Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра математического анализа

Е.А. Резников, Н.М. Япарова

Элементы линейной алгебры

Учебное пособие по практическим занятиям

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2010

УДК 512.64(075.8)
Р344

Одобрено
учебно-методической комиссией механико-математического факультета

Рецензенты:
А.С. Макаров, И.М. Соколинская

Элементы линейной алгебры: учебное пособие / Е.А. Резников,
Р344 Н.М. Япарова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2010. – 25 с.

Учебное пособие предназначено для студентов технических специальностей. Пособие содержит теоретический и необходимый справочный материал по теории матриц и систем линейных алгебраических уравнений, предусмотренный программой при изучении курса «Высшая математика». Приведены основные методы решения задач, относящихся к указанному разделу курса, а также предложены примеры решения этих задач. В пособие включены задачи для аудиторных занятий и самостоятельной работы студентов.

Пособие может быть использовано при подготовке и проведении практических занятий по курсу «Высшая математика».

УДК 512.64(075.8)

МАТРИЦЫ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Одним из основных направлений, изучаемых в курсе высшей математики, является изучение произвольных систем уравнений первой степени или, как говорят, линейных уравнений. Для решения тех систем, в которых число неизвестных совпадает с числом уравнений, используют теорию определителей. Однако в процессе решения различных практических задач довольно часто возникают системы, не обладающие данным свойством: в них число неизвестных не равно числу уравнений. Необходимость в исследовании подобных систем привела к созданию теории матриц, которая в настоящий момент имеет достаточно широкое применение в других областях знаний.

Определение. Таблица из $m \cdot n$ чисел, расположенных в определенном порядке в m строках и n столбцах, называется прямоугольной матрицей размера $m \times n$.

Обозначается такая матрица A_{mxn} или $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Число a_{ij}, стоящее на пересечении i-й строки и j-го столбца, называется элементом матрицы $A_{m\times n}$ с номером ij.

Определение. Матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей-строкой размера $1\times n$.

Определение. Матрица, состоящая из одного столбца, называется матрицей-столбцом размера $m\times 1$.

Определение. Нулевой матрицей, называется матрица, у которой все элементы равны нулю.

Определение. Две матрицы одинакового размера называют равными тогда только тогда, когда они имеют одинаковые соответствующие элементы.

Определение. Матрица, у которой число строк равно числу столбцов называется квадратной. Число строк (число столбцов) квадратной матрицы называется порядком квадратной матрицы.

Определение. Элементы квадратной матрицы $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$ образуют главную диагональ, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots a_{n1}$ – побочную диагональ.

Определение. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме тех, что стоят на главной диагонали, равны нулю называется диагональной матрицей.

Определение. Диагональная матрица порядка n, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, а остальные элементы равны 0, называется единичной матрицей:

$$E_{n\times n}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

Определение. Прямоугольная матрица $A_{m\times n}$ называется трапециевидной, если она имеет вид:

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1r}&\cdots&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2r}&\cdots&\cdots&a_{2n}\\\vdots&0&\ddots&\cdots&\cdots&\cdots&\vdots\\0&0&0&a_{rr}&\cdots&\cdots&a_{rn}\\0&\cdots&\cdots&0&\cdots&\cdots&0\\0&0&0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix},$$

где элементы $a_{11},a_{22},\ldots a_{rr}$ отличны от нуля.

ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Определение. Матрица, полученная из исходной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, транспонированной данной. Матрицу, транспонированную к матрице A, обозначают A^T.

Пример. Найти A^T для матрицы $A=\begin{pmatrix}2&3\\-1&0\\4&1\end{pmatrix}$.

Решение. $A^T=\begin{pmatrix}2&-1&4\\3&0&1\end{pmatrix}$.

Линейные операции

Определение. Суммой двух матриц $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{m\times n}=(b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n}=A+B=(c_{ij})$ такая, что $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Определение. Произведением матрица $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на число λ называется матрица $B_{m\times n}=\lambda A=(b_{ij})$ такая, что $b_{ij}=\lambda a_{ij}$.

Свойства линейных операций:

1) $A+B=B+A$;
2) $A+0=A$, где 0 – нулевая матрица;
3) $A+(-A)=A-A=0$;
4) $(A+B)+C=A+(B+C)$;
5) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
6) $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)=\beta(\alpha A)$;
7) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;
8) $(\alpha A)^T=\alpha A^T$;
9) $(A+B)^T=A^T+B^T$.

Пример. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix}-1 & 9 & 7\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C=2A-B$.

Решение.

$$C=2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 9 & 7\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 18 & 14\\ 4 & 0 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2-2 & 18-1 & 14+1\\ 4-0 & 0-3 & -4-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 17 & 15\\ 4 & -3 & -8\end{pmatrix}.$$

Умножение матриц

Определение. Матрицы $A_{m\times n}$ и $B_{n\times k}$ (в указанном порядке) называются согласованными, если число столбцов матрицы $A_{m\times n}$ равно числу строк матрицы $B_{n\times k}$.

Определение. Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на матрицу $B_{n\times k}=(b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times k}=AB=(c_{ij})$ такая, что

$$c_{ij}=\sum_{p=1}^{n}a_{ip}b_{pj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}.$$

Пример. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -1 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix}$. Найти $C=AB$.

Решение.

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}4 & 2\\ -1 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-2)\cdot 4+0\cdot(-1)+1\cdot 5 & (-2)\cdot 2+0\cdot 0+1\cdot 1\\ 3\cdot 4+2\cdot(-1)+(-1)\cdot 5 & 3\cdot 2+2\cdot 0+(-1)\cdot 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-8+0+5 & -4+0+1\\ 12-2-5 & 6+0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -3\\ 5 & 5\end{pmatrix}.$$

Свойства умножения матриц

1) $(AB)C=A(BC)$;
2) $AB\neq BA$;
3) $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$;
4) $(A+B)C=AC+BC$;
5) $C(A+B)=CA+CB$;
6) $(AB)^T=B^T A^T$;
7) $AE=EA=A$, где E – единичная матрица.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ.

Тема «Действия над матрицами»

1)Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

Найти а) $3A-2B-C$; б) $2A+4B-3C$.

2) Найти a,b,c из уравнений:

а) $3\begin{pmatrix}a & 3 & c\\ 4 & b & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a & 3 & c\\ 4 & b & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4c & 7 & 5\\ 7 & -8 & a\end{pmatrix}$.

б) $2\begin{pmatrix}2 & 3\\ b & a\\ 3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & c\\ a & c\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 8\\ c & 6\\ 7 & 4\end{pmatrix}$.

3) Выполнить действия:

а) $\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 5\\ -1 & 6\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -6 & 7\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & -4 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 4\\ -1\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4 & 0\\ 5 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ -1 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}$.

4) Найти матрицу C, заданную формулой:

а) $C=AB^T-3B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 6 & 8\end{pmatrix}$.

б) $C=AB^T+A$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

в) $C=(A\cdot B)^T$, если $A=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

5) Выполнить действие $AB-BA$ в том случае, когда это возможно. Объяснить полученный результат.

а) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\\ 0 & 5\\ 4 & 0\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

6) Найти A^2 и A^3 для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

Ответы:

1.а) $\begin{pmatrix}5 & -4\\ 1 & 5\\ 5 & -7\end{pmatrix}$; 1.б) $\begin{pmatrix}8 & 8\\ -10 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$;

2.а) a=3, b=-2, c=2; 2.б) a=2, b=0; c=2.

3.а) $\begin{pmatrix}-1 & 21\\ -2 & 7\end{pmatrix}$; 3.б) $\begin{pmatrix}6 & -18 & 21\\ -2 & 6 & -7\\ 4 & -12 & 14\end{pmatrix}$; 3.в) -18; 3.г) $\begin{pmatrix}-6 & -7\\ 15 & 11\end{pmatrix}$.

4.а) $\begin{pmatrix}4 & 1\\ 25 & 26\end{pmatrix}$; 4.б) $\begin{pmatrix}20 & 15 & 10\\ 50 & 36 & 25\end{pmatrix}$; 4.в) $\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6\\ -1 & 2 & 3\\ -3 & 6 & 9\end{pmatrix}$.

5.а) Действие нельзя выполнить, т.к. матрицы AB и BA разного размера;

5.б) $\begin{pmatrix}9 & 1\\ -15 & -9\end{pmatrix}$; 5.в) $\begin{pmatrix}1 & -1 & -10\\ 6 & -2 & 11\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$; 6) $A^2=\begin{pmatrix}-3 & -10\\ 10 & 12\end{pmatrix}$; $A^3=\begin{pmatrix}-23 & -34\\ 34 & 28\end{pmatrix}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

Тема «Действия над матрицами»

1) Найти матрицу $D=A^2-BB^T$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 1 & 4 & -2\end{pmatrix}$.

2) Найти матрицу $D=ABC$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}$.

3) Найти матрицу $D = 3AB - (BC)^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Найти матрицу $B = A^2 - A^3 + A$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответы:

1) $\begin{pmatrix} -27 & 8 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 7 & 28 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -8 & 22 \\ 7 & -11 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 29 & 98 \\ -28 & 29 \end{pmatrix}$

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, которое называется определителем этой матрицы. Обозначается определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ или } |A| \text{ или } \det A.$$

Определитель 2-го порядка можно вычислить по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определителя 3-го порядка можно найти по следующей формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

Это правило можно изобразить графически:

$$\overset{+}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad \overset{-}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

К сожалению, такой способ не пригоден для вычисления определителей 4-го, 5-го и более высоких порядков. Прежде чем указать правило, которое позволит найти определитель любого порядка, рассмотрим понятие минора элемента и алгебраического дополнения элемента матрицы.

Миноры элементов квадратной матрицы. Алгебраические дополнения

Определение. Минором элемента a_{ij} в квадратной матрице n-го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из исходной вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых находится данный элемент. Обозначают минор M_{ij}.

Пример. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Найти минор элемента a_{ij}.

Решение. $M_{12}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=3\cdot 1-(-1)(-1)=2$.

Определение. Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} называют число, найденное по следующему правилу:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Пример. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Найти алгебраическое дополнение A_{21} элемента a_{21}.

Решение. По определению алгебраического дополнения $A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-M_{21}$.

$M_{12}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}=-3\cdot 1-1\cdot 5=-11$. Тогда $A_{21}=11$.

Вычисление определителя произвольного порядка

Теорема. Определитель матрицы n-го порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\det A=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}+\ldots a_{in}A_{in}$$

Пример. Найти определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем определитель, используя элементы второй строки:

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot A_{21}+0\cdot A_{22}+3\cdot A_{23}=-2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}+0-3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=$$

$$=-2(-4-4)+0-3(4-2)=10.$$

Простейшие свойства определителей

1. $\det A = \det A^T$;
2. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$;
3. Если все элементы некоторой строки (или столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.
4. Если определитель имеет две одинаковые строки (или столбцы), то он равен нулю.
5. Если элементы двух строк (или двух столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.
6. Если в определителе поменять местами (переставить) две строки (или два столбца), то у определителя изменится знак.
7. Умножение всех элементов одной строки (столбца) определителя на любое число равносильно умножению определителя на это число.
8. Если каждый элемент n-ой строки (n-го столбца) определителя равен сумме двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, первый из которых в n-й строке (n-м столбце) содержит первые из упомянутых слагаемых, а другой – вторые. Элементы, стоящие на остальных местах, у всех трех определителей одинаковые.
9. Если к элементам некоторой строки (столбца) определителя прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на произвольное число, то определитель не изменится.
10. Сумма произведений элементов некоторой строки (столбца) на алгебраические дополнения другой строки (столбца) равна нулю.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ.

Тема «Определители»

1) Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

2) Используя свойства определителей, вычислить:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -8 & 1 \\ 3 & 15 & 18 & 91 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 13 & 39 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 7 & 5 \\ 13 & -1 & 17 & 4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 8 & 28 & 38 & 48 \\ 4 & 14 & 19 & 24 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ -5 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

3) Решите уравнения:

а) $\begin{vmatrix} x-2 & 4 \\ 5 & x-1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x-4 & 5 \\ 3-x & x-1 \end{vmatrix} = 5$; в) $\begin{vmatrix} x-4 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & x+1 & 3 \end{vmatrix} = 20$.

4) Для элементов матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ найти все миноры и алгебраическое дополнение A_{12}.

5) Для элементов матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ найти алгебраическое дополнение A_{21} и минор M_{32}.

6) Для элементов матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ найти алгебраическое дополнение A_{33} и минор M_{14}

Ответы:
1.а) -2; 1.б) -33; 1.в) 1; 1.г) $\cos 3x$; 1.д) 17; 1.е) -16; 1. ж) 10. 2.а) 0; 2.б) 0; 2.в) 0; 2.г) -138, 2.д) -5, 2.е) 2438. 3.а) $x_1 = -3; x_2 = 6$; 3.б) $x_1 = -4$; $x_2 = 4$; 3.в) $x = 18$. 4) $M_{11} = 5; M_{12} = -2; M_{21} = 3; M_{22} = -1; A_{12} = 2$; 5) $A_{21} = 2$; $M_{32} = -5$. 6) $A_{33} = 11$; $M_{14} = -16$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

Тема «Определители»

1) Найти $\det(AB)$ и $\det(BA)$, если $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, а $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2) Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \sqrt{x} & 1 \\ x & \sqrt{x} \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 20 \\ 0 & 5 & 21 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

3) Решить уравнения:

а) $\begin{vmatrix} x-5 & 2 \\ 4 & x-3 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x & 4 & 6 \\ 8 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} y & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & y-2 & 1 \end{vmatrix} = 2$.

4) Используя теорему о вычислении определителя, найти:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 0 & 3 \\ 1+b & 4 & -1 & 0 \\ 1+c & 6 & 0 & 1 \\ 1+d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

5) Используя свойства, вычислить определители рациональным способом:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+3 \end{vmatrix}$.

6) Найти A_{22}, A_{32}, A_{13} для данных матриц:

а) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответы:

1) $\det(AB) = 0; \det(BA) = 6$. 2.а) 43; 2.б) 0; 2.в) 60; 2.г) 0; 3.а) $x_1 = 8; x_2 = 1$;
3.б) $x_1 = 15$; $x_2 = 16$; 3.в) $x = 4$.
4.а) 2; 4.б) $7a - 3b + 2c$; 4.в) $10 - 5a - 16b + 15c + 16d$; 5.а) 0; 5.б) 6; 5.в) 0; 5.г)12.
5.д) $a^3 + 3a^2 + 2a$; 6.а) $A_{22} = 7$, $A_{32} = -4$, $A_{13} = -5$; 6.б) $A_{22} = 0$, $A_{32} = 15$, $A_{13} = -4$.

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение. Пусть A – квадратная матрица. Матрицу A^{-1} называют обратной матрицей к матрице A, если $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, где E – единичная матрица.

Определение. Пусть A – квадратная матрица. Присоединенной матрицей к матрице A называется матрица $A^* = \left(A_{ij}\right)^T$, полученная транспонированием из матрицы, составленной из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij}.

Теорема 1. Пусть A – квадратная матрица и $\det A \neq 0$, тогда существует единственная обратная матрица A^{-1}.

Теорема 2. Пусть A – квадратная матрица. Если $\det A \neq 0$, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*.$$

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Найти A^{-1}.

Решение. Так как $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 - 2\cdot(-4) = 7 \neq 0$, то из теоремы 1 следует, что существует единственная обратная матрица A^{-1}. Для того, чтобы её найти, используем теорему 2.

Найдем все алгебраические дополнения.

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 1$ $\qquad$ $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -(-4) = 4$

$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} = -(2) = -2$ $\qquad$ $A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} = -1$.

Тогда $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Тема «Обратная матрица. Матричные уравнения»

1) Найти матрицы, обратные данным, и сделать проверку:

а) $\begin{pmatrix} 12 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;   ж) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

2) Найти при каких значениях λ существуют матрицы, обратные к данным:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$;   б) $\begin{pmatrix} \lambda-2 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$;   в) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1+\lambda & 9 \end{pmatrix}$.

3) Найти матрицу X из матричного уравнения:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;   б) $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$;   г) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;   е) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ -1 & 12 \\ 12 & 27 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$.

Ответы:

1.а) $\frac{1}{63}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$;   1.б) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;   1.в) A^{-1} не существует;   1.г) $\frac{1}{48}\begin{pmatrix} -10 & 12 & -10 \\ -17 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$;

1.д) A^{-1} не существует;   1.е) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;   1.ж) $\frac{1}{67}\begin{pmatrix} 13 & -3 & -7 \\ 12 & 23 & 9 \\ -5 & -4 & 13 \end{pmatrix}$.   2.а) $\lambda \neq -1$;

2.б) $\lambda \neq 2$;   2.в) ни при каких λ.   3.а) $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;   3.б) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;   3.в) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

3.г) $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$;   3.д) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$;   3.е) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

Тема «Обратная матрица. Матричные уравнения»

1) Для матриц A, B, C найти обратные матрицы, если

$$A=\begin{pmatrix}4&2\\1&6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&3&-1\\3&5&-2\\2&1&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&1&5\\0&9&-7\\1&6&1\end{pmatrix}.$$

2) Найти матрицу $C=(AB)^{-1}-B^{-1}A^{-1}$, если $A=\begin{pmatrix}2&2&4\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&0\\2&0&0\end{pmatrix}$.

3) Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&4&1\end{pmatrix}$; б) $X\cdot\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&-1\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1&-1&-3\\0&2&0\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&4\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}2&2&4\\4&3&6\\1&-1&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$.

4) Найти матрицу X из уравнений:

а) $AX+2C^T=B$, если $A=\begin{pmatrix}-2&2\\3&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\\-2&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&-2\end{pmatrix}$;

б) $3B-XA=CC^T$, если $A=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\2&4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&1\end{pmatrix}$;

Ответы:

1) $A^{-1}=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}6&-2\\-1&4\end{pmatrix}$; $B^{-1}=\begin{pmatrix}-3&2&-1\\-1&1&-1\\-7&5&-4\end{pmatrix}$; $C^{-1}=\begin{pmatrix}-51&-29&52\\7&4&-7\\9&5&-9\end{pmatrix}$. 2) $C=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$;

3.а) $X=\begin{pmatrix}2&1&3\\3/2&5/2&2\end{pmatrix}$; 3.б) $X=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\7\\2\end{pmatrix}$; 3.в) $X=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}-10&-7&10\\-10&17&-14\end{pmatrix}$; 3.г) $X=\begin{pmatrix}5\\-7/2\\-5/4\end{pmatrix}$.

4.а) $X=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix}-2&7&0\\-2&5&-8\end{pmatrix}$; 4.б) $X=\begin{pmatrix}-13&-16\\8&14\end{pmatrix}$.

РАНГ МАТРИЦЫ.ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦЫ

Определение. Минором k-ого порядка произвольной матрицы A называется определитель, составленный из элементов этой матрицы, расположенных на пересечении k строк и k столбцов.

Определение. Рангом матрицы А называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю.

Ранг матрицы А обозначают $rang(A)$ или $r(A)$.

Определение. *Элементарными преобразованиями матрицы* называют:

1) Умножение некоторой строки (или столбца) на число, отличное от нуля.
2) Прибавление к элементам одной строки элементов другой строки, умноженных на произвольное число. Прибавление к элементам одного столбца элементов другого столбца, умноженных на произвольное число.
3) Перестановка местами двух строк (или столбцов) матрицы.

Теорема. Элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы.

Отыскание ранга матрицы

Для того чтобы найти ранг матрицы необходимо с помощью элементарных преобразований привести матрицу к трапециевидной форме, тогда, согласно теореме о ранге матрицы, число ненулевых строк полученной матрицы равно рангу исходной матрицы.

Пример. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{pmatrix} \underset{III стр.+2\bullet I стр}{\overset{II стр.-I стр}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1-1 & 2-1 & -3+1 & 0+4 \\ -2+2 & 0+2 & -2-2 & 16-8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{pmatrix} \overset{III стр.-2\bullet II стр.}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0-0 & 2-2 & -4+4 & 8-8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A)=2.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Тема «Ранг матрицы»

1) Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 12 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2) При каких значениях α ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & \alpha & 6 \end{pmatrix}$ равен 2?

3) При каких значениях α ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & \alpha & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ равен

а) 1; б) 2; в) 3?

Ответы:

1.а) $r(A) = 2$; 1.б) $r(A) = 2$; 1.в) $r(A) = 2$; 1.г) $r(A) = 2$; 1.е) $r(A) = 3$.

2) $\alpha = 2$. 3.а) $\alpha = -4$; 3.б) $\alpha \neq -4$; 3.в) ни при каких α.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

Тема «Ранг матрицы»

1. Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 & -6 \\ 1 & 4 & -3 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответы:
1а) $r(A)=2$; 1.б) $r(A)=3$; 1.в) $r(A)=2$; 1.г) $r(A)=2$.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Определение. Системой из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется система уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (*)$$

где числа a_{ij} называются коэффициентами системы, а числа $b_1, \ldots b_m$ – свободными членами.

Определение. Решением системы (*) называется такой набор чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, что после подстановки $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ в каждое из уравнений системы вместо $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, эти уравнения обращаются в верное тождество.

Определение. Если система уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной. Система, не имеющая ни одного решения, называется несовместной.

Определение. Две системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных называются эквивалентными, если множества всех решений этих систем совпадают.

Введем следующие обозначения: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов (её называют также матрицей системы),

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных; $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов, тогда

систему линейных уравнений можно представить в виде матричного уравнения:

$$AX = b.$$

Матричный метод решения

Если система уравнений состоит из n уравнений с n неизвестными, т.е. матрица A – квадратная и $\det A \neq 0$, то решение системы можно найти, используя формулу

$$X^{-1} = AB .$$

Решение системы по формулам Крамера

Пусть система (*) состоит из n уравнений с n неизвестными, то есть матрица A – квадратная. Обозначим через Δ определитель матрицы A, а через Δ_{xi} – определитель, полученный из определителя матрицы A заменой i-го столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_{xi} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Теорема. Пусть система (*) состоит из n уравнений с n неизвестными и $\det A \neq 0$, тогда система (*) имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам:

$$x_i = \frac{\Delta_{xi}}{\Delta} .$$

Пример. Найти решение системы $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$

Решение. Выпишем матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найдем её определитель.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 .$$

Так как $\det A \neq 0$, то для решения системы можем использовать формулы Крамера. Для этого найдем Δ_{x1}, Δ_{x2}.

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 6 , \quad \Delta_{x2} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 9 .$$

Тогда $x_1 = \dfrac{\Delta_{x1}}{\Delta} = \dfrac{6}{3} = 2$, а $x_2 = \dfrac{\Delta_{x2}}{\Delta} = \dfrac{9}{3} = 3$.

Решение произвольных систем линейных уравнений (метод Гаусса)

Определение. Матрицу $\left(A\,|\,b\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & & b_m \end{array}\right)$ называют расширенной матрицей системы.

Теорема. (Кронекера–Капелли). Система линейных уравнений (*) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы: $r(A)=r(A\,|\,b)$.

Имеет место следующий результат:

Утверждение. Пусть n – количество неизвестных. Если $r(A)=r(A\,|\,b)=n$, то система имеет единственное решение, если $r(A)=r(A\,|\,b)\neq n$, то система имеет множество решений.

Напомним, что элементарные преобразования над строками матрицы, описанные в разделе «Ранг матрицы» не меняют ее ранга. Более того, справедливо следующее утверждение:

Элементарные преобразования над строками расширенной матрицы системы не меняют решение системы.

Решение произвольных систем заключается в том, что с помощью элементарных преобразований над строками матрица $\left(A\,|\,b\right)$ приводится к трапециевидной форме. После этого, используя теорему Кронекера–Капелли, проверяют систему на совместность. В том случае, когда система совместна, выписывается и решается система, эквивалентная трапециевидной форме матрицы $\left(A\,|\,b\right)$.

Пример. Исследовать систему уравнений, и, в случае её совместности, найти решение данной системы:

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-4 \\ x_1+2x_2-3x_3=0 \\ -2x_1-2x_3=16 \end{cases}$$

Решение: С помощью элементарных преобразований найдем ранг системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{array}\right) \underset{IIIcmp+2\cdot Icmp}{\overset{IIcmp-Icmp}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{array}\right) \overset{IIIcmp-2\cdot IIcmp}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow r(A)=r(A\,|\,b)=2 \Rightarrow$ система совместна.

Так как $r(A)=r(A\,|\,b)\neq n$, где количество неизвестных $n=3$, то система имеет множество решений.

Так как элементарные преобразования не меняют решения системы, то для того чтобы найти множество решений, запишем систему, эквивалентную последней матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Пусть $x_3 = c$, тогда, выразив из второго уравнения x_2, а из первого – x_1, получим: $x_2 = 2c + 4$, $x_1 = -4 - x_2 + x_3 = -c - 8$.

Таким образом, решение системы можно записать в следующем виде: $(-c - 8;\quad 2c + 4;\quad c)$, где c – любое число.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Тема « Системы линейных алгебраических уравнений»

1. Решить системы по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 1 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 1 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 = 8 \\ 5x_1 + 3x_2 = 19 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 10 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$; д) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 13 \end{cases}$.

2) Исследовать каждую из систем и в случае совместности решить ее:

а) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 = 23 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4 \\ 7x_1 - 4x_2 - 7x_3 - 5x_4 = -7 \end{cases}$; д) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 7 \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$;

е) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3=0 \\ 4x_1+3x_2+2x_3=0 \end{cases}$; ж) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \\ 5x_1+5x_2-x_3=0 \end{cases}$; з) $\begin{cases} x_1+5x_2+x_3+x_4=0 \\ 7x_1+5x_2-x_3+5x_4=0 \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=0 \\ 5x_1+7x_2+x_3+4x_4=0 \end{cases}$.

Ответы:

1.а) (1;-1); 1.б) (2;3); 1.в) (1;1;1); 1.г) (4;5;-3); 1.д) (2;-1;1).

2.а) $\left(c; \frac{-7}{5}; \frac{18-15c}{10}\right)$; 2.б) (4;1); 2.в) несовместна; 2.г) $(5c-5; 7c-7; c; 0)$;

2.д) несовместна; 2.е) $(c; -2c; c)$; 2.ж) (0;0;0); 2.з) $\left(c_1; c_2; \frac{c_1-5c_2}{3}; \frac{-4(c_1+c_2)}{3}\right)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

Тема « Системы линейных алгебраических уравнений»

1) Решить системы, используя формулы Крамера:

а) $\begin{cases} 2x+5y=1 \\ 3x+4y=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x_1-3x_2-2x_3=10 \\ x_1+2x_2-4x_3=3 \\ 5x_1-9x_2-4x_3=12 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=3 \\ x_1-2x_2-3x_3=1 \\ 2x_1+3x_2-x_3=2 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3-2x_4=0 \\ 4x_1+4x_2+x_3-3x_4=0 \end{cases}$

2) Найти при каких значениях k система имеет единственное решение, или имеет множество решений или не имеет решений

а) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=5 \\ 5x_1+2x_2-x_3=16 \\ x_1+k\cdot x_3=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=1 \\ 3x_1+kx_2-x_3=3 \\ x_1+2x_2+x_3=2 \end{cases}$

3) Исследовать системы и, в случае совместности, найти решения систем:

а) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=1 \\ 2x_1-3x_2+x_3=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=-2 \\ x_1+2x_2+3x_3=-1 \\ x_1-3x_2-2x_3=2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=1 \\ 2x_1-x_2-x_3=-1 \\ 3x_1+2x_2-3x_3=4 \end{cases}$;

$$г)\ \begin{cases} 2x_1+5x_2-8x_3=8 \\ 4x_1+3x_2-9x_3=9 \\ 2x_1+3x_2-5x_3=7 \\ x_1+8x_2-7x_3=12 \end{cases};\quad д)\ \begin{cases} 2x_1+5x_2-x_3-3x_4=2 \\ 4x_1+x_3-7x_4=3 \\ 2x_2-3x_3+x_4=1 \\ 2x_1+3x_2-4x_3-2x_4=3 \end{cases}.$$

Ответы:

1.а) $\frac{-1}{7}(-6;1)$; 1.б) (5;1;1); 1.в) (1;0;0); 1.г) (0;0;0;0).

2.а) При $k=-1$ система имеет множество решений, при $k\neq -1$ – единственное решение;

2.б) при $k\neq -2$ система имеет единственное решение, при $k=-2$ система несовместна.

3.а) $(5+c;\,2+c;\,c)$; 3.б) система несовместна; 3.в) (1;2;1); 3.г) (3;2;1);

3.д) $\left(\frac{3-c_1+7c_2}{4};\,\frac{1+3c_1-c_2}{2};\,c_1;\,c_2\right)$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Матрицы, размер матрицы, виды матриц.
2. Линейные операции над матрицами. Сложение матриц. Умножение матрицы на число. Свойства линейных операций.
3. Умножение матриц. Транспонирование матриц. Свойства умножения.
4. Обратная матрица. Теорема о существовании обратной матрицы.
5. Теорема об отыскании обратной матрицы.
6. Определители. Правила отыскания определителей 2-го и 3-го порядков.
7. Миноры и алгебраические дополнения элементов.
8. Теорема об отыскании определителей произвольного порядка.
9. Свойства определителей.
10. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матрицы.
11. Системы линейных уравнений. Матричная форма записи систем линейных уравнений.
12. Матричный метод решения систем.
13. Формулы Крамера.
14. Решение произвольных систем. Теорема Кронекера-Капелли.
15. Метод Гаусса решения линейных систем.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Часть 1 / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-Пресс, 2008. – 219 с.
2. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах./ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевников – М.: Высш. шк. – 1986. – Ч.1. – 304с.

3. Математика. Конспект лекций для студентов технических и экономических специальностей. / под ред. А.Д. Дрозина, С.Г. Андреева, В.Л. Дильман, А.Д.Дрозин, М.Л. Катков – Челябинск.: ЮУрГУ, 2006. – Ч.1. – 78 с.
4. Письменный, Д.Т. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – М.: Айрис-Пресс, 2009. – 560 с.
5. Лунгу, К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. / К.Н. Лунгу, Е.В.Макаров. – М.: Физматлит, 2005. – Ч.1. – 216 с.
6. Соболь, Б.В. Практикум по высшей математике/ Б. В. Соболь, Н.Т. Мишняков, В.М. Поркшеян. – 3-е изд. –Ростов н/Д: Феникс, 2006. – 640 с.
7. Черненко, В.Д. Высшая математика в примерах и задачах / В.Д.Черненко – СПб.: Политехника, 2003. — Т. 1. – 703 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