AD, укрепленный в точке A при помощи шарнира, удерживается в заданном положении веревкой, привязанной в точке C и перекинутой через неподвижный блок B. К другому концу веревки привязан груз веса Q. Пренебрегая трением на оси блока, из условия равновесия указанной сочлененной системы определить опорные реакции в точках A и B, а также вес Q если $F = 5$кН; $M = 1$кН·м; $AD = 4$ м.

Освободив заданную систему от связей, приложим в точке A реакции $\bar{x}_A$, $\bar{y}_A$; в точке B реакции $\bar{x}_B, \bar{y}_B$. Данная сочлененная система имеет внутреннюю гибкую связь (веревку). Расчленим систему. При этом гибкую связь (веревку) разрываем и прикладываем в месте разрыва силы, равные силе натяжения так, чтобы отдельные части веревки были натянуты и равновесие отдельных тел системы не нарушалось. Силы натяжения, как внутренние силы системы, должны удовлетворять условиям: $\bar{T} = -\bar{T}'$ и $\bar{T}_1 = -\bar{T}_1'$, следовательно, $T = T'$ и $T_1 = T_1'$.

Нарисуем три расчетные схемы (рис. 35 а, б, в).

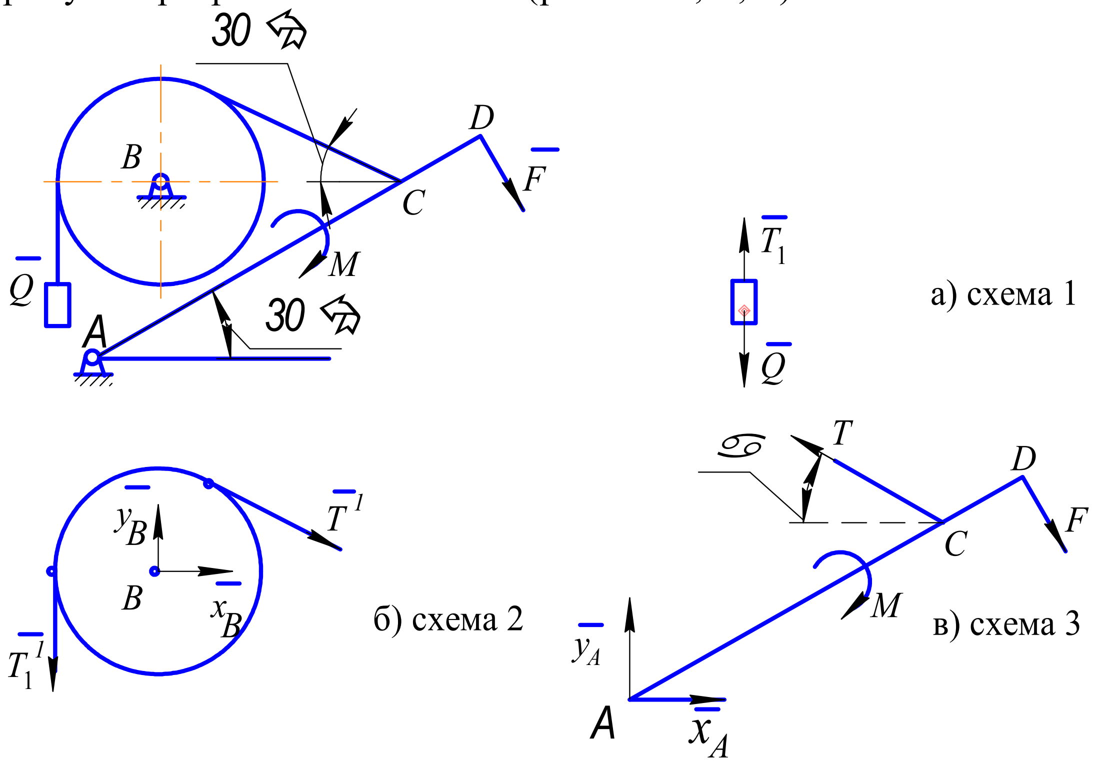


Рис. 35. К примеру 2

При рассмотрении схемы 1, видим, что $\bar{T}_1 + \bar{Q} = 0$ и $T_1 = Q$.

Составим три уравнения равновесия блока схема 2:

1) $\sum F_{kx} = 0$; $x_B + T'\cos 30^\circ = 0$; $x_B = -T'\cos 30^\circ$; $x_B = -\frac{\sqrt{3}}{2}T$;

2) $\sum F_{ky} = 0$; $y_B - T_1' - T'\sin 30^\circ = 0$; $y_B = T_1' + \frac{1}{2}T'$; $y_B = \frac{3}{2}T$;

3) $\sum m_B(\overline{F}_k) = 0$; $-T'R + T_1'R = 0$; $T' = T_1' = T$.

Из последнего уравнения получаем важный вывод, что при отсутствии трения в оси блока натяжение во всех точках нити одинаково по величине и направлено по касательной к веревке. Веревка при этом всегда натянута и испытывает натяжение, равное весу груза Q. Составим три уравнения равновесия стержня AD (схема3):

1) $\sum F_{kx} = 0$; $x_A + F\sin 30^\circ - T\cos 30^\circ = 0$; $x_A = 4{,}5$ кН;

2) $\sum F_{ky} = 0$; $y_A - F\cos 30^\circ + T\sin 30^\circ = 0$; $y_A = 0{,}28$ кН;

3) $\sum m_A(\overline{F}_k) = 0$; $T(AC\sin 60^\circ) - F(AD) - M = 0$; T=0,89 кН.

Пример 3 (рис. 36).

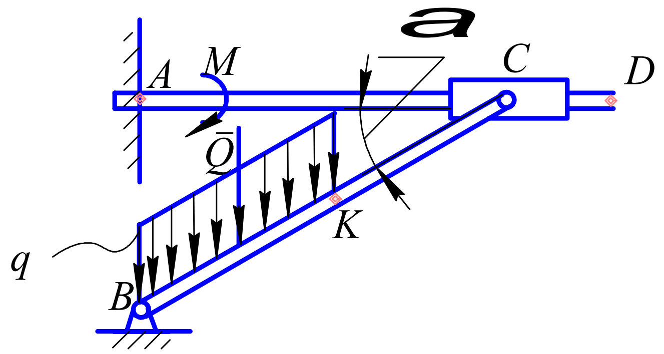


Рис. 36. К примеру 3

Стержень AD, заделанный концом A в стену, соединен ползуном (подвижным шарниром) C со стержнем BC, имеющим в точке B шарнирно-неподвижную опору. Стержень нагружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q, а стержень AD – парой сил с моментом M. Пренебрегая весом стержней и трением в шарнирах, определить опорные реакции и реакцию в шарнире C ($\alpha = 30°$).

1. Заменим распределенную нагрузку сосредоточенная силой $Q = qBK$ и приложенной в точке O стержня BC.

2. Освободим сочлененную систему от связей, то есть от заделки в точке A и неподвижного шарнира в точке B. Неизвестную по величине и направлению реакцию шарнира сразу разложим на составляющие: $\overline{R}_B = \overline{x}_B + \overline{y}_B$.

Реакцию заделки A представим силой $\overline{R}_A = \overline{x}_A + \overline{y}_A$ и парой сил с моментом заделки M_A. Неизвестных – пять, а условий равновесия для всей системы (рис. 37, схема 1) можно составить только 3:

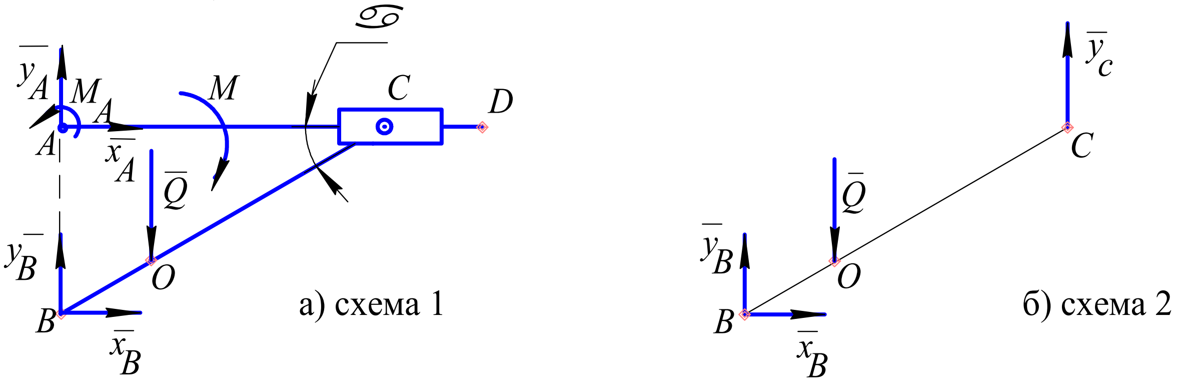


Рис. 37. К примеру 3

1) $\sum F_{kx} = 0$; $x_A + x_B = 0$;

2) $\sum F_{ky} = 0$; $y_A + y_B - Q = 0$;

3) $\sum m_A(\overline{F}_k) = 0$; $M_A - M + x_B(AB) - Q(BO\cos 30^\circ) = 0$.

