

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию  
Южно-Уральский государственный университет  
Кафедра «Строительная механика»

624.04(07)  
В932

В.Л. Высоковский, В.Ф. Сбитнев

## **РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ**

Учебное пособие для студентов-заочников  
специальностей ПГС и АДиА

Челябинск  
Издательство ЮУрГУ  
2007

УДК 624.04(075.8) + 624.072.2(075.8) + 624.072.33(075.8)  
В932

*Одобрено  
учебно-методической комиссией  
архитектурно-строительного факультета*

*Рецензенты:  
С.Б. Шматков, В.Г. Подойников*

**Высоковский, В.Л.**

В932 Расчет статически определимых стержневых систем: учебное пособие для  
· студентов-заочников специальности ПГС/ В.Л. Высоковский, В.Ф. Сбитнев.  
· – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 37 с.

Учебное пособие содержит решение типовых контрольных задач по курсу строительной механики статически определимых стержневых систем с предварительными пояснениями из теории к их решению. Первая часть пособия содержит задачи по построению эпюр внутренних силовых факторов и линий влияния внутренних усилий в различных по типу конструкциях (балки, рамы, фермы). Вторая часть состоит из задач по определению перемещений в плоских стержневых системах от различных внешних воздействий.

В пособии приводятся примеры решения типовых задач, необходимые пояснения к решению, примерное оформление контрольных работ.

Пособие предназначено для студентов строительных специальностей всех форм обучения и, в первую очередь, заочной формы.

УДК 624.04(075.8) + 624.072.2(075.8) + 624.072.33(075.8)

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	4
1. Основные требования к контрольным работам . . . . .	4
2. Расчет многопролетной статически определимой балки . . . . .	5
2.1. Построение эпюр внутренних силовых факторов в многопролетной балке	
2.1.1. Кинематический анализ балки . . . . .	6
2.1.2. Поэтажная схема . . . . .	7
2.1.3. Расчет отдельных балок . . . . .	7
2.2. Построение линий влияния $Q$ и $M$ в сечениях 1–1 и 2–2 . . . . .	10
2.3. Определение внутренних усилий по линиям влияния . . . . .	11
2.4. Невыгодное загрузжение линий влияния . . . . .	12
3. Расчет плоской балочной фермы	
3.1. Основные положения и пояснения к расчету . . . . .	14
3.2. Пример расчета . . . . .	14
3.2.1. Кинематический анализ фермы . . . . .	15
3.2.2. Определение усилий в стержнях фермы аналитическим методом . . . . .	16
3.2.3. Построение линий влияния в заданных стержнях фермы . . . . .	17
3.2.4. Определение усилий по линиям влияния в стержнях фермы . . . . .	23
4. Эпюры внутренних силовых факторов в плоских многодисковых рамах	
4.1. Пояснения к проблеме расчета и методические указания . . . . .	24
4.2. Пример расчета рамы на внешнюю нагрузку	
4.2.1. Кинематический анализ рамы . . . . .	25
4.2.2. Определение реакций опор и усилий взаимодействия в шарнирах . . . . .	26
5. Определение перемещений в плоских стержневых системах	
5.1. Пояснения и методические указания к теме . . . . .	29
5.2. Определение перемещений от внешней нагрузки . . . . .	29
5.3. Определение перемещений от осадки опор . . . . .	32
5.4. Перемещения от температурного воздействия . . . . .	34
Библиографический список . . . . .	36

## ВВЕДЕНИЕ

Строительной механикой в широком смысле называется наука о методах расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость. К ней относятся несколько дисциплин, в том числе: сопротивление материалов, строительная механика стержневых систем, теории упругости, пластичности и другие .

В настоящем пособии рассматриваются вопросы расчета статически определимых стержневых систем, т.е. сооружений, состоящих из брусьев или стержней. Вопросами прочности, жесткости и устойчивости отдельного стержня (бруса), как известно, занимается «Сопротивление материалов». Так как курс строительной механики является продолжением сопротивления материалов, то при его изучении будут использоваться знания, полученные из этого курса .

В частности, в неизменном виде будут использованы: правила знаков для внутренних силовых факторов (усилий); правила построения эпюр; метод сечений; виды связей, накладываемых на систему; типы внешних нагрузок; гипотезы и принципы, принятые в сопротивлении материалов.

Нужно заметить, что между сопротивлением материалов и строительной механикой стержневых систем существует принципиальное различие, состоящее в том, что сопротивление материалов рассматривает прочность, жесткость и устойчивость отдельных конструктивных элементов (стержней, балок), в то время как строительная механика рассматривает сооружения, состоящие из системы стержней, и разрабатывает методы их расчета.

Знание строительной механики помогает инженеру-строителю в выборе экономичных конструкций, в правильном понимании работы сооружений при действии нагрузки, позволяет теоретически обосновать методы образования инженерных сооружений. Кроме того, строительная механика дает нужную подготовку для изучения курсов инженерных конструкций, мостов, оболочек, тоннелей, дорожных покрытий и т.д.

Целью настоящего пособия является обучение методам и способам определения внутренних усилий и перемещений, возникающих в стержневых системах (балки, плоские рамы и фермы) от заданных воздействий.

Изучение дисциплины «Строительная механика» сопровождается самостоятельным выполнением студентами контрольных работ (расчетно-графических заданий) с использованием имеющихся конспектов лекций, учебников и задачников.

### 1. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ

Контрольные работы должны быть выполнены и оформлены согласно требованиям стандарта предприятия СТП ЧГТУ 10-92, относящимся к пояснительной записке (ГОСТ 2.106-68).

Напомним некоторые (основные) из них.

1. Текст работы выполняется рукописным способом чернилами или пастой черного или синего цвета на одной стороне стандартного листа белой бумаги формата А4 (210x297 мм).

2. Рукописный текст должен выполняться аккуратным почерком и быть понятным проверяющему работу рецензенту.

3. Листы работы должны иметь рамку по форме 5 и 5а (ГОСТ 2.106-68): отступы от краев листа должны быть не менее 25 мм слева, 15 мм сверху, 5 мм справа и 10 мм снизу.

4. Иллюстрации и схемы к вычислениям можно размещать как в тексте, так и на отдельных листах (страницах) так, чтобы расположение их способствовало восприятию решения задачи.

5. Нумерация листов контрольной работы должна быть сквозной.

6. Допускаются лишь общепринятые сокращения слов.

Не имея аналогов оформления контрольных работ, студенты при их выполнении впадают из одной крайности в другую. Некоторые добросовестно переписывают теорию из учебников, забывая о вычислениях и важных дополнительных схемах. Другие, наоборот, пишут одни формулы и арифметику, не приводя нужных схем и не объясняя, что они делают и для чего это делают. Ни то, ни другое недопустимо. При оформлении контрольной работы необходимо закрепить и продемонстрировать понимание методов решения задач.

Студент должен приводить необходимые комментарии к вычислениям и сами вычисления в разумных пределах, поскольку только комментарии к вычислениям делают контрольную работу методически осмысленной.

Настоящее учебное пособие послужит подспорьем студенту при самостоятельном выполнении и оформлении расчетно-графических заданий, так как оно содержит не только информацию по методике решения типовых контрольных задач по курсу, но позволяет студенту правильно оформить эту работу. Пособие содержит также некоторые основные рекомендации и пояснения из теории.

## **2. РАСЧЕТ МНОГОПРОЛЕТНОЙ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ**

При оформлении контрольной работы в этой задаче должны быть представлены:

1. Условие задачи.
2. Данные, взятые в табл. 1, согласно варианту [7].
3. Расчетная схема балки с указанием всех буквенных и числовых значений.
4. Кинематический анализ, состоящий из определения степени свободы и доказательства геометрической неизменяемости системы.
5. Поэтажная схема балки с необходимыми пояснениями.
6. Схема балки в расчлененном по шарнирам виде с внешними нагрузками, опорными реакциями и силами взаимодействия между частями балки.
7. Расчет отдельных балок (определение опорных реакций, эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ ).
8. Суммарные (окончательные) эпюры  $Q$  и  $M$ .

9. Определение значений  $Q$  и  $M$  в заданных сечениях 1–1 и 2–2.
10. Схема балки без нагрузки с указанием сечений 1–1 и 2–2.
11. Построение линий влияния усилий  $Q$  и  $M$  в заданных сечениях.
12. Определение усилий в указанных сечениях от заданной нагрузки по линиям влияния.
13. Невыгодное загрузение линий влияния изгибающих моментов заданной подвижной нагрузкой (с указанием разумных вариантов переборov возможных состояний).
14. Вычисление экстремальных ( $\max$  и  $\min$ ) значений изгибающих моментов от подвижной нагрузки в заданных сечениях.

## **2.1. Построение эпюр внутренних силовых факторов в многопролетной балке**

### *2.1.1. Кинематический анализ балки*

Произведем расчет многопролетной балки, показанной на рис. 2.1, а.

Как известно из теории, простейшей геометрически неизменяемой системой является диск (балка), прикрепленная к земле (абсолютный диск) тремя связями, не пересекающимися в одной точке (или защемленная).

Для проведения структурного анализа необходимо мысленно расчленить балку по шарнирам на отдельные (самостоятельные) элементы и увидеть среди них так называемые «главные» балки, т.е. представляющие собой с учетом закреплений неизменяемые системы. Они способны воспринимать нагрузку, если остальные убрать. Таких балок в многопролетной балке всегда есть одна или несколько. При этом считаем, что горизонтальная (продольная) связь принадлежит одинаково всем элементам.

Далее, в зависимости от структуры образования многопролетной балки необходимо последовательно доказать, что последующая балка (диск), присоединяемая к уже существующей системе (цепи), образует новую геометрически неизменяемую систему (диск).

1. Сначала определяем степень свободы системы.

Балка состоит из четырех дисков (балок) ABCD, DEF, FG, GK; имеет три шарнира D, F, G и шесть связей В, С, Е и К (скользящая заделка эквивалентна двум связям и шарнирно-неподвижная опора – двум). Получаем:

$$W = 3D - 2Ш - С = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 12 - 12 = 0,$$

т.е. связей достаточно для неизменяемости системы, «лишних» связей нет.

2. Производим структурный анализ.

Балка геометрически неизменяема. Доказательство:

а) балка (диск) ABCD закреплена тремя связями, т.е. жестко связана с землей; следовательно, она вместе с землей образует геометрически неизменяемую систему (диск);

б) к этому диску присоединяется балка DEF с помощью шарнира D и связи Е, не проходящей через шарнир D; это новый диск;

в) балка GK крепится к существующему диску с помощью скользящей заделки К и балки (диска) FG (в данном случае балку FG можно рассматривать как связь). Снова получилась геометрически неизменяемая конструкция.

Итак, заданная балка статически определима и геометрически неизменяема.

### 2.1.2. Поэтажная схема

1. Балка ABCD – главная; ставим её на 1-й этаж.

2. Балка DEF имеет всего одну опорную связь; две другие она получает в виде шарнира D (шарнир эквивалентен двум связям), опираясь на балку ABCD; т.е. балка DEF зависит от балки ABCD и является «второстепенной» по отношению к ней; ставим её на балку ABCD (на 2-й этаж).

3. Балка FG вообще не имеет опорных связей; нагрузку она воспринимает, опираясь слева на балку DEF, а справа на балку GK, т.е. она от них зависит и является по отношению к ним «второстепенной»; ставим балку FG на эти балки, т.е. на 3-й этаж.

4. Балку GK, как главную по отношению к балке FG, ставим на 2-й этаж.

Поэтажная схема заданной балки представлена на рис. 2.2.

### 2.1.3. Расчет отдельных балок

Перед выполнением этого этапа задания повторите метод сечений, который изучался в курсе сопротивления материалов, дифференциальные зависимости, связывающие внутренние силовые факторы с нагрузкой, и проверки эпюр (характер линий, скачки, переломы, проверка эпюры изгибающих моментов по площадям эпюры поперечных сил) [1, 2, 3].

Ошибок будет меньше, если при вычислении внутренних силовых факторов будете рассматривать удобную отсеченную часть.

Изобразим схему заданной балки в расчлененном виде с нагрузками, действующими на каждый элемент, опорными реакциями и усилиями взаимодействия между элементами (рис. 2.3).

Для определения опорных реакций и усилий взаимодействия между элементами рассмотрим равновесие каждого элемента, начиная с самого второстепенного, т.е. самого верхнего на поэтажной схеме.

1. Балка FG. В этом и последующих расчетах будем считать задачу выполненной, если будут построены эпюры Q и M. Это стандартная балка на двух опорах, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой (рис. 2.4, а).

а) Находим реакции опор:

$$\begin{aligned} \sum \text{mom F} = 0; & \quad Y_G \cdot 4l - q \cdot 4l \cdot 2l = 0; & \quad \text{откуда: } Y_G = 2ql; \\ \sum \text{mom G} = 0; & \quad Y_F \cdot 4l - q \cdot 4l \cdot 2l = 0; & \quad \text{откуда: } Y_F = 2ql; \end{aligned}$$

$$\text{проверка: } \sum Y = 2ql - q \cdot 4l + 2ql = 0.$$

б) строим эпюры Q и M (рис. 2.4, б, в); согласно дифференциальным зависимостям поперечная сила Q изменяется по линейному закону, так как балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой; знакопеременна и имеет нулевое значение посередине балки; изгибающий момент M изменяется по закону

квадратной параболы и имеет экстремальное значение посередине пролета балки, т.е. там, где  $Q$  равна нулю:

$$M_{\text{экс}} = 2ql \cdot 2l - q \cdot 2l \cdot l = 2ql^2.$$

Напомним, что эюру  $M$  строим на растянутых волокнах балки и она всегда вогнута по отношению к нагрузке (правило «паруса»).

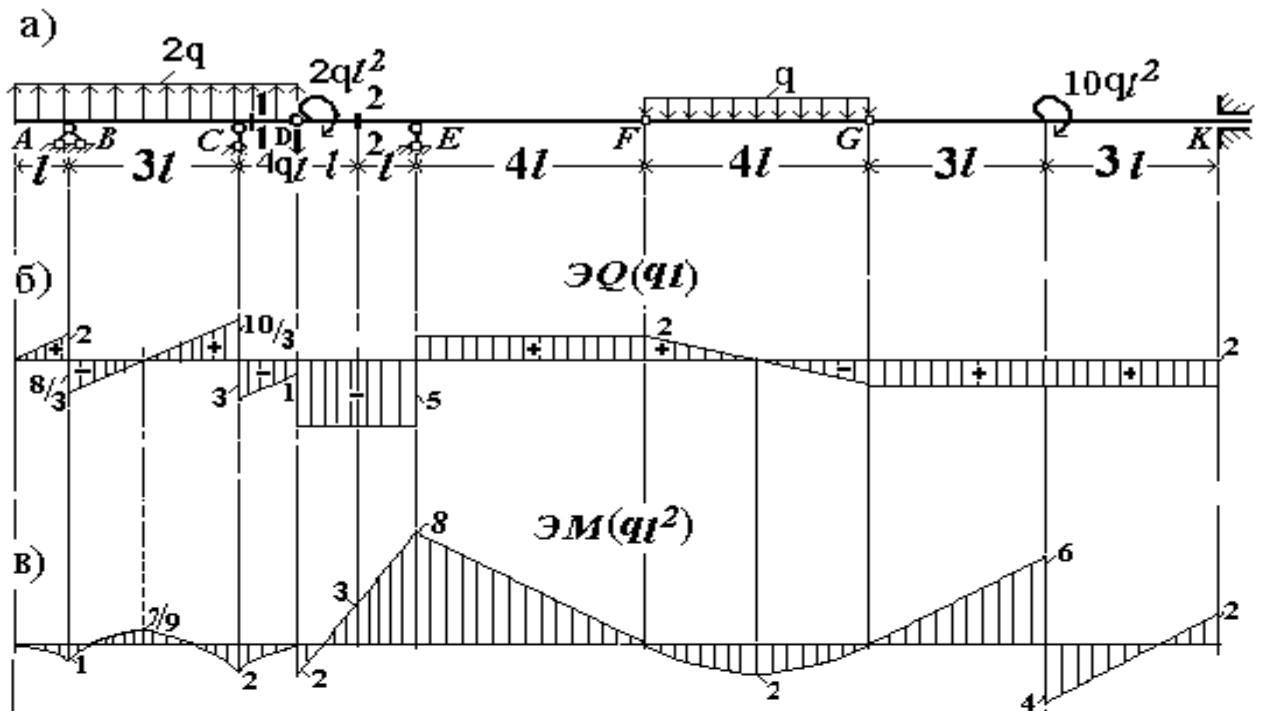


Рис.2.1

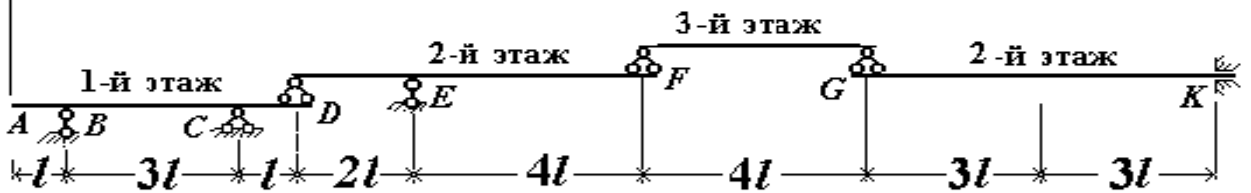


Рис.2.2

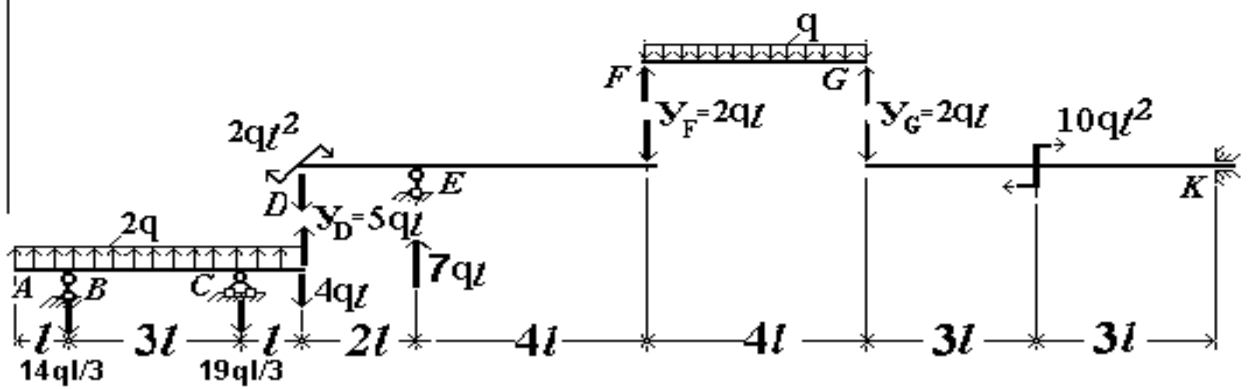


Рис.2.3



## 2. Балка DEF (рис. 2.5, а).

а) Находим реакции опор:

$$\begin{aligned} \sum \text{mom D} = 0; & \quad Y_E \cdot 2l - 2ql \cdot 6l - 2ql^2 = 0; & \text{откуда: } Y_E = 7ql; \\ \sum \text{mom E} = 0; & \quad Y_D \cdot 2l + 2ql \cdot 4l + 2ql^2 = 0; & \text{откуда: } Y_D = -5ql. \end{aligned}$$

Знак «−» означает, что усилие  $Y_D$  направлено в противоположную сторону по сравнению с указанным на рис. 2.5, а. Правильное направление этого усилия и его величина показано на рис. 2.6, а и 2.3.

Проверка:  $\sum Y = 5ql - 7ql + 2ql = 0.$

б) Строим эпюры Q и M (рис. 2.5, б, в); так как на балке нет распределенной нагрузки, то эпюра Q на обоих участках будет постоянной: на участке DE  $-5ql$ , а на участке EF  $+2ql$ . Эпюра M будет линейна. В сечении F изгибающий момент равен нулю, в сечении D  $+2ql^2$ , т.е. растянуты нижние волокна, в сечении над опорой E  $-8ql^2$  (растянутые волокна сверху).

## 3. Балка ABCD (рис. 2.6, а).

Это «главная балка», представляющая собой однопролётную балку с консолями, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $2q$ , сосредоточенной силой  $4ql$ , приложенной в шарнире D и направленной вниз, и вертикальным усилием  $5ql$  взаимодействия между элементами ABCD и DEF, которое на балку ABCD действует вверх.

а) Находим опорные реакции:

$$\begin{aligned} \sum \text{mom B} = Y_C \cdot 3l + 2q \cdot 5l \cdot 1,5l + (5ql - 4ql) \cdot 4l = 0; & \text{откуда: } Y_C = -6,333ql; \\ \sum \text{mom C} = Y_B \cdot 3l + 2q \cdot 5l \cdot 1,5l - (5ql - 4ql) \cdot l = 0; & \text{откуда: } Y_B = -4,667ql. \end{aligned}$$

Знаки «минус» означают, что опорные реакции  $Y_C$  и  $Y_B$  направлены вниз (см. рис. 2.6, а).

Проверка:  $\sum Y = 6,333ql + 4,667ql - 2q \cdot 5l - 5ql + 4ql = 0.$

б) Строим эпюры Q и M (рис. 2.6, б, в). На эпюре Q получается три линейных взаимно параллельных участка. На эпюре M три участка с квадратичными параболами выпуклостью вверх. Под нулевой точкой на эпюре Q найдем экстремальный изгибающий момент. Положение сечения с экстремальным изгибающим моментом определяется из условия (см. рис. 2.6)

$$Q(z) = -4,667ql + 2q(l + z_0) = 0, \text{ откуда } z_0 = 1,333l.$$

$$M_{\text{экс}} = 2q(l + 1,333 \cdot l)^2 / 2 - 4,67ql \cdot 1,333 \cdot l = -0,7778 ql^2.$$

Остальные ординаты получаются легко. Эпюры Q и M показаны на рис. 2.6, б, в.

4. Балка GK (рис. 2.7, а). Это консольная балка, нагруженная на левом конце силой  $2ql$  и сосредоточенным моментом  $10ql^2$  в середине. Она тоже является «главной». В этой балке нет необходимости определять опорные реакции, но при определении усилий в этом случае можно рассматривать лишь левую (свободную от опоры) отсеченную часть. Согласно методу сечений и дифференциальным зависимостям при изгибе получаем: поперечная сила в балке будет постоянна и равна  $-2ql$ , а изгибающий момент изменяется по линейному закону, причем на эпюре M будет скачок на величину момента  $10ql^2$ . В заделке момент равен  $-2ql^2$ . Эпюры Q и M показаны на рис. 2.7, б, в.

Окончательные эпюры Q и M строятся присоединением отдельных эпюр друг к другу. Они показаны под расчетной схемой (рис. 2.1, б, в).

После этого надо еще раз убедиться, что выполняются все проверки эпюр. