Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра «Строительная механика»

539.3/.6(07)
В932

В.Л. Высоковский

ВВЕДЕНИЕ В КУРС СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие
для студентов архитектурно-строительного
и архитектурного факультетов

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2009

УДК 539.3/.6 (07)
В932

Высоковский, В.Л.
В932 Введение в курс сопротивления материалов: учебное пособие / В.Л. Высоковский.– Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2009. – 25 с.

ISBN ………

Учебное пособие предназначено для студентов второго курса архитектурно-строительного и архитектурного факультетов, приступающих к изучению курса «Сопротивление материалов». Оно может быть использовано также студентами любого факультета и любой формы обучения.

В пособии изложены минимально необходимые элементарные основы математики, физики и теоретической механики (статика), без знания которых не возможно понять сопротивление материалов.

УДК 539.3/.6 (07)

ISBN ……… Издательский центр ЮУрГУ,2009

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Сопротивление материалов» пользуется «славой» одного из самых трудных для изучения предметов. Но сложность его не в каких-то трудно усваиваемых идеях. Это первая техническая дисциплина, при изучении которой необходимо использовать знания, полученные ранее при изучении математики, физики, теоретической механики и других наук. Проблема в том, что студенты привыкли на экзаменах «сдавать» предметы, вместо того, чтобы показывать знания, «оставляя» их себе.

Можно сказать, что «Сопротивление материалов» – это математика применительно к задачам прочности. Для студентов, владеющих основами математики, изучение сопротивления материалов проходит без больших затруднений. Математика – это «язык», на котором мы говорим в курсе «Сопротивление материалов».

Сопротивление материалов – наука экспериментально-теоретическая. Курс состоит из лекций, практических занятий, лабораторных работ и контрольных расчетно-графических работ. Изучение дисциплины проходит в течение двух семестров. Для каждой специальности разработаны соответствующие «Рабочие программы курса», которые выдаются каждой академической группе.

Чтобы облегчить студентам усвоение курса сопротивления материалов, ниже приводятся сведения из разделов математики (в том числе и школьной), физики и теоретической механики в объеме, необходимом для понимания сопротивления материалов. Грамотным студентам достаточно ответить на вопросы для самоконтроля, приведенные в конце данного пособия. Но при малейшем сомнении следует уточнить ответ, найдя его в пособии.

ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИИ И ТРИГОНОМЕТРИИ

Напомним понятия основных тригонометрических функций. В прямоугольном треугольнике (рис. 1) имеем:

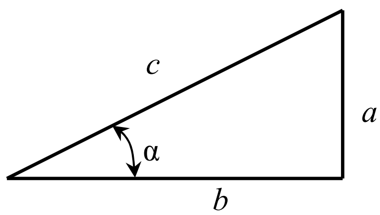

Рис. 1 Понятие о тригонометрических функциях

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, т.е. это отношение катета «*a*», лежащего против угла α, к гипотенузе «*c*»;

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ – это отношение катета «*b*», прилежащего к углу α, к гипотенузе «*c*»;

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$ – это отношение противолежащего катета к прилежащему;

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{tg\alpha}$ – отношение прилежащего катета к противолежащему.

Важно понимать, как изменяются тригонометрические функции и какие они могут принимать значения. Эти вопросы удобно обсуждать на круге единичного радиуса (рис. 2).

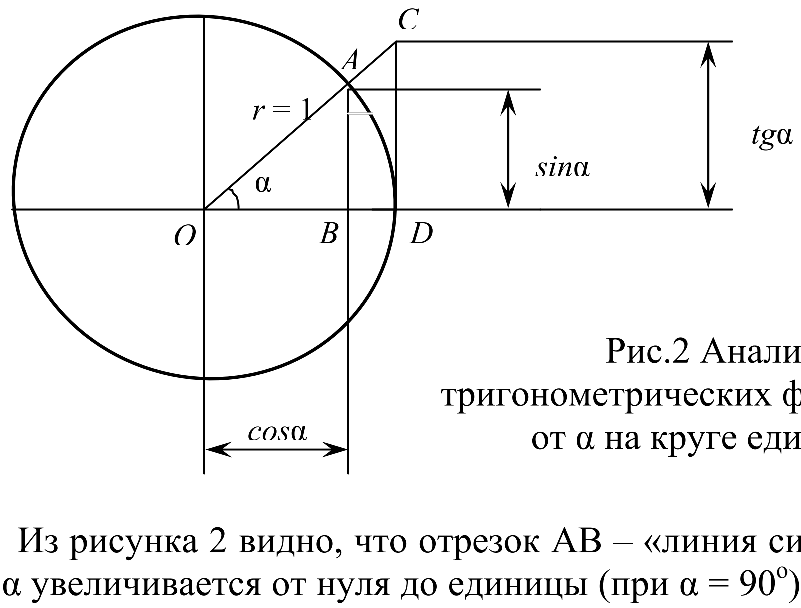

Рис.2 Анализ изменения тригонометрических функций в зависимости от α на круге единичного радиуса

Из рисунка 2 видно, что отрезок AB – «линия синуса» – с увеличением угла α увеличивается от нуля до единицы (при $\alpha = 90^o$), затем уменьшается от единицы до нуля (при $\alpha = 180^o$), далее «растет» отрицательный отрезок от нуля до минус единицы (при $\alpha = 270^o$), после чего «уменьшается» отрицательный отрезок от минус единицы до нуля (при $\alpha = 360^o$).

Аналогично можно проследить изменение отрезка OB – «линии косинуса». С увеличением угла α от 0^o «линия косинуса» уменьшается от единицы до нуля (при α = 90°), далее «растет» отрицательный отрезок до минус единицы (при α = 180°), затем он «уменьшается» до нуля (при α = 270°), после чего отрезок OB возрастает до единицы (при α = 360°).

Характер изменения этих функций отражается на графиках синусоиды (рис. 3а) и косинусоиды (рис. 3б). Видно, что синус и косинус могут принимать значения от –1 до +1.

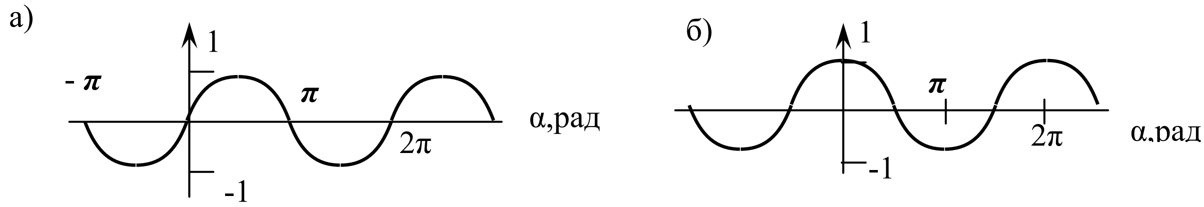

Рис. 3.
а) график изменения функции sin α,
б) график изменения функции cos α.

Величина $tg\alpha$ отражена на рис.2 отрезком *CD*. Легко увидеть, что этот отрезок с увеличением α увеличивается от нуля. При приближении значения угла α к 90° он стремится к бесконечности (радиус становится параллельным прямой *CD*). При переходе α через 90° $tg\alpha$ меняет знак и с возрастанием угла возрастает от минус бесконечности до нуля (при α = 180°) и далее до плюс бесконечности (при α = 270°), затем опять меняется знак и происходит увеличение $tg\alpha$ от $-\infty$ до нуля (при α = 360°). График $tg\alpha$ показан на рис. 4.

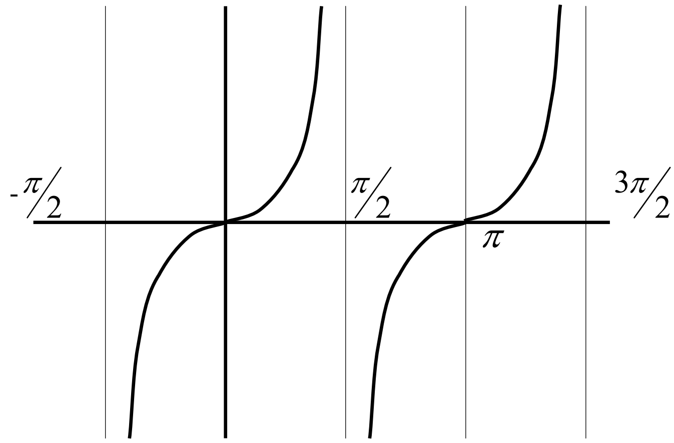

Рис. 4. График функции *tg* α

На рис.2 величину $\mathrm{ctg}\alpha$ в виде отрезка показать нельзя, но легко оценить как обратную $\mathrm{tg}\alpha$.

Напомним, что тригонометрические функции являются периодическими, т.е. значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ повторяются через 360°, а $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{ctg}\alpha$ через 180°.

Очень полезно знать значения тригонометрических функций для часто встречающихся на практике величин углов. При этом важно не «зазубрить» числа, а уметь их получать.

Составим таблицу:

Функ-ция	α							
	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	180^o	270^o
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	–1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	–1	0
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	±∞	$-\sqrt{3}$	0	±∞
ctg α	±∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	±∞	0

Значения указанных в таблице функций для α, равных 0^o, 90^o, 180^o и 270^o, легко получаются с помощью рис.2.

Для определения значений тригонометрических функций при величине аргумента, равной 30^o, рассмотрим соответствующий прямоугольный треугольник (рис. 5).

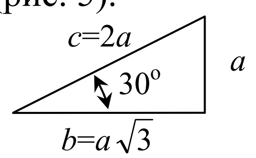

Рис. 5. Определение значений тригонометрических функций для угла 30^o

Известно, что катет, лежащий против угла 30^o, равен половине гипотенузы, т.е. с = 2а. Тогда на основании теоремы Пифагора ($c^2 = a^2 + b^2$) имеем:

$$b^2 = \sqrt{\left(c^2 - a^2\right)} = \sqrt{\left((2a)^2 - a^2\right)} = a\sqrt{3}.$$

Теперь:

$$\sin 30^o = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \ \cos 30^o = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30^o = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \ \operatorname{ctg} 30^o = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^o} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}.$$

При α = 45^o (рис.6) значения перечисленных в таблице функций находятся еще проще, так как прямоугольный треугольник в этом случае равнобедренный, а значит $a = b$ и $c = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

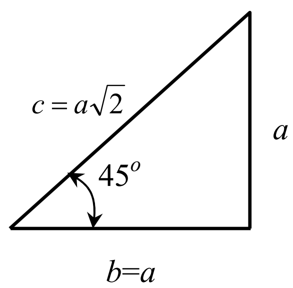

Рис. 6. Определение значений тригонометрических функций для угла 45^o

Тогда:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\mathrm{tg}\, 45^\circ = \mathrm{ctg}\, 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$

Колонку таблицы, соответствующую α = 60°, легко заполнить, используя рис. 5 или зная простые формулы тригонометрии, которые следуют из рисунка 1:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha,$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha,$$

$$ctg(90^o - \alpha) = tg\alpha.$$

Оба эти подхода приводят к следующим результатам:

$$\sin 60^\circ = \sin(90^\circ - 30^o) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\mathrm{tg}\, 60^\circ = \mathrm{tg}(90^\circ - 30^\circ) = \mathrm{ctg}\, 30^\circ = \sqrt{3},$$

$$\mathrm{tg}\, 60 = \mathrm{tg}(90^\circ - 30^\circ) = \mathrm{tg}\, 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Осталось заполнить последнюю колонку при α = 120°. Из рисунка 7 видно, что треугольники OAB и OC*D* равны и следовательно:

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha\text{o}\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha\text{i}$$

$$\mathrm{tg}(90^\circ + \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha\text{t}\ \mathrm{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha.$$

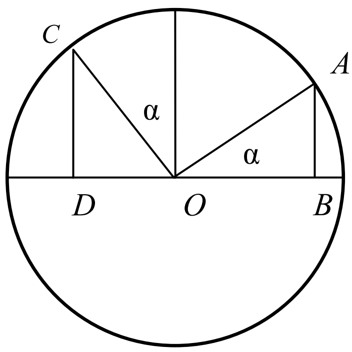

Рис. 7. Связь между тригонометрическими функциями углов α и α+90°

Это значит, что

$$\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{tg}\, 120^\circ = \mathrm{tg}(90^\circ + 30^\circ) = -\mathrm{ctg}\, 30^\circ = -\sqrt{3},$$

$$\mathrm{ctg}\, 120^\circ = \mathrm{ctg}(90^\circ + 30^\circ) = -\mathrm{tg}\, 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Таблица заполнена.

Учитывая, что в сопротивлении материалов часто используются синус и косинус двойного угла, приведем соответствующие формулы:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Эти формулы будут понятней, если вспомнить соответствующие формулы для суммы углов:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Еще одно очень важное понятие из геометрии – это радианная мера угла. **Один радиан** – это угол (рис. 8), длина дуги которого равна радиусу. Само название происходит от слова «радиус».

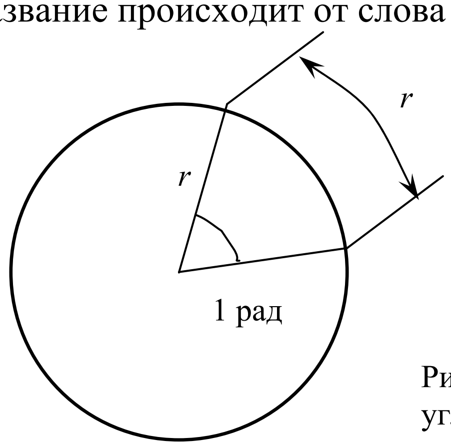

Рис. 8. Понятие радианной меры угла

Зная, что полный круг составляет 360° и длина окружности равна $2\pi r$, легко установить связь между радианной и градусной мерами угла. Так как в окружность «укладывается» 2π радиусов, то

$360^{\circ} = 2\pi$ рад или 1 рад $\approx 57{,}3^{\circ}$.

Из определения понятия «радиан» следует, что длину дуги, соответствующую углу α, можно вычислить, умножив радиус на угол в радианах:

$$L_{\cup} = r\cdot\alpha(\text{рад}).$$

При необходимости перевести величину угла из градусной меры в радианную и наоборот используются формулы:

$$\alpha^{\circ} = \frac{\alpha^{\circ}}{180^{\circ}}\cdot\pi(\text{рад}),$$

$$\alpha(\text{рад}) = \frac{\alpha(\text{рад})}{\pi}\cdot 180^{\circ}(\text{град}).$$

Напомним формулы, по которым определяются площади простых фигур:

круг, $A = \pi r^2$;

прямоугольник (рис.9а), $A = b \cdot h$;

треугольник (рис. 9б), $A = \frac{b \cdot h}{2}$;

трапеция (рис. 9в), $A = \frac{a+b}{2} \cdot h.$

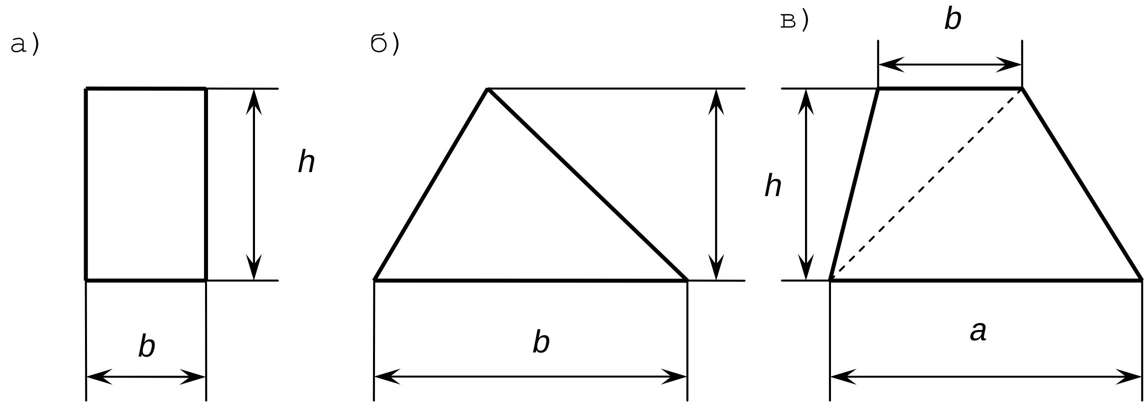

Рис. 9. Определение площади
простых фигур

Последняя формула получается как сумма площадей двух треугольников.

Завершим этот раздел напоминанием понятия «подобие треугольников». Если два треугольника подобны, то все их стороны пропорциональны (рис. 10), т.е.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

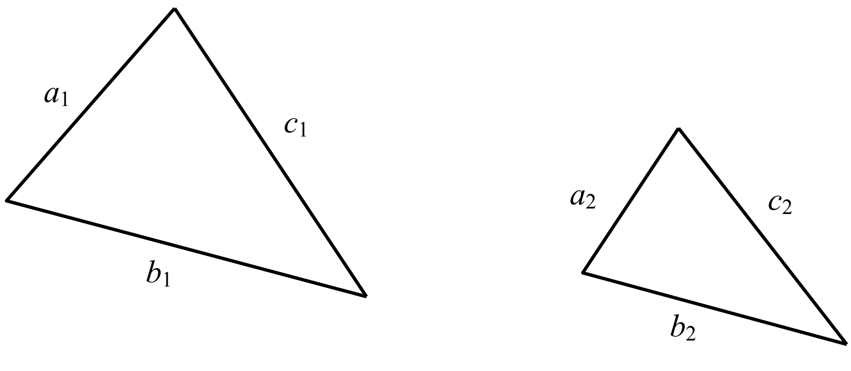

Рис. 10. Подобные треугольники

Пропорциональны при этом между собой и соответствующие высоты, медианы и биссектрисы углов.

Биссектриса – это прямая, которая делит угол пополам.

Медиана – это отрезок прямой, который соединяет в треугольнике вершину угла с серединой противоположной стороны.

В прямоугольном треугольнике середина гипотенузы является центром описанной окружности (рис. 11) и следовательно медиана, проведенная из вершины прямого угла, делит прямоугольный треугольник на два равнобедренных.

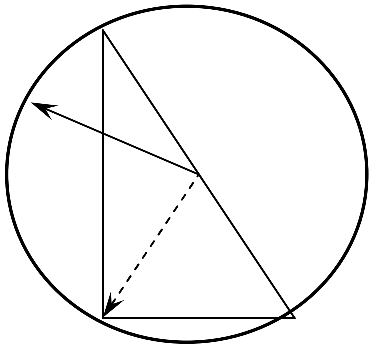

Рис. 11. Середина гипотенузы прямоугольного треугольника – центр описанной окружности

ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ

К большому сожалению, начать придется с дробей, так как опыт показывает, что достаточно много слабых студентов, которым это будет полезно.

$$\frac{a}{bc}+\frac{d}{ck}=\frac{ak+db}{bck}, \qquad \frac{a}{bc}-\frac{d}{ck}=\frac{ak-db}{bck}.$$

В этих записях дроби приведены к наименьшему общему знаменателю и с учетом дополнительных множителей («k» к первой дроби и «b» ко второй) выполнено сложение и вычитание дробей.

$$\frac{a}{bc}\cdot\frac{d}{ck}=\frac{ad}{bkc^2}, \qquad \frac{a}{bc}:\frac{d}{ck}=\frac{ack}{bcd}=\frac{ak}{bd}.$$

Из этой пары записей видно, что для перемножения дробей необходимо перемножить соответственно числители дробей и знаменатели. Для деления дробей числитель первой дроби умножается на знаменатель второй, а знаменатель первой дроби умножается на числитель второй. Окончательный ответ получается сокращением числителя и знаменателя на «c».

Рассмотрим решение линейного алгебраического уравнения.

$$\frac{a}{b}x+\frac{c}{d}=k.$$

Преобразования сводятся к выполнению одинаковых операций над левой и правой частями уравнения.

К левой и правой частям уравнения можно прибавить (или отнять) одну и ту же величину. Фактически это же делается, когда переносится какое-нибудь слагаемое в другую часть уравнения со сменой знака.

Обе части уравнения можно умножить (или поделить) на одну и ту же величину, возвести обе части в одинаковую степень или извлечь корень и т.д.

В рассматриваемом примере получаем:

$$\frac{a}{b}x = k - \frac{c}{d} = \frac{kd - c}{d},$$

$$x = \frac{kd - c}{d} : \frac{a}{b} = \frac{kd - c}{d} \cdot \frac{b}{a} = \frac{kdb - cb}{ad}.$$

Напомним некоторые формулы и понятия из алгебры:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b).$$

$$a^0 = 1,$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

$$(a^m)^n = a^{m\bullet n}.$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0,$$

$$\frac{a}{0} = \pm\infty.$$

Для приведенного квадратного уравнения вида $x^2 + bx + c = 0$
решение (т.е. корни) имеет вид:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{b^2}{4} - c)} \quad .$$

ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В выражении $y(x)$ «y» – функция, «x» – аргумент – независимая переменная. Величиной «x» задаемся, «y» – вычисляем (рис. 12).

Для анализа функций важнейшим инструментом является производная. Производная – это предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю. Понятие производной представляется выражением:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y'(x).$$

Здесь Δy – приращение функции $y(x)$, соответствующее приращению аргумента Δx (см. рис. 12). Символ «Δ» означает «приращение».

Знак «$d...$ » с последующим символом называется «дифференциалом» соответственно функции или аргумента. Дифференциал – это бесконечно малое приращение функции или аргумента. Из записи выражения производной видно, что dx и Δx совпадают при условии, что Δx стремится к нулю.

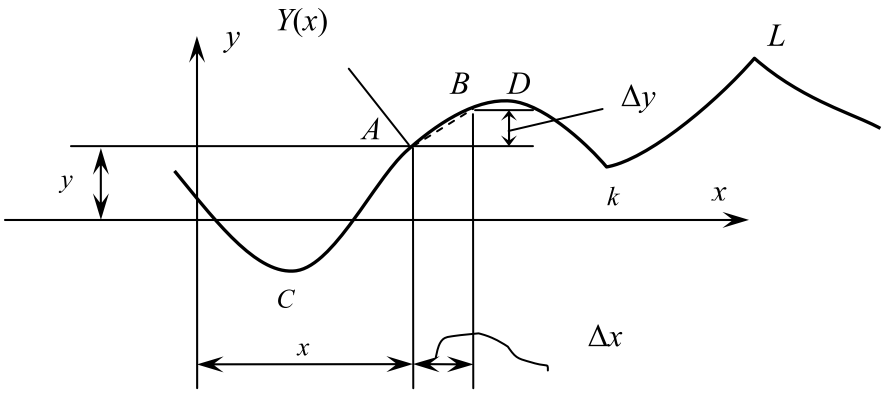

Рис. 12. К понятию производной

Геометрический смысл производной легко понять из рис. 12. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ представляет собой тангенс угла наклона хорды *AB*, которая при Δx, стремящемся к нулю, совпадает с касательной к рассматриваемой функции в точке *A*. Это значит, что геометрический смысл производной – это тангенс угла наклона касательной.

Важно уметь определять знак производной. Поскольку это знак дроби $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (или то же самое $\frac{dy}{dx}$), а Δx или dx мы всегда берем положительным, то производная положительна, если положительно Δy (или dy). Это значит, что производная положительна, если функция возрастающая.

Экстремумом непрерывной функции с непрерывной первой производной называется значение функции в точке, в окрестностях которой ординаты больше или меньше экстремального. Из рис.12 видно, что признаком экстремальности функции является переход непрерывной первой производной через ноль со сменой знака. На графике (рис. 12) экстремумы имеют место лишь в точках *C* и *D*. В точках *K* и *L* функция тоже принимает значения локального минимума или максимума, но это не экстремумы, так как первая производная в этих точках имеет разрыв.

При изучении сопротивления материалов полезно знать, что кривой, выпуклость которой совпадает с положительным направлением оси, соответствует отрицательная вторая производная (рис. 13). Видно, что в точке *A* $y'(x)>0$, в точке *C* $y'(x)<0$, а в точке *B* $y'(x)=0$. Это значит, что функция $y'(x)$ убывающая, а следовательно вторая производная

$$y''(x)=(y'(x))'<0.$$

Рассмотрим производные для некоторых используемых в сопротивлении материалов функций.

$$y(x)=ax^n, \quad y'(x)=anx^{n-1}.$$

$$y(x)= Ax^3+Bx^2+Cx+D,$$
$$y'(x)= 3Ax^2+2Bx+C+0.$$

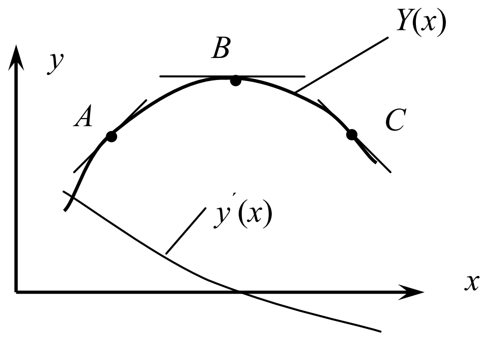

Рис. 13. Определение знака
второй производной

Из последних двух строчек видно, что производная нулевая, если дифференцируется постоянная функция; если дифференцируется линейная функция, то производная – константа; производная от квадратной параболы – линейная функция; дифференцирование кубической параболы дает квадратную параболу. Понимание этих элементарных вещей очень важно при изучении сопротивления материалов.

Необходимо уметь дифференцировать так называемые «сложные функции» вида $f(z(y(x)))$. Известно, что

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Понимая это, можем записать:

$$\frac{d(\sin(ax))}{dx} = \cos(ax) \cdot a;$$

$$(\cos(ax))' = -\sin(ax) \cdot a.$$

Рассмотрим основы интегрального исчисления. Различают, в первую очередь, интегралы определенные и неопределенные.

Неопределенный интеграл – это такая новая функция (**первообразная)**, которая в результате дифференцирования дает подынтегральную функцию:

$$\int y(x)dx = f(x) + c.$$

Здесь: $y(x)$ – подынтегральная функция,

$f(x) + c$ – первообразная.

Подынтегральной функции соответствует бесконечное множество первообразных за счет постоянной интегрирования «c».

Постоянная интегрирования «c» – это начальное значение искомой функции. Беря разные начальные точки, получаем множество аналогичных друг другу, но все же разных первообразных.

Если функция $f(x) + c$ действительно является первообразной для подынтегральной функции $y(x)$, то справедливо:

$$\frac{d(f(x)+c)}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} = y(x),$$

т.е. интегрирование и дифференцирование являются действиями взаимно обратными, как ,например, умножение и деление. Используя это, легко подобрать первообразные для простейших функций, фигурирующих в сопротивлении материалов.

$$\int ax^n dx = a\frac{x^{n+1}}{n+1} + c;$$

$$\int \sin(ax)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c;$$

$$\int \cos(ax)dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + c.$$

Убедиться в правильности решения можно, как уже было сказано выше, продифференцировав полученные первообразные и сравнив их с подынтегральными функциями.

Определенный интеграл по форме записи отличается лишь наличием пределов интегрирования. Но если неопределенный интеграл – это функция, то определенный интеграл – это число.

$$\int_a^b y(x)dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

Здесь a и b – пределы интегрирования (см. рис. 14).

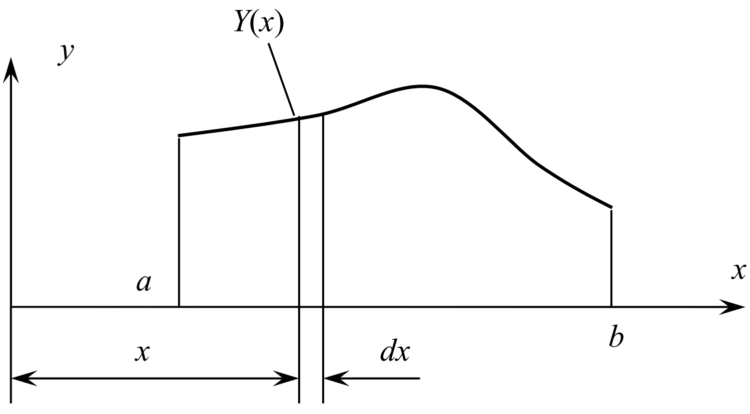

Рис. 14. К понятию определенного интеграла

В неопределенном интеграле знак «$\int$» нельзя заменить ничем, это символ интегрирования. В определенном интеграле вместо знака «$\int$» можно фактически поставить знак «$\sum$», но если под знаком суммы могут быть любые слагаемые, то под знаком «$\int$» лишь бесконечно малые.

Определенный интеграл – это предел, к которому стремится сумма произведений ($y \cdot dx$) при любом разбиении интервала $a-b$ на участки. Отсюда становится понятен геометрический смысл определенного интеграла – это площадь фигуры, ограниченной подынтегральной функцией (см. рис. 14), так как суммируются площади элементарных полосок ($y \cdot dx$), из которых состоит эта фигура.

Интегралы могут быть простые и кратные. Если интегрируется, например, функция двух переменных, то интеграл двукратный и записывается в виде

$$\int dx \int f(x,y)dy.$$

Геометрический смысл определенного интеграла в этом случае представляет собой объем тела, ограниченного плоскостью X,Y, поверхностью $f(x,y)$ и соответствующей пределам интегрирования боковой поверхностью.

5. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ

Незнание элементарных основ физики проявляется у студентов при изучении сопротивления материалов в первую очередь в неумении пользоваться размерностями фигурирующих в формулах величин.

В решениях сопротивления материалов используется, как правило, международная система единиц СИ. Единицей измерения силы является «ньютон», но это не основная, а производная единица:

$$\text{н} = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}.$$

Здесь: кг – единица измерения массы,

$\frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$ – единица измерения ускорения.

При необходимости перевести «килограмм силы» кГ (техническая система единиц) в «ньютоны» следует иметь ввиду, что тело с массой в $1\,\text{кг}$ имеет вес $1\,\text{кГ}$. С учетом второго закона Ньютона ($F = m \cdot a$) получается, что $G = m \cdot g$, т.е. вес равен произведению массы и ускорения свободного падения. Тогда

$1\,\text{кГ} = 1\,\text{кг} \cdot 9{,}81\frac{\text{м}}{\text{сек}^2}.=9{,}81\,\text{н} \approx 10\,\text{н}$.В решениях часто используются килоньютоны и меганьютоны. Приставки «кило» и «мега» означают соответственно «тысяча» и «миллион».

1 кн = 10^3 н, 1 Мн = 10^6 н.

Основной единицей измерения давления или напряжения является «паскаль». $1\text{Па} = \frac{\text{н}}{\text{м}^2}$.

Соответственно можно использовать «килопаскали» и «мегапаскали» (кПа и МПа).

Для вычисления веса тела необходимо знать его объем и плотность материала.

$$G = V \cdot \rho \cdot g.$$

Плотность ρ – это масса единицы объема. Если обозначить $\rho \cdot g = \gamma$, то $G = V \cdot \gamma$, где γ – объемный вес материала – вес единицы объема тела.

Необходимо уметь вычислять работу. В простейшем случае, когда сила постоянна и совпадает с направлением движения, работа равна $W = F \cdot S$, где

F – сила, S – путь. Работа момента равна произведению момента и угла поворота. Измеряется работа в джоулях (н·м) или килограммометрах.

Из раздела «Электричество» как минимум надо знать закон Ома и уметь вычислять сопротивление проводника: $U = I \cdot R$, $R = \rho \cdot l / A$.

В этих формулах: U – напряжение, I – ток, R – сопротивление, ρ – удельное сопротивление материала проводника, l – длина проводника, A – площадь поперечного сечения.

СВЕДЕНИЯ ИЗ СТАТИКИ

Вопросы, рассматриваемые в этом разделе, должны быть известны студентам, приступающим к изучению курса сопротивления материалов, из школьной физики и из курса теоретической механики (раздел «Статика»).

Для любой самоуравновешенной системы сил можно записать бесконечное множество уравнений равновесия. Уравнение равновесия – это (в простейшем варианте) равенство нулю суммы проекций всех сил на какую-либо ось или равенство нулю суммы моментов всех сил относительно какой-либо оси. Это значит, что взяв любую случайную ось, можем записать соответственно два уравнения равновесия, а осей таких бесконечно много.

Напомним, что проекция силы на ось графически получается опусканием перпендикуляров из концов вектора, соответствующего силе, на интересующую нас ось (рис. 15). Численно величина проекции равна произведению модуля силы и косинуса угла между вектором силы и направлением оси. Если задано положительное направление оси, то проекция имеет положительный знак, если совпадает по направлению с осью, или отрицательный в противном случае. Если сила перпендикулярна рассматриваемой оси, то проекция равна нулю.

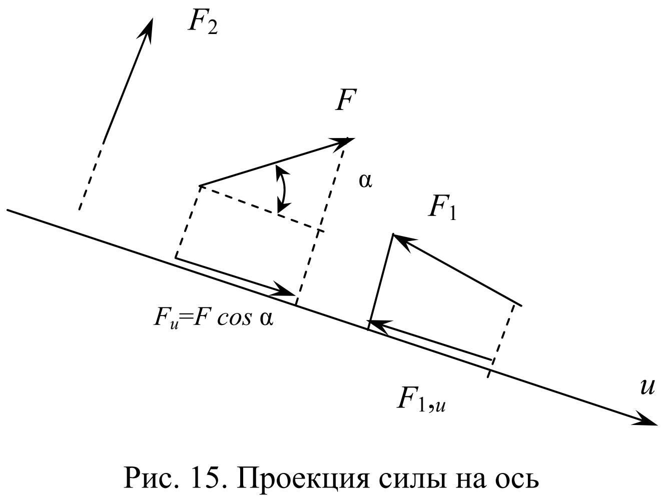

Рис. 15. Проекция силы на ось

Момент силы относительно оси равен произведению силы и плеча. Плечо – это кратчайшее расстояние между бесконечной линией оси и бесконечной линией действия силы, т.е. это расстояние между этими двумя линиями там, где они перекрещиваются.

Отсюда понятно, что если сила и ось лежат в одной плоскости, а следовательно пересекаются или параллельны, то момент равен нулю, так как равно нулю плечо. Этим же объясняется, что плоскость действия момента перпендикулярна оси, относительно которой он действует. Рассмотрим момент в виде пары сил F с плечом h, лежащей в плоскости XY (рис. 16), Очевидно, что эти силы не дают момента относительно осей X и Y (ось Y они пересекают, оси X они параллельны). Эта пара сил – момент относительно оси Z.

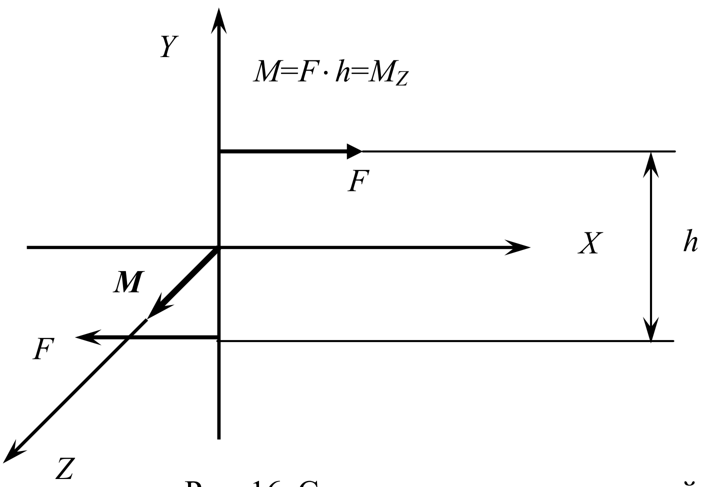

Рис. 16. Связь между плоскостью действия момента и осью, относительно которой он действует

Момент можно графически изобразить вектором, перпендикулярным плоскости действия момента, т.е. вектором, совпадающим по направлению с осью, относительно которой действует момент (см. рис. 16). Направление стрелки вектора зависит от выбора право- или левовинтовой системы координат.

Необходимо различать бесконечное множество возможных уравнений равновесия и количество независимых уравнений равновесия.

Для произвольной пространственной системы сил независимых уравнений равновесия можно записать только шесть. Это объясняется тем, что после того, как записаны, например, три суммы проекций сил на три взаимно перпендикулярных оси, записывая новую сумму проекций сил на какую-либо другую ось, мы получим не новое уравнение, а комбинацию из трех предыдущих. Это будет сумма первых трех уравнений, каждое из которых умножено на косинус угла между новой осью и одной из соответствующих трех первых. Аналогично и суммами моментов. Это становится понятней, если использовать векторное представление моментов. Сказанное выше не означает, что обязательно записывать именно три суммы проекций сил и три суммы моментов. Можно записать шесть разных сумм моментов или другую комбинацию уравнений. Но при этом независимых уравнений всегда будет только шесть.

Для частных случаев систем сил независимых уравнений будет еще меньше. Так, для пространственной системы сходящихся сил, т.е. системы сил, линии действия которых пересекаются в одной точке (рис.17), независимых уравнений равновесия будет три. Это, например, суммы проекций на три взаимно перпендикулярных оси. Суммы же моментов сил относительно осей, проходящих через точку пересечения линий действия сил, равны нулю автоматически.

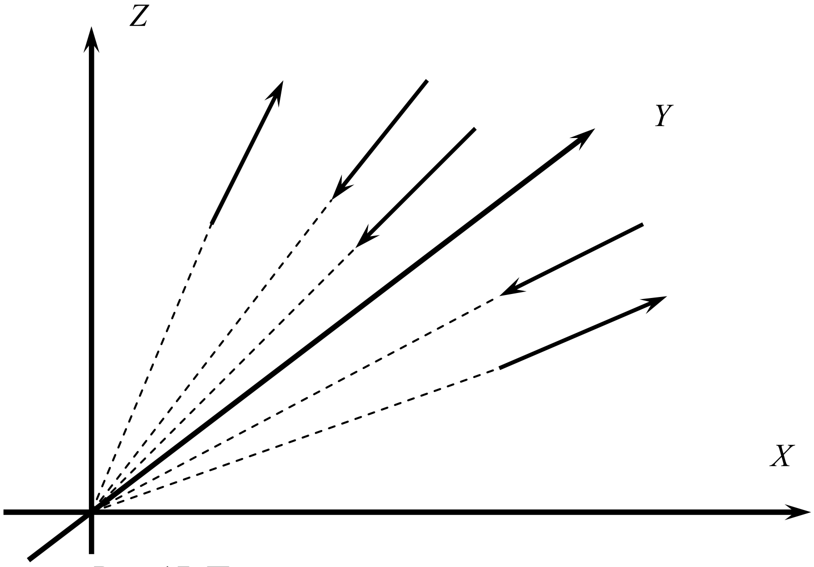

Рис. 17. Пространственная система сходящихся сил

Чаще всего в сопротивлении материалов приходится иметь дело с плоской системой сил. Для произвольной плоской системы сил независимых уравнений равновесия три. Можно записать, например, две сумы проекций сил на оси, лежащие в той же плоскости, что и силы, и сумму моментов сил относительно любой оси, перпендикулярной этой плоскости. Остальные уравнения будут линейно зависимыми, так как суммы моментов относительно любых двух осей в плоскости действия сил и сумма проекций сил на ось, перпендикулярную этой плоскости, обнуляются автоматически.

В частных случаях плоской системы самоуравновешенных сил независимых уравнений равновесия два. Для плоской системы сходящихся сил (рис. 18) автоматически обнуляется сумма моментов относительно оси, которая перпендикулярна плоскости действия сил и проходит через точку пересечения их линий действия. Полезно обратить внимание на то, что плоская система трех сил может быть самоуравновешенной лишь в том случае, если они сходящиеся.

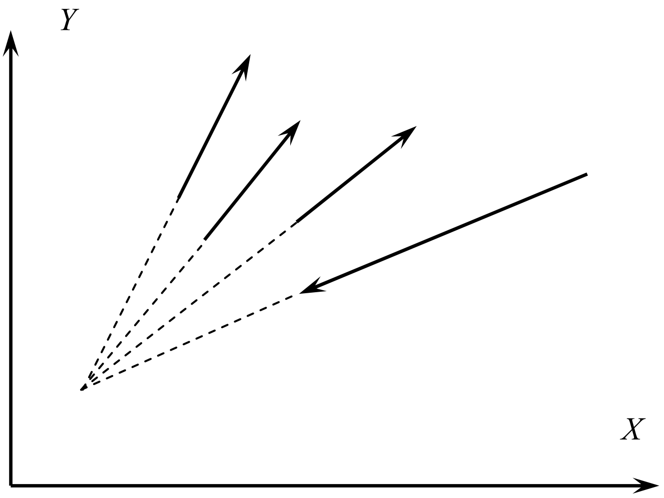

Рис. 18. Плоская система сходящихся сил

Для плоской системы параллельных сил (рис. 19) независимых уравнений равновесия тоже только два, так как имеют смысл только сумма проекций на ось, параллельную силам, и сумма моментов сил относительно какой-либо оси, перпендикулярной плоскости действия сил.

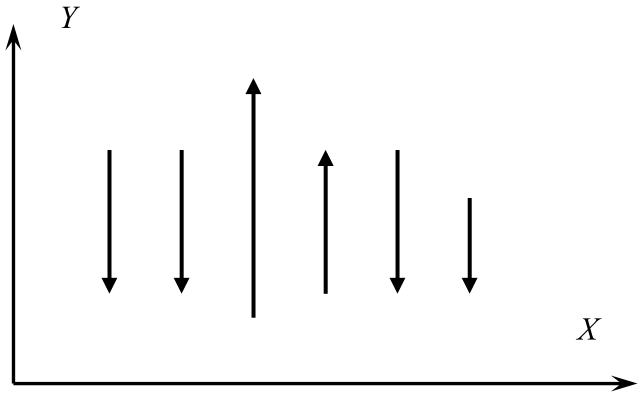

Рис. 19. Плоская система параллельных сил

Напомним, как определяется равнодействующая (главный вектор) двух и более сил. Рассматривая «абсолютно твердое тело», можно точку приложения силы переносить вдоль линии ее действия. Тогда для двух сил, лежащих в одной плоскости, равнодействующая равна вектору, совпадающему с диагональю параллелограмма, построенного на векторах складываемых сил как на сторонах. При этом предварительно силы сводятся в точку пересечения линий их действия (рис. 20)

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 .$$

При сложении произвольной системы сил приходится переносить параллельно и линии действия сил. При этом необходимо добавлять еще соответствующий момент.

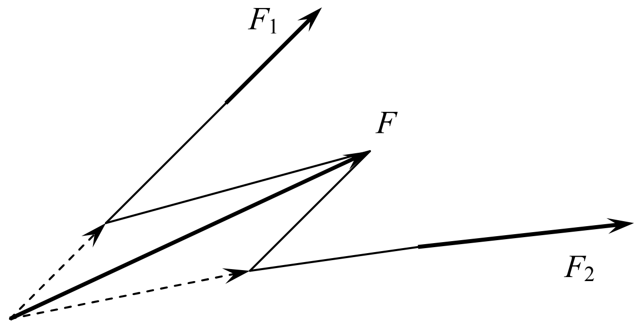

Рис. 20. Векторное сложение сил

Равнодействующая параллельных сил численно равна алгебраической сумме величин этих сил. Точка, через которую проходит эта равнодействующая, определяется на основании известной студентам из курса теоретической механики теоремы Вариньона: момент системы сил равен моменту равнодействующей. Для простейшего случая двух параллельных сил (рис. 21) имеем:

$$\widetilde{R} = F_1 + F_2, \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{F_2}{F_1}.$$

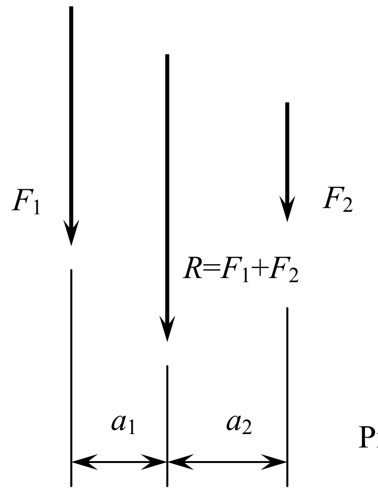

Рис. 21. Равнодействующая двух параллельных сил

Положение равнодействующей $\widetilde{R}$ в данном примере определено из условия:

$\sum mom_k = F_1 \cdot a_1 - F_2 \cdot a_2 = 0.$

Для двух параллельных сил положение равнодействующей можно определить также, используя известное из школьной физики «правило рычага».

Рассмотрим определение равнодействующей распределенной по длине нагрузки. Для частного случая равномерно распределенной нагрузки (рис. 22) очевидно, что равнодействующая равна $\widetilde{R} = q \cdot l$ и проходит через середину загруженного участка. На этом рисунке символом q обозначена интенсивность распределенной нагрузки – это величина нагрузки, приходящейся на единицу длины.

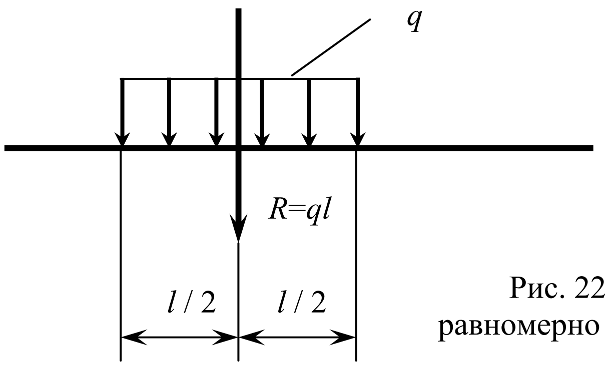

Рис. 22. Равнодействующая равномерно распределенной нагрузки

В общем случае (рис. 23) задана функция $q(z)$ изменения интенсивности распределенной нагрузки.

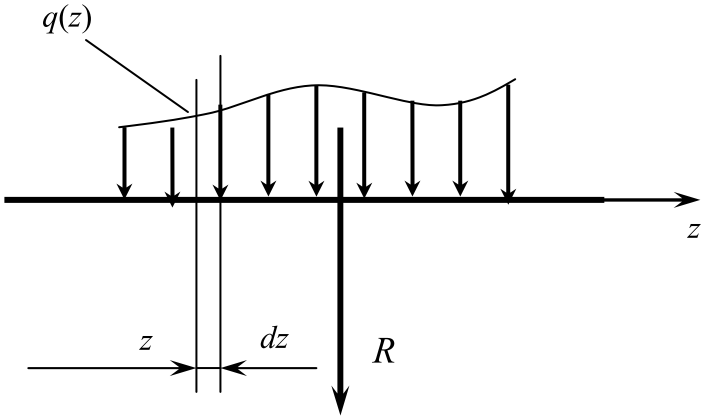

Рис. 23. Равнодействующая распределенной нагрузки

Чтобы найти равнодействующую этой нагрузки, выделим элементарный участок ее длиной dz и запишем равнодействующую на этом участке: $q(z) \cdot dz$. Рассматривая всю распределенную нагрузку как сумму параллельных элементарных сил, с учетом геометрического смысла определенного интеграла получаем:

$$\widetilde{R} = \int_a^b q(z)dz = A_{q(z)},$$

т.е. равнодействующая любой распределенной по длине нагрузки численно равна площади фигуры, изображающей интенсивность распределенной нагрузки. На основании теоремы Вариньона можно доказать, что равнодействующая проходит через центр тяжести этой фигуры.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое «синус»?
2. Что такое «косинус»?
3. Что такое «тангенс»?
4. Что такое «котангенс»?
5. Чему равен sin 0^o, 30^o, 45^o, 60^o, 90^o, 180^o, 270^o?
6. Чему равен cos 0^o, 30^o, 45^o, 60^o, 90^o, 180^o, 270^o?
7. Чему равен tg 0^o, 30^o, 45^o, 60^o, 90^o, 180^o, 270^o?
8. Чему равен ctg 0^o, 30^o, 45^o, 60^o, 90^o, 180^o, 270^o?
9. Что такое «радиан»?
10. Как вычисляется длина дуги?
11. Как перевести величину угла из градусов в радианы?
12. Как перевести величину угла из радиан в градусы?
13. Как связаны между собой sin, tg и угол (в радианах) при значениях угла меньше 0,1 радиана?
14. Чему равна длина окружности?
15. Чему равен sin (90^o–α)?
16. Чему равен cos (90^o–α)?
17. Чему равен tg (90^o–α)?
18. Чему равен ctg (90^o–α)?
19. Чему равен sin (90^o+α)?
20. Чему равен cos (90^o+α)?
21. Чему равен tg (90^o+α)?
22. Чему равен ctg (90^o+α)?
23. Чему равен sin 2α ?
24. Чему равен cos 2α ?
25. Какие значения может принимать синус?
26. Какие значения может принимать косинус?
27. Какие значения может принимать тангенс?
28. Какие значения может принимать котангенс?
29. Чему равна площадь круга?
30. Чему равна площадь прямоугольника?
31. Чему равна площадь треугольника?
32. Чему равна площадь трапеции?
33. Какие треугольники подобны?
34. Какими свойствами обладают подобные треугольники?
35. На какие фигуры разбивает прямоугольный треугольник медиана, проведенная из вершины прямого угла? Как обосновать ответ?
36. Каковы правила сложения и вычитания дробей?
37. Каковы правила умножения и деления дробей?
38. Решите уравнение: $(\frac{a}{b}+c)x+\frac{d}{k}=e.$
39. Чему равно a^0 ?
40. Чему равно a/∞ ?

41. Чему равно a/0 ?
42. Чему равно $a^m \cdot a^n$?
43. Чему равно $(a^m)^n$?
44. $(a+b)^2$ = ?
45. $(a–b)^2$ = ?
46. (a+b)(a–b) = ?
47. Чему равны корни приведенного квадратного уравнения

$$x^2 + bx + c = 0 \quad ?$$

48. В чем разница между аргументом и функцией?
49. Сформулируйте понятие производной.
50. Что такое «дифференциал»?
51. Каков геометрический смысл производной? Как обосновать ответ?
52. Как определяется знак производной?
53. Что такое «экстремум функции»?
54. Что является признаком экстремальности функции?
55. Что такое «вторая производная»?
56. Какой знак имеет вторая производная от функции, на графике которой выпуклость направлена в положительную сторону оси?
57. Как изменяется в результате дифференцирования порядок функции, представляющей собой полином (многочлен)?
58. Как дифференцируется сложная функция типа $f(z(y(x)))$?
59. Запишите производные от следующих функций:

$$y(x)=ax^n,$$
$$y(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$
$$\sin(ax),$$
$$\cos(ax),$$
$$(ax^m + bx^n)^2,$$
$$(\sin(ax))^3,$$
$$(\cos(ax)^2)^2.$$

60. Какие Вы знаете виды интегралов?:
61. Что такое «неопределенный интеграл»?
62. Сколько имеет первообразных любая подынтегральная функция?
63. Каков смысл «постоянной интегрирования»?
64. Как убедиться, что данная функция является первообразной для рассматриваемой подынтегральной функции?
65. Как изменяется в результате интегрирования порядок функции, представляющей собой полином (многочлен)?
66. Запишите первообразные для следующих подынтегральных функций:

$$y(x)=ax^n,$$
$$y(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$
$$\sin(ax),$$
$$\cos(ax),$$
$$(ax^m + bx^n).$$

67. Что такое «определенный интеграл»?

68. Как вычисляется определенный интеграл?
69. Каков геометрический смысл определенного интеграла?
70. Каков геометрический смысл двойного определенного интеграла?
71. В каких единицах измеряется сила в международной системе единиц (СИ) и в технической системе?
72. Как выражается ньютон через основные единицы измерения системы СИ?
73. Как связаны между собой «кГ» (килограмм силы) и «н» (ньютон)? Обоснуйте ответ.
74. Что означают приставки «кило» и «мега»?
75. В каких единицах в системе СИ измеряется давление (или напряжение)?
76. Что такое «паскаль»?
77. Переведите «МПа» в $\frac{кн}{см^2}$.
78. Как вычисляется вес тела?
79. Как определяется объем призматического тела?
80. Что такое «плотность материала»? В каких единицах она измеряется?
81. Что такое «объемный вес материала»? В каких единицах он измеряется?
82. Как вычисляется работа силы?
83. Как вычисляется работа момента?
84. В каких единицах измеряется работа?
85. Как записывается закон Ома?
86. Как вычисляется сопротивление проводника?
87. Что означает термин «статика»?
88. Что представляют собой по смыслу уравнения равновесия?
89. Как определяется проекция силы на ось?
90. Что такое «момент силы относительно оси»?
91. Что такое «плечо» при определении момента силы относительно оси?
92. Чему равен момент силы относительно оси, если сила и ось лежат в одной плоскости?
93. Как связаны плоскость действия момента и ось, относительно которой он действует?
94. Сколько независимых уравнений равновесия можно записать для произвольной пространственной системы сил?
95. Сколько независимых уравнений равновесия можно записать для пространственной системы сходящихся сил?
96. Сколько независимых уравнений равновесия можно записать для произвольной плоской системы сил?
97. Сколько независимых уравнений равновесия можно записать для плоской системы сходящихся сил?
99. Сколько независимых уравнений равновесия можно записать для плоской системы параллельных сил?
100. Как находится равнодействующая двух сходящихся сил?
101. В чем заключается теорема Вариньона?
102. Чему равна и где проходит равнодействующая двух параллельных сил?

103. Чему равна и где проходит равнодействующая равномерно распределенной по длине нагрузки?
104. Чему равна и где проходит равнодействующая произвольно распределенной по длине нагрузки?

Теперь, когда Вы знаете ответы на все эти вопросы, желаем Вам успешного изучения сопротивления материалов.

ОГЛАВЛЕНИЕ