3. Расчленим систему по подвижному шарниру C. Рассмотрим равновесие стержня BC. Нарисуем расчетную схему для стержня BC (рис. 37, схема 2).

При расчленении покажем реакцию $\overline{y}_C$ – это сила действия горизонтального стержня AD на наклонный стержень BC. Составим три уравнения равновесия стержня BC:

1) $\sum F_{kx} = 0$; $x_B = 0$;

2) $\sum F_{ky} = 0$; $y_B + y_C - Q = 0$;

3) $\sum m_B(\overline{F}_k) = 0$; $y_C(BC\cos 30^\circ) - Q(BO\cos 30^\circ) = 0$.

Теперь имеем шесть уравнений и шесть неизвестных. Решая систему шести уравнений, начиная с последнего, найдем:

$$y_C = Q\frac{BO}{BC};\ y_B = Q - y_C;\ y_B = Q\frac{OC}{BC};\ M_A = M + Q(BO\cos 30^\circ);$$

$$x_B = 0;\ x_A = 0;\ y_A = Q - y_B;\ y_A = Q\frac{BO}{BC}.$$

Самостоятельно рассмотрите равновесие горизонтального стержня AD. Нарисуйте расчетную схему для него. Обратите внимание на реакцию подвижного шарнира C.

Контрольная задача (рис. 38). Невесомый стержень AB, который может вращаться вокруг горизонтальной оси A, находится под действием распределенной нагрузки, меняющейся по линейному закону с максимальной интенсивностью

$q_{\max}$, опирается на поверхность гладкого невесомого цилиндра радиусом R в точке C.

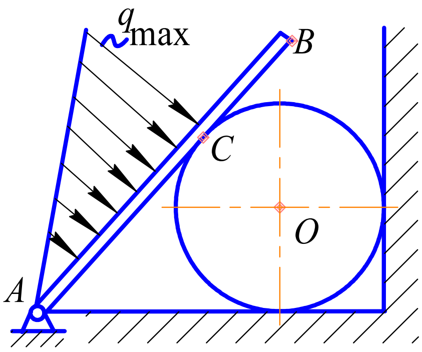


Рис. 38. К контрольной задаче

Цилиндр лежит на гладкой горизонтальной плоскости и опирается на гладкую вертикальную стену. Из условия равновесия системы определить давление цилиндра на стену.

Ответ: $N = \frac{1}{2} q_{\max} R$.

5. Произвольная пространственная система сил

Произвольной пространственной системой сил называют систему сил, линии действия которых произвольно направлены в пространстве. Рассмотрим основные определения.

Векторным моментом силы $\overline{F}$ относительно точки O называется векторное произведение (рис. 39) $\overline{m}_O(\overline{F}) = \overline{r}_A \times \overline{F}$.

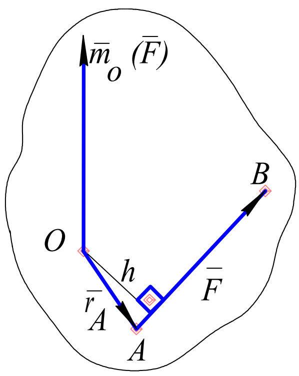


Рис. 39. Векторный момент силы

Вектор $\overline{m}_O(\overline{F})$ приложен в точке O, направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\overline{r}_A$ и $\overline{F}$ в ту сторону, откуда поворот тела под действием силы $\overline{F}$ виден происходящим против хода часовой стрелки. Модуль момента $\left|\overline{m}_O(\overline{F})\right| = Fh$, то есть модуль момента численно равен удвоенной площади треугольника OAB.

Момент силы $\overline{F}$ относительно любой оси l (рис. 40) равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость π, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения этой оси с плоскостью, то есть

$$m_l(\overline{F}) = \pm m_O(\overline{F}_\pi) = \pm F_\pi h.$$

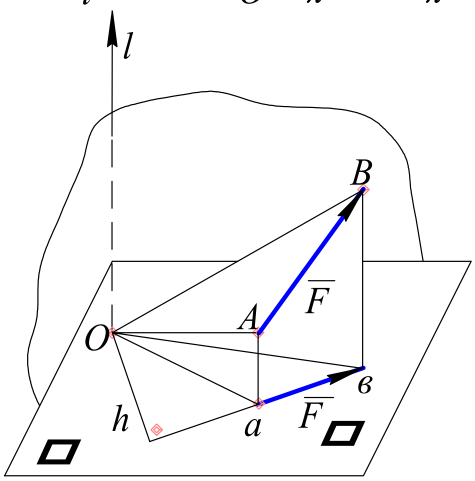


Рис. 40. Момент силы относительно оси

Следовательно, модуль момента силы $\overline{F}$ относительно оси l численно равен удвоенной площади треугольника $\Delta Oaв$ или $m_l(\overline{F}) = 2S_{\Delta Oaв}$.

Момент силы $\overline{F}$ относительно оси l считается положительным, если с положительного направления оси l видно, что проекция силы $\overline{F}_\pi$ стремится вращать тело вокруг оси против хода часовой стрелки.

Момент силы относительно оси равен нулю, если через линию действия силы и ось можно провести плоскость.

Рассмотрим важную зависимость.

Момент силы относительно оси равен проекции на эту ось векторного момента силы относительно любой точки на этой оси. Пусть на твердое тело (рис. 41) в точке A действует сила $\overline{F}$. Построим векторный момент силы $\overline{F}$ относительно точки O:

$$\overline{m}_O(\overline{F}) = \overline{r}_A \times \overline{F}; \quad \left|\overline{m}_O(\overline{F})\right| = 2S_{\Delta OAB}.$$

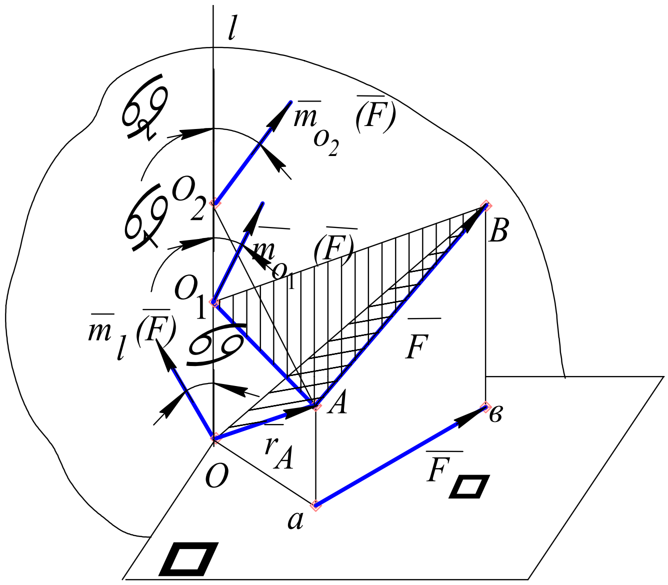


Рис. 41. Зависимость момента силы относительно
оси от момента силы относительно любой точки этой оси

Проведем через точку O ось l произвольного направления. Момент силы $\overline{F}$ относительно оси l равен $m_l(\overline{F}) = F_\pi h = 2S_{\Delta Oab}$.

Сравнивая площади треугольников, заметим, что $S_{\Delta Oab} = S_{\Delta OAB}\cos\alpha$.

Следовательно, $m_l(\overline{F}) = m_O(\overline{F})\cos\alpha = m_{O_1}(\overline{F})\cos\alpha_1 = m_{O_2}(\overline{F})\cos\alpha_2$.

Рассмотрим пример (рис. 42). Определим моменты сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ относительно координатных осей:

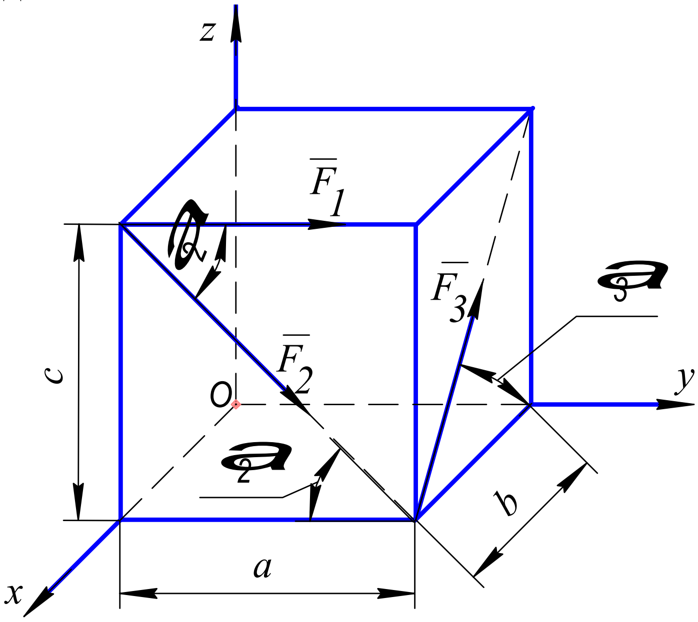


Рис. 42. Определение моментов сил F_1, F_2, F_3,
относительно координатных осей

$m_{Ox}(\overline{F}_1) = -F_1 c$; $m_{Ox}(\overline{F}_2) = -(F_2 \cos\alpha_2)c$; $m_{Ox}(\overline{F}_3) = (F_3 \sin\alpha_3)a$;
$m_{Oy}(\overline{F}_1) = 0$; $m_{Oy}(\overline{F}_2) = (F_2 \sin\alpha_2)b$; $m_{Oy}(\overline{F}_3) = -(\overline{F}_3 \sin\alpha_3)b$;
$m_{Oz}(\overline{F}_1) = F_1 b$; $m_{Oz}(\overline{F}_2) = (F_2 \cos\alpha_2)b$; $m_{Oz}(\overline{F}_3) = (\overline{F}_3 \cos\alpha_3)a$.

Свойства пар сил в пространстве Векторным моментом пары сил называется вектор (рис. 43) $\overline{m} = A\overline{B} \times \overline{F}_2 = B\overline{A} \times \overline{F}_1$.

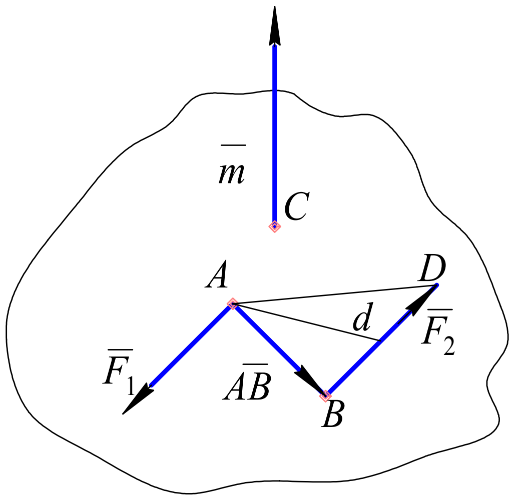


Рис. 43. Векторный момент пары сил

Этот вектор направлен перпендикулярно к плоскости действия пары сил в ту сторону, откуда видно, что пара сил стремится вращать тело против хода часовой стрелки. Модуль вектора равен произведению силы пары на плечо:

$$m = |\overline{m}| = F_2(AB)\sin(A\overline{B}\,\hat{;}\,\overline{F}_2) = F_1(BA)\sin(\overline{BA}\,\hat{;}\,\overline{F}_1) = F_2 d = F_1 d = 2S_{\Delta ABD}.$$

Векторный момент пары сил однозначно определяет действие пары сил на твердое тело.

При переносе пары сил в параллельную плоскость ее векторный момент не изменится. Он также не изменяется при любых преобразованиях пар сил, рассмотренных в п.3, при которых не изменяется алгебраический момент пары сил. Отсюда следует, что две пары сил, действующие на одно твердое тело, эквивалентны, если они имеют одинаковые по величине и направлению векторные моменты.

Теорема о сложении двух пар сил в пространстве

Две пары сил, действующие на твердое тело и лежащие в пересекающихся плоскостях, можно заменить одной парой сил, векторный момент которой равен сумме векторных моментов заданных слагаемых пар сил (рис. 44):

$$\overline{m} = \overline{m}_1 + \overline{m}_2.$$

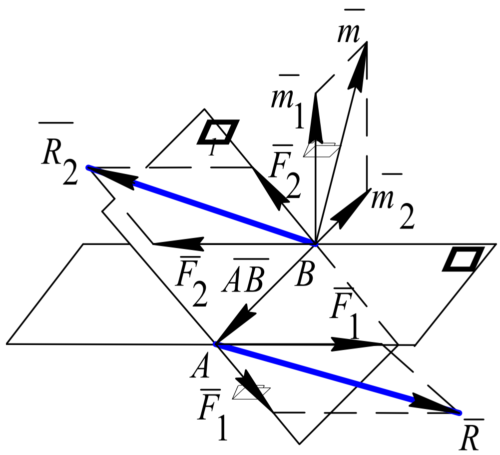


Рис. 44. Сложение пар сил в пространстве

Операцию замены двух пар сил одной, им эквивалентной, называют сложением пар сил.

Если на твердое тело действует n пар сил, как угодно расположенных в пространстве, то эти n пар сил можно заменить одной эквивалентной парой сил, векторный момент которой равен сумме векторных моментов заданных пар сил: $\overline{m} = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{m}_k$.

<u>Условия равновесия произвольной системы пар сил, действующих на твердое тело</u>

Для равновесия системы n пар сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы модуль векторного момента эквивалентной пары сил равнялся нулю. Итак, $|\overline{m}| = 0$, отсюда

$$m_x = 0;\ m_y = 0;\ m_z = 0 \text{ или } \sum_{k=1}^{n} m_{kx} = 0;\ \sum_{k=1}^{n} m_{ky} = 0;\ \sum_{k=1}^{n} m_{kz} = 0.$$

Таким образом, для равновесия n пар сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций векторных моментов n пар сил на каждую из трех координатных осей декартовой системы равнялась нулю.

<u>Теорема о параллельном переносе силы из одной точки твердого тела в произвольную другую точку</u>: сила, приложенная в какой-либо точке твердого тела, эквивалентна такой же силе, приложенной в любой другой точке этого тела, и паре сил, векторный момент которой равен векторному моменту данной силы относительно новой точки приложения.

Пусть в точке A твердого тела приложена сила $\overline{F}$ (рис. 45).

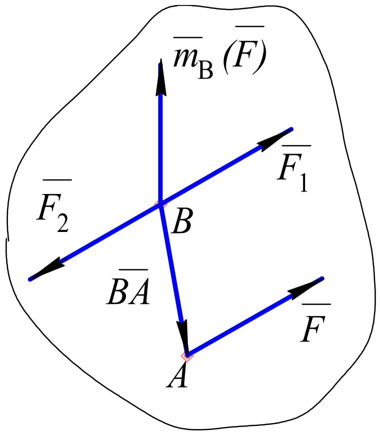


Рис. 45. Параллельный перенос силы

Проведем параллельный перенос силы $\overline{F}$ в точку B. Для этого в точке B приложим систему двух сил, эквивалентную нулю, то есть $(\overline{F_1},\overline{F_2})\backsim 0$, причем $\overline{F_1}=\overline{F}$, $\overline{F_2}=-\overline{F}$.

Тогда сила $\overline{F}\backsim(\overline{F},\overline{F_1},\overline{F_2})$, но эти три силы эквивалентны силе $\overline{F}_1$ и паре сил $(\overline{F},\overline{F_2})$. Следовательно, $\overline{F}\backsim\{\overline{F_1};(\overline{F_1}\overline{F_2})\}$.

Векторный момент пары сил равен $\overline{m}=\overline{m}(\overline{F},\overline{F_2})=\overline{BA}\times\overline{F}$, т.е. равен векторному моменту силы $\overline{F}$ относительно точки B: $\overline{m}=\overline{m_B}(\overline{F})$.

Приведем без доказательства основную теорему статики для произвольной пространственной системы сил: *любую произвольную пространственную систему сил, действующих на твердое тело, можно в общем случае заменить одной силой и одной парой сил* (рис. 46).

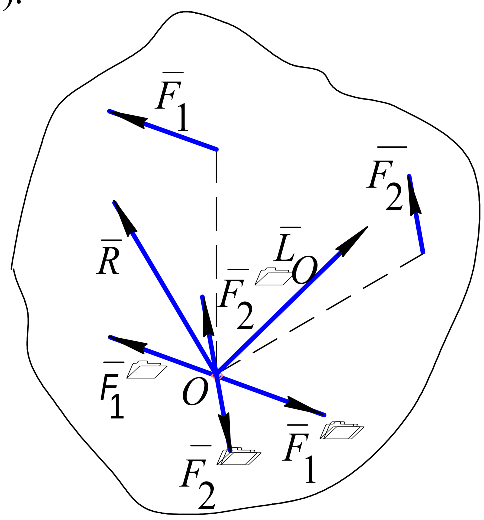


Рис. 46. Приведение сил к центру

В результате приведения произвольной пространственной системы сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$ к заданному центру получим одну силу $\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$, равную векторной сумме всех сил системы (силу $\overline{R}$ называют главным вектором пространственной системы сил) и одну пару сил, векторный момент которой $\overline{L}_O$ относительно точки O равен сумме векторных моментов всех сил системы относительно точки O: $\overline{L}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\overline{F}_k)$.

$\overline{L}_O$ называют главным моментом произвольной пространственной системы сил относительно центра приведения. Получим формулы для вычисления главного вектора и главного момента. Для этого в точке O (рис. 47) построим систему координат.

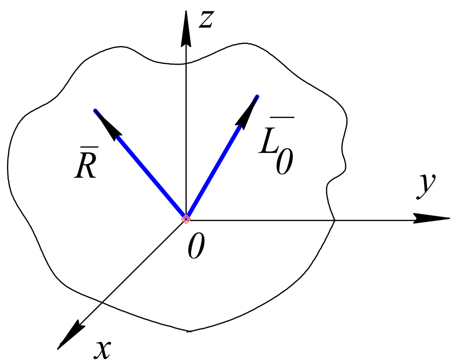


Рис. 47. Главный вектор и главный момент

Главный вектор равен $\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$. Проецируя обе части этого равенства на координатные оси, получим $R_x = \sum F_{kx}$; $R_y = \sum F_{ky}$; $R_z = \sum F_{kz}$.

Тогда $R = \overline{R} = \sqrt{\left(\sum F_{kx}\right)^2 + \left(\sum F_{ky}\right)^2 + \left(\sum F_{kz}\right)^2}$;

$$\cos(Ox\hat{;}\overline{R}) = \frac{R_x}{R};\ \cos(Oy\hat{;}\overline{R}) = \frac{R_y}{R};\ \cos(Oz\hat{;}\overline{R}) = \frac{R_z}{R}.$$

Главный момент равен $L_O = \sum_{k=1}^{n} m_O(\overline{F}_k)$.

Проецируя обе части этого равенства на координатные оси и используя связь момента силы относительно оси с проекцией на эту ось векторного момента силы относительно точки на этой оси, имеем:

$$L_{Ox} = \sum_{k=1}^{n} m_{Ox}(\overline{F}_k);\ L_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} m_{Oy}(\overline{F}_k);\ L_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} m_{Oz}(\overline{F}_k).$$

Тогда

$$L_O = \left|\overline{L}_O\right| = \sqrt{\left[\sum m_{Ox}(\overline{F}_k)\right]^2 + \left[\sum m_{Oy}(\overline{F}_k)\right]^2 + \left[\sum m_{Oz}(\overline{F}_k)\right]^2}\,;$$

$$\cos(Ox\hat{;}\overline{L}_O) = \frac{L_{Ox}}{L_O}\,;\ \cos(Oy\hat{;}\overline{L}_O) = \frac{L_{Oy}}{L_O}\,;\ \cos(Oz\hat{;}\overline{L}_O) = \frac{L_{Oz}}{L_O}\,.$$

Обратите внимание, что главный вектор $\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$ не зависит от выбора центра приведения, а главный момент $\overline{L}_O = \sum_{k=1}^{n} m_O(\overline{F}_k)$ зависит от выбора центра приведения.

<u>Контрольные вопросы</u>

1. Как определяется векторный момент силы относительно центра? В какой точке приложен этот вектор?
2. Как вычисляется момент силы относительно оси?
3. В каком случае момент силы относительно оси равен нулю?
4. Какая существует зависимость между моментом силы относительно оси и векторным моментом силы относительно любой точки, расположенной на оси?
5. Как определяется векторный момент пары сил? Каковы его свойства?
6. Какие пары сил в пространстве называют эквивалентными?
7. Запишите теорему о сложении двух пар сил в пространстве.
8. Запишите условия равновесия системы пар сил в пространстве.
9. В чем состоит теорема о параллельном переносе силы?
10. В чем состоит операция приведения к центру произвольной пространственной системы сил?
11. Что называют главным вектором пространственной системы сил?
12. Как определяется главный момент пространственной системы сил относительно центра приведения?
13. Напишите формулы для определения модулей и направлений главного вектора и главного момента относительно центра приведения.

6. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

<u>Теорема</u>

Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы и ее главный момент относительно какого-либо центра равнялись нулю, т.е. чтобы выполнялись векторные равенства: $\overline{R}=0$; $\overline{L}_O=0$. Из векторных равенств следует: $R_x=0$; $R_y=0$; $R_z=0$ и $L_{Ox}=0$; $L_{Oy}=0$; $L_{Oz}=0$.

1) $\sum F_{kx}=0$; 2) $\sum F_{ky}=0$; 3) $\sum F_{kz}=0$; 4) $\sum m_{Ox}(\overline{F}_k)=0$; 5) $\sum m_{Oy}(\overline{F}_k)=0$; 6) $\sum m_{Oz}(\overline{F}_k)=0$.

Совокупность этих шести равенств называют уравнениями равновесия произвольной пространственной системы сил.

Таким образом, для равновесия произвольной пространственной системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех декартовых осей координат равнялись нулю и суммы моментов всех сил системы относительно каждой из трех осей координат также равнялись нулю.

Рассмотрим пример

На брусок, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, действуют силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ и $\overline{F}_3$. Брусок укреплен с помощью сферического шарнира *A*, цилиндрического шарнира *B* и острия *C* (рис. 48).

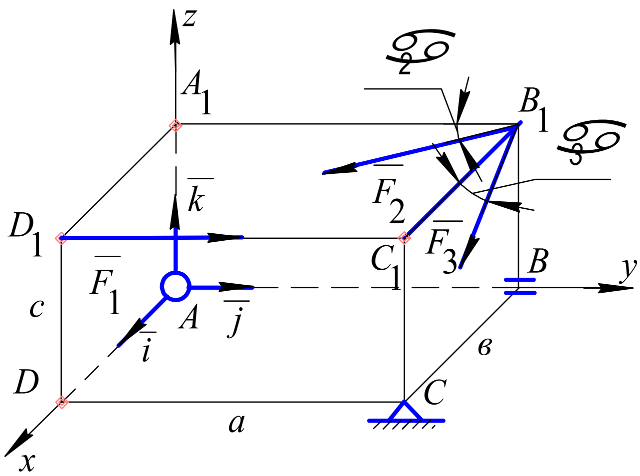


Рис. 48. К примеру

$AB=a$, $BC=в$, $AC=c$.

Написать условия равновесия бруска в заданной систем координат $Axyz$.

На брусок наложены связи, удерживающие его в равновесии в указанном положении. Применим аксиому о связях. Освобождая брусок от сферического шарнира *A*, ограничивающего перемещения бруска вдоль координатных осей, представим реакцию сферического шарнира тремя составляющими (рис. 49):

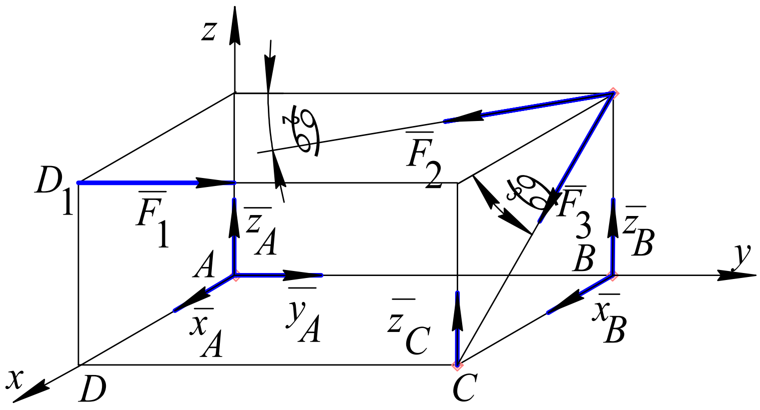


Рис. 49. Расчетная схема к примеру

$\overline{R}_A = \overline{x}_A + \overline{y}_A + \overline{z}_A$, где $\overline{x}_A = x_A\overline{i}$; $\overline{y}_A = y_A\overline{j}$; $\overline{z}_A = z_A\overline{k}$.

Освобождая брусок от цилиндрического шарнира B, ограничивающего перемещения бруска вдоль осей A_x и A_z, представим его реакцию двумя составляющими: $\overline{R}_B = \overline{x}_B + \overline{z}_B$, где $\overline{x}_B = x_B\overline{i}$; $\overline{z}_B = z_B\overline{k}$.

Освобождая брусок от острия C, приложим в точке C реакцию $\overline{R}_C = \overline{z}_C$, направление которой перпендикулярно плоскости бруска $ABCD$. Теперь рассмотрим равновесие бруска как свободного тела, на которое действует пространственная система сил, состоящая из заданных сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, и реакции $\overline{x}_A$; $\overline{y}_A$; $\overline{z}_A$; $\overline{x}_B$; $\overline{z}_C$; $\overline{z}_B$.

Запишем шесть уравнений равновесия сил, действующих на брусок. Сначала составим уравнения проекций сил:

1) $\sum F_{kx} = 0$; $x_A + x_B + F_2\sin\alpha_2 + F_3\cos\alpha_3 = 0$;

2) $\sum F_{ky} = 0$; $y_A + F_1 - F_2\cos\alpha_2 = 0$;

3) $\sum F_{kz} = 0$; $z_A + z_B + z_C - F_3\sin\alpha_3 = 0$;

4) $\sum m_{Ax}(\overline{F}_k) = 0$;

5) $\sum m_{Ay}(\overline{F}_k) = 0$;

6) $\sum m_{Az}(\overline{F}_k) = 0$.

Чтобы записать четвертое уравнение, составим сумму моментов сил, действующих на брусок относительно оси Ax .Сразу заметим, что моменты сил $\overline{x}_A$; $\overline{y}_A$; $\overline{z}_A$; $\overline{x}_B$, относительно оси Ax будут равны нулю, так как силы $\overline{x}_A$; $\overline{y}_A$; $\overline{z}_A$, пересекают ось Ax, а сила $\overline{x}_B$ параллельна оси Ax. Определим моменты сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{z}_B$, $\overline{z}_C$ относительно оси Ax. Сила $\overline{F}_1$ направлена по ребру D_1C_1, следовательно, лежит в плоскости DD_1C_1C перпендикулярной оси Ax, поэтому ее момент относительно оси Ax равен ее моменту относительно точки D:

$$m_{Ax}(\overline{F}_1) = -F_1(DD_1) = -F_1(c).$$

Силу $\overline{F}_2$ спроецируем на плоскость Ayz , перпендикулярную оси Ax затем определим алгебраический момент проекции силы относительно точки A пересечения оси с плоскостью Ayz : $m_{Ax}(\overline{F}_2) = F_2 \cos\alpha_2 (AA_1) = F_2 \cos\alpha_2 (c)$.

Сила $\bar{z}_B$ лежит в плоскости Ayz, перпендикулярной оси Ax, поэтому ее момент относительно оси Ax равен $m_{Ax}(\bar{z}_B) = z_B(AB) = +z_B(a)$.

Сила z_C лежит в плоскости DD_1C_1C, перпендикулярной оси Ax, которая пересекает эту плоскость в точке D, поэтому момент силы $\bar{z}_C$ относительно оси Ax равен $m_{Ax}(\bar{z}_C) = z_C(CD) = +z_C(a)$.

Силу $\overline{F}_3$ спроецируем в плоскость Ayz и определим момент ее проекции относительно точки A: $m_{Ax}(\overline{F}_3) = -F_3 \sin\alpha_3 (AB) = -F_3 \sin\alpha_3 (a)$.

Теперь сложим алгебраические моменты всех сил относительно оси Ax и запишем четвертое уравнение:

$$-F_1(c) + F_2 \cos\alpha_2 (c) - F_3 \sin\alpha_3 (a) + z_B(a) + z_C(a) = 0.$$

Составим сумму моментов сил относительно оси Ay. Отметим сразу, что моменты сил $\bar{x}_A; \bar{y}_A; \bar{z}_A; \overline{F}_1; \bar{x}_B; \bar{z}_B$ относительно оси Ay равны нулю. Объясните почему? Определим моменты сил $\overline{F}_2$; $\overline{F}_3$; $\bar{z}_C$ относительно оси Ay. Сила $\bar{z}_C$ лежит в плоскости CC_1B_1B перпендикулярной оси Ay, создает отрицательный момент относительно оси Ay, равный $m_{Ay}(\bar{z}_C) = -z_C(BC) = -z_C(в)$.

Сила $\overline{F}_3$ лежит в плоскости CC_1B_1B перпендикулярной оси Ay, поэтому ее момент относительно оси Ay равен ее моменту относительно точки B:

$$m_{Ay}(\overline{F}_3) = m_B(\overline{F}_3) = F_3 \cos\alpha_3 (c).$$

Силу $\overline{F}_2$ спроецируем в плоскость CC_1B_1B, затем определим алгебраический момент проекции силы относительно точки B:

$$m_{Ay}(\overline{F}_2) = F_2 \sin\alpha_2 (B_1B) = F_2 \sin\alpha_2 (c).$$

Запишем пятое уравнение равновесия: $-z_c(в) + F_2 \sin\alpha_2 (c) + F_3 \cos\alpha_3 (c) = 0$.

При составлении шестого уравнения равновесия заметим, что момент сил $\bar{x}_A$; $\bar{y}_A$; $\bar{z}_A$; $\bar{z}_B$; $\bar{z}_C$ относительно оси A_Z равны нулю. Объясните почему? Дальше составьте самостоятельно сумму моментов сил относительно оси A_Z и запишите шестое уравнение равновесия. Затем проверьте свои результаты. Вы должны получить шестое уравнение:

$$-x_B(AB) + F_1(A_1D_1) - F_2 \sin\alpha_2 (A_1B_1) - F_3 \cos\alpha_3 (A_1B_1) = 0,$$

$$-x_B(a)+F_1(\textit{в})-F_2\sin\alpha_2(a)-F_3\cos\alpha_3(a)=0.$$

Для облегчения работы по составлению уравнений равновесия или их проверки полезно сделать дополнительные рисунки, на которых можно изобразить проекции сил на плоскости, перпендикулярные осям: *Ax* (рис. 50), *Ay* (рис. 51), *Az* (рис. 52).

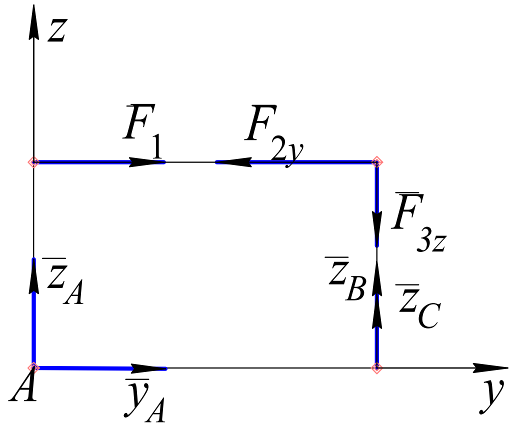


Рис. 50. Плоскость, перпендикулярная *Ax*

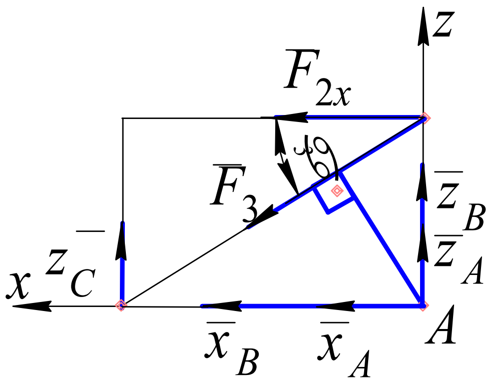


Рис. 51. Плоскость, перпендикулярная *Ay*

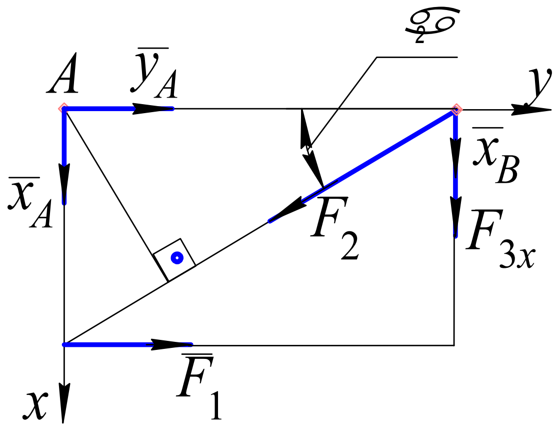


Рис. 52. Плоскость, перпендикулярная *Az*

Так, первые два и шестое уравнения можно проверить по рис. 52, где изображен вид бруска сверху (то есть с положительного направления оси Az) и показаны проекции сил на горизонтальную плоскость Axy. Напомним, что проекция силы на плоскость является вектором. По рис. 50 можно проверить второе, третье и четвертое уравнения. Здесь необходимо учесть, что $\overline{F}_{2y} = F_{2y}\bar{j}$; $\left(F_{2y} = -F_2 \cos\alpha_2\right)$; $\overline{F}_{3z} = F_{3z}\bar{k}$; $\left(F_{3z} = -F_3 \sin\alpha_3\right)$.

По рис. 51, где изображены вид бруска с положительного направления оси Ay и проекции сил на плоскость Axz, можно проверить первое, третье и пятое уравнения из уравнений равновесия бруска.

После внимательной проверки всех уравнений выпишем систему шести уравнений равновесия сил, действующих на брусок:

1) $x_A + x_B + F_2\sin\alpha_2 + F_3\cos\alpha_3 = 0$;

2) $y_A + F_1 - F_2\cos\alpha_2 = 0$;

3) $z_A + z_B + z_C - F_3\sin\alpha_3 = 0$;

4) $z_B(a) + z_C(a) - F_1(c) + F_2\cos\alpha_2(c) - F_3\sin\alpha_3(a) = 0$;

5) $-z_C(в) + F_2\sin\alpha_2(c) + F_3\cos\alpha_3(c) = 0$;

6) $-x_B(a) + F_1(в) - F_2\sin\alpha_2(a) - F_3\cos\alpha_3(a) = 0$.

Из этих шести уравнений легко определяются шесть неизвестных опорных реакций.

<u>Решите самостоятельно задачу</u>

Однородная прямоугольная рама весом Q укреплена с помощью шарового шарнира *A* и петли *B* (рис. 53).

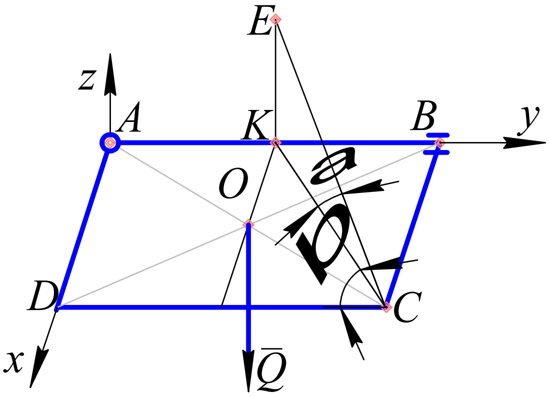


Рис. 53. К самостоятельной задаче

В горизонтальном положении рама удерживается веревкой CE, привязанной в точке C рамы. Веревка CE укреплена в точке E плоскости Ayz и составляет угол $\alpha = 60^{\circ}$ с горизонтальной плоскостью. Определить реакции шарнира, петли и веревки CE, если $AK = KB = AD = BC = a$.

При решении задачи придерживайтесь такой последовательности.

1. Выделите твердое тело, равновесие которого будете изучать в заданной системе осей координат. В данной задаче – это рама $ABCD$.

2. Покажите заданные силы. В данной задаче − это сила тяжести $\overline{Q}$.

3. Внимательно изучите связи, удерживающие раму в равновесии. Примените принцип освобождаемости от связей. В точке A приложите силу реакции $\overline{R}_A$ неизвестную по модулю и направлению, эту силу сразу можно представить тремя составляющими: $\overline{R}_A = \overline{x}_A + \overline{y}_A + \overline{z}_A$.

В точке B приложите силу реакции $\overline{R}_B = \overline{x}_B + \overline{z}_B$.

Реакцию веревки CE, направленную вдоль веревки из точки C, обозначим $\overline{T}$. Таким образом, получилась расчетная схема (рис. 54) для исследования равновесия свободной рамы под действием пространственной системы сил.

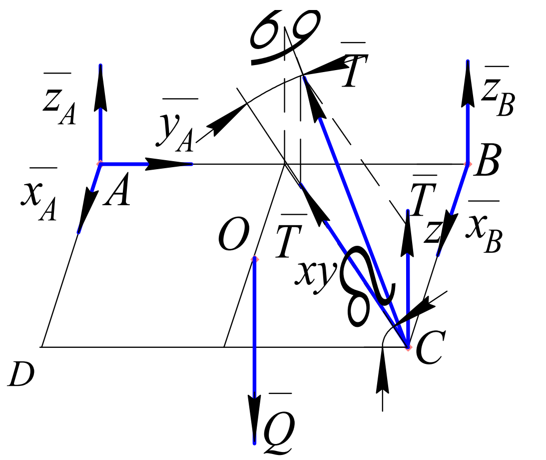


Рис. 54. К самостоятельной задаче
расчетная схема

4. Составьте по порядку шесть уравнений равновесия пространственной системы, предварительно разложив силу $\overline{T}$ на составляющие вдоль координатных осей: $\overline{T} = \overline{T}_x + \overline{T}_y + \overline{T}_z$, где

$$\overline{T}_x = T_x \bar{i}\,;\; T_x = -T\cos\alpha\sin\beta\,;$$
$$\overline{T}_y = T_y \bar{j}\,; T_y = -T\cos\alpha\cos\beta\,;$$
$$\overline{T}_z = T_z \bar{k}\,;\; T_z = T\sin\alpha :$$

1) $\sum F_{kx} = 0$; $x_A + x_B - T\cos\alpha\sin\beta = 0$;

2) $\sum F_{ky} = 0$ (составьте самостоятельно);

3) $\sum F_{kz} = 0$ (составьте самостоятельно);

4) $\sum m_{Ax}(\overline{F}_k) = 0; z_B(AB) + T\sin\alpha(AB) - Q\left(\frac{1}{2}AB\right) = 0$;

5) $\sum m_{Ay}(\overline{F}_k) = 0$ (составьте самостоятельно);

6) $\sum m_{Az}(\overline{F}_k) = 0$ (составьте самостоятельно).

Из этих уравнений должны получить следующие значения неизвестных:

$$x_A = \frac{1}{4} Q \operatorname{ctg} \alpha \sin \beta; \; y_A = \frac{1}{2} Q \operatorname{ctg} \alpha \cos \beta \; ; z_A = \frac{1}{2} Q;$$

$$x_B = \frac{1}{4} Q \operatorname{ctg} \alpha \sin \beta \; ; \; z_B = 0 \; ; T = \frac{1}{2} \frac{Q}{\sin \alpha}.$$

Решите контрольную задачу (рис. 55). Прямоугольная однородная пластина весом Q укреплена в точке A при помощи шарового шарнира, в точке B при помощи цилиндрического шарнира.

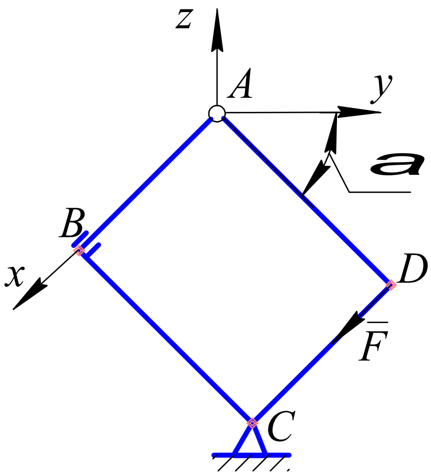


Рис. 55. К контрольной задаче

Сторона AB горизонтальна. В точке C пластина опирается на острие. В точке D на пластину действует сила $\overline{F}$, направленная вдоль стороны DC. Определить реакции точках: A, B и C если: $AB = CD = 2$ м ; $AD = BC = 4$ м; $Q = 8$ кН; $F = 10$ кН; α=30º.

При решении контрольной задачи постарайтесь также придерживаться вышеуказанной последовательности.

Проверьте ответы: $x_A = -10$ кН; $y_A = -10\sqrt{3}$ кН; $z_A = 14$ кН; $y_B = 9\sqrt{3}$ кН; $z_B = -9$ кН; $R_C = 2\sqrt{3}$ кН.

7. Пространственная система параллельных сил

Пусть на твердое тело действует пространственная система параллельных сил (рис. 56) $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right)$.

Приведем эту систему к центру O. Главный вектор $\overline{R} = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{F}_k$ направлен параллельно линиям действия системы сил.

Главный момент $\overline{L}_O = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\overline{r}_k \times \overline{F}_k\right)$, направлен перпендикулярно линиям действия системы сил, следовательно, $\overline{L}_O \perp \overline{R}$. Покажите, что в этом случае (рис. 57) систему сил можно привести к равнодействующей, приложенной в определенной точке *C*, которую называют центром системы параллельных сил.

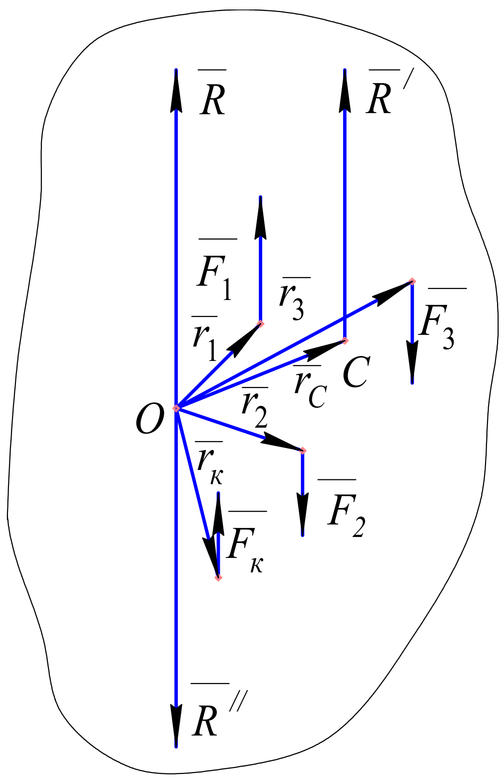


Рис. 56. Пространственная
система параллельных сил

Положение точки C относительно центра приведения O определяют по формуле: $\overline{r}_c = \frac{1}{R} \sum\limits_{k=1}^{n} (\overline{F}_k \times \overline{r}_k)$, где $\overline{r}_1, \overline{r}_2, ..., \overline{r}_n$ – радиусы-векторы точек приложения сил системы относительно центра O (см. рис. 56).

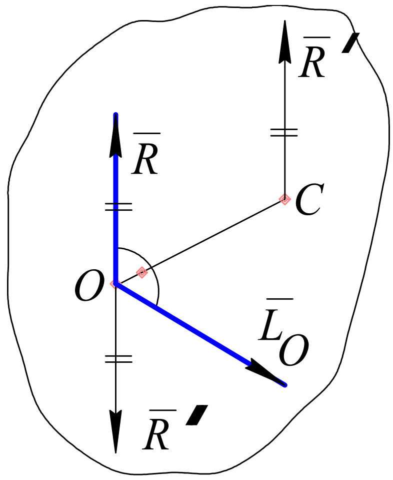


Рис. 57. Приведение системы сил к центу, если $\overline{L}_O \perp \overline{R}$

Построив в точке O декартову систему осей координат, можно записать координаты центра системы параллельных сил:

$$x_C = \frac{1}{R}\sum F_k x_k\ ;\ y_C = \frac{1}{R}\sum F_k y_k\ ;\ z_C = \frac{1}{R}\sum F_k z_k\ .$$

<u>Центр тяжести тела</u>

На все тела находящиеся в поле притяжения Земли, действует сила этого притяжения. Рассмотрим твердое тело вблизи поверхности Земли (рис. 58).

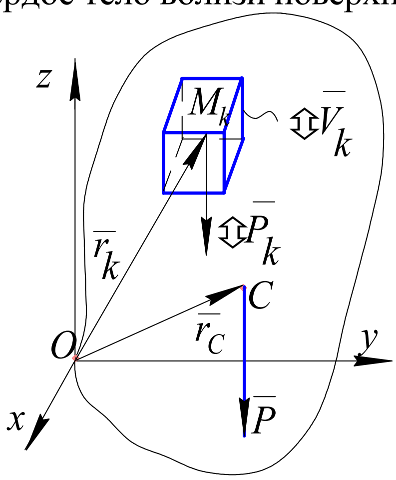


Рис. 58. Центра тяжести тела

Сечениями, параллельными координатным плоскостям, разобьем твердое тело на n элементарных частиц малых объемов: $\Delta V_1; \Delta V_2; ...; \Delta V_n$ с центрами в точках $M_1, M_2, ..., M_n$.

На каждую элементарную частицу тела будет действовать сила притяжения Земли, равная $\Delta\overline{P}_k$. Тогда на все тело будет действовать система n сил $\Delta\overline{P}_1; \Delta\overline{P}_2; \ldots; \Delta\overline{P}_n$.

Размеры тела по сравнению с радиусом Земли настолько малы, что силы земного притяжения, действующие на все частицы тела, можно считать параллельными между собой. Центр системы этих параллельных сил тяжести ($\Delta\overline{P}_1; \Delta\overline{P}_2; \ldots; \Delta\overline{P}_n$) называют центром тяжести тела. Положение центра тяжести тела по отношению к заданной декартовой системе координат определяется радиусом-вектором r_C,

где $\bar{r}_C = \frac{1}{P}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\Delta\overline{P}_k \times \bar{r}_k)$, где $P = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta P_k$ – вес тела, равный сумме модулей сил тяжести, действующих на все частицы этого тела ($n \to \infty$); $\bar{r}_k$ – радиусы-векторы M_k точек приложения сил $\Delta\overline{P}_k$ относительно центра O.

Методы определения координат центра тяжести тела

1. Положение центров тяжести однородных твердых тел:

а) если однородное тело имеет плоскость геометрической симметрии, то центр тяжести тела находится в этой плоскости;

б) если однородное тело имеет ось геометрической симметрии, то центр тяжести тела находится на этой оси;

в) если однородное тело имеет центр геометрической симметрии, то центр тяжести находится в этом центре;

г) центр тяжести однородной треугольной пластины находится на пересечении медиан;

д) центр тяжести однородной пластинки, имеющей форму параллелограмма (прямоугольника), находится на пересечении диагоналей.

2. Для определения центра тяжести тела сложной формы применяют метод разбиения тела на простейшие части, центры тяжести которых легко определяют.

Например, координаты центра тяжести пластины сложной формы (рис. 59) будут: $x_C = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3}{P_1 + P_2 + P_3}$; $y_C = \frac{P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3}{P_1 + P_2 + P_3}$,

где P_1, P_2, P_3 – веса частей пластинки соответственно прямоугольника и двух треугольников;

x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 – координаты точек приложения сил тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ соответствующих частей.

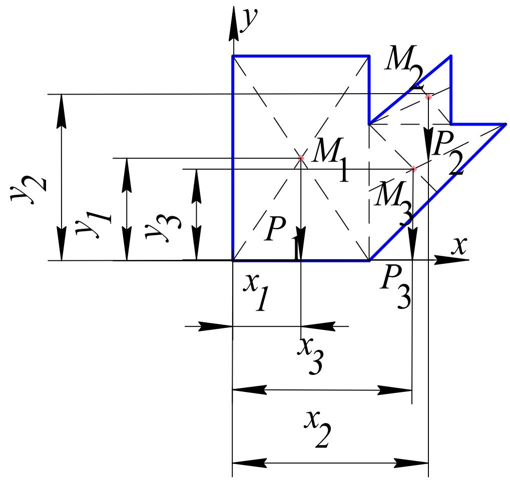


Рис. 59. Центр тяжести пластины сложной формы

Пример

Определим координаты центра тяжести однородной круглой пластины R=5 см, имеющей два круглых отверстия $r=1$ см; $C_1C_2=C_1C_3=3$ см относительно заданной системы координат (рис. 60).

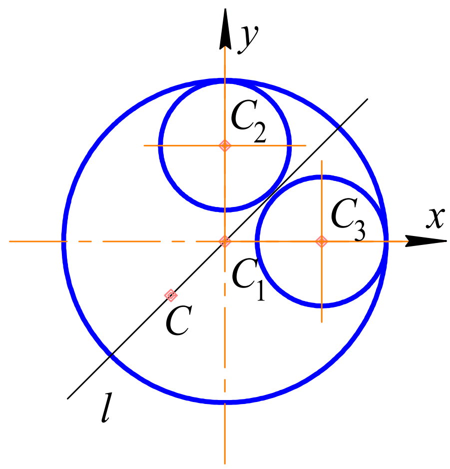


Рис. 60. Центр тяжести круглой пластины

Координаты центров тяжести $C_1; C_2; C_3$ соответствующих частей пластинки будут: $x_{C_1}=0$; $y_{C_1}=0$; $x_{C_2}=0$; $y_{C_2}=3$; $x_{C_3}=3$; $y_{C_3}=0$.

Вес однородной пластинки будет пропорционален площади. Площади соответствующих частей пластинки будут:

$$S_1=\pi R^2; S_1=25\pi \text{ см}^2;$$

$$S_2=S_3=\pi r^2; S_2=S_3=\pi \text{ см}^2.$$

Тогда координата

$$x_C = \frac{S_1 x_{C_1} - S_2 x_{C_2} - S_3 x_{C_3}}{S_1 - S_2 - S_3}; \quad x_C = -0{,}1364 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{S_1 y_{C_1} - S_2 y_{C_2} - S_3 y_{C_3}}{S_1 - S_2 - S_3}; \; y_C = -0{,}1364 \text{ см}.$$

Построим эту точку C. Обратите внимание, что центр тяжести рассмотренной пластинки лежит на ее оси симметрии l, проходящей через начало координат.

Решите контрольную задачу

Определить положение центра тяжести однородной квадратной пластины с круглым отверстием (рис. 61), если сторона квадрата равна 6 см и радиус отверстия $r = 1$ см.

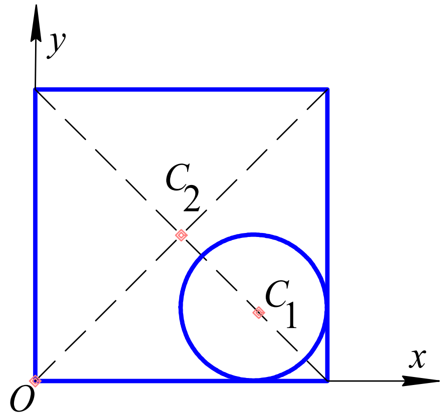


Рис. 61. К контрольной задаче

Ответ: x_C=2,8 см; y_C=3,2 см.

Контрольные вопросы

1. Какую систему сил называют системой параллельных сил?

2. Как направлены главный вектор и главный момент системы параллельных сил по отношению к линиям действия системы сил и друг относительно друга?

3. Как можно еще упростить эту эквивалентную систему?

4. Какую точку называют центром параллельных сил?

5. По какой формуле можно определить положение центра параллельных сил в заданной системе отсчета?

6. Какую точку называют центром тяжести твердого тела?

7. По какой формуле можно определить положение центра тяжести твердого тела?

8. Какие существуют методы определения координат центра тяжести?

9. Где находятся центры тяжести простейших однородных тел: треугольной, прямоугольной и круглой пластин, кубика, параллелепипеда, шара и т.д.?

Рекомендуемая литература: [1, гл. IX; 2, гл.8; 3, гл. II, § 3].

8. Равновесие твердого тела при наличии трения

Равновесие тела при наличии трения скольжения

При взаимодействии двух тел в точке A (рис. 62) со стороны тела II на тело I действует реакция $\overline{R}_A$.

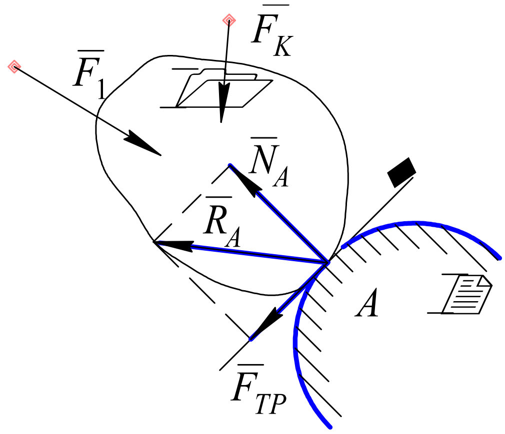


Рис. 62. Трение скольжения.
Реакции шероховатой поверхности

Реакцию $\overline{R}_A$ можно разложить на две составляющие: $\overline{N}_A$, направленную по общей нормали к поверхности соприкасающихся тел в точке A и $\overline{F}_{TP}$, лежащую в касательной плоскости. Силу $\overline{N}_A$ называют нормальной реакцией, а $\overline{F}_{TP}$ силой трения.

Для выяснения основных свойств сил трения рассмотрим пример (рис. 63).

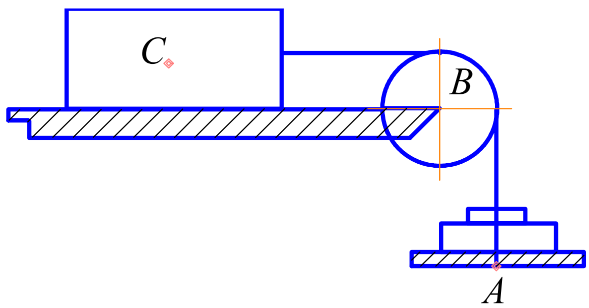


Рис. 63. Основные свойства сил трения

На неподвижном основании находится тело C, к которому присоединена перекинутая через блок B нить. На другом конце нити укреплена площадка A. Если площадку A постепенно нагружать, то с увеличением ее веса будет возрастать натяжение нити (рис. 64) $\overline{S}$. Но пока общая нагрузка не слишком велика, сила трения будет удерживать тело C в покое и можно записать уравнения равновесия: $N - P = 0$; $S - F_{TP} = 0$, откуда $N = P$; $F_{TP} = S$.

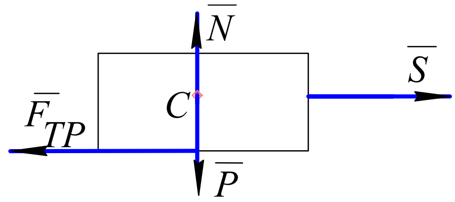


Рис. 64. Сила трения скольжения

Обозначим $\overline{F}_{\max}$ силу трения в тот критический момент процесса нагружения, когда тело C начинает двигаться. Следовательно, если тело находится в равновесии, то $\overline{F}_{TP} \le \overline{F}_{\max}$. Из опыта Кулон установил, что $F_{\max} = fN$.

Безразмерный коэффициент f называется коэффициентом трения скольжения, величина которого зависит от материала и обработки поверхности соприкасающихся тел и устанавливается опытным путем. Силу трения можно вычислить по формуле $F_{\max} = fN$ только в тех случаях, когда заранее известно, что имеет место критический, предельный случай равновесия. Во всех же других случаях силу трения следует определять из условий равновесия.

Рассмотрим пример

Горизонтальный стержень AB (рис. 65) имеет на конце A отверстие, которым он надет на вертикальную круглую стойку CD. Длина втулки $b = 2$ см.

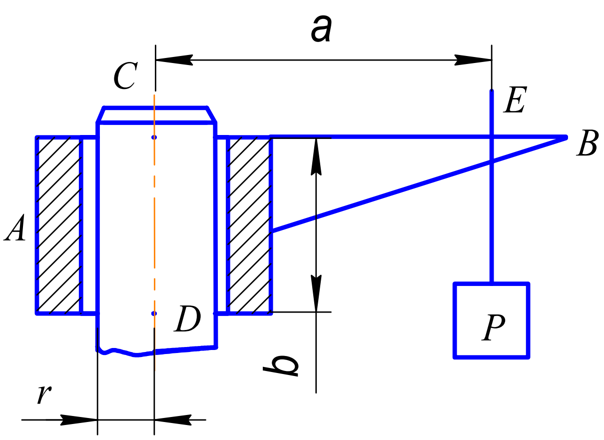


Рис. 65. К примеру на трение

В точке E на расстоянии a от оси стойки к стержню подвешен груз P. Определить, пренебрегая весом стержня AB, расстояние a так, чтобы под действием груза P стержень оставался в равновесии, если коэффициент трения между стержнем и стойкой $f = 0{,}1$. Рассмотрим равновесие горизонтального стержня AB (рис. 66). В точке E на стрежень действует заданная сила $\overline{P}$.

Освободив стержень от связи, приложим в точке K_1 силу реакции $\overline{R}_1 = \overline{N}_1 + \overline{F}_{TP1}$, в точке K_2 силу реакции $\overline{R}_2 = \overline{N}_2 + \overline{F}_{TP2}$.

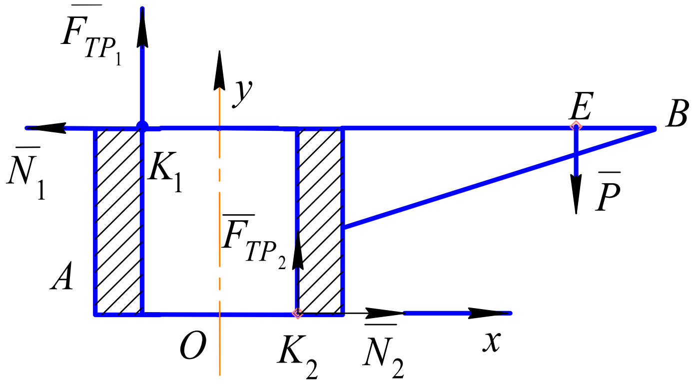


Рис. 66. Расчетная схема к примеру

Построим в точке O декартову систему осей координат Oxy. Составим уравнения равновесия плоской системы сил, действующих на стержень:

1) $\sum F_{kx} = 0$; $-N_1 + N_2 = 0$;

2) $\sum F_{ky} = 0$; $F_{TP_1} + F_{TP_2} - P = 0$;

3) $\sum m_0\left(\overline{F}_K\right) = 0$; $-F_{TP_1}(r) + F_{TP_2}(r) - P(a) + N_1(b) = 0$.

Из уравнения 1 получим: $N_1 = N_2 = N$.

При заданном коэффициенте трения скольжения можно сделать вывод, что силы трения скольжения в точках K_1 и K_2 будут равны, т.е.

$$F_{TP_1} = F_{TP_2} = F_{TP}.$$

Из уравнения 2 получаем, что $2F_{TP} - P = 0$, или $F_{TP} = \frac{1}{2}P$.

Из уравнения 3 получаем, что $N = P\frac{a}{b}$, но для равновесия имеем $F_{TP} \le F_{\max}$, $F_{\max} = fN$. Следовательно $\frac{1}{2}P \le fN$, а $N = P\frac{a}{b}$, то $fP\frac{a}{b} \ge \frac{1}{2}P$, откуда $a \ge \frac{b}{2f}$ или $a \ge 10$ см.

Вывод такой, что равновесное положение стержня AB будет обеспечено для целой области значения параметра a, больших 10 см. Значение $a =$ 10 см соответствует нижней границе этой области, для предельного значения силы трения.

Решите контрольную задачу

Из условия равновесия тела C весом P, расположенного на шероховатой поверхности, определить угол наклона плоскости, если коэффициент трения скольжения равен f (рис. 67).

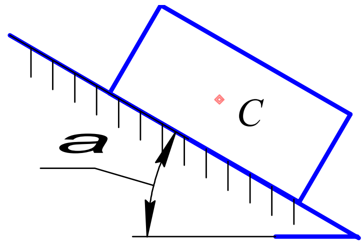


Рис. 67. К контрольной задаче

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha \le f$.

Контрольные вопросы

1. Какую силу называют нормальной реакцией, какую – силой трения?
2. Из каких условий определяется величина силы трения?
3. Как определяется максимальная сила трения?
4. От чего зависит коэффициент трения скольжения и как он определяется на практике?
5. В чем состоит особенность равновесия тела при учете трения скольжения?

Рекомендуемая литература: [1, гл. VII; 2, гл. 6; 3, гл. I, § 4].

Библиографический список

1. Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. − М.: Наука, 1990.

2. Никитин, Н.Н. Краткий курс теоретической механики/ Н.Н. Никитин. – М.: Высшая школа, 1996.

3. Тарг, С.М. Краткий курс теоретическая механика/ С.М. Тарг. – М.: Высшая школа, 1995.

4. Тарг, С.М. Теоретическая механика: методические указания и контрольные задания/ С.М. Тарг. – М.: Высшая школа, 1982.

Оглавление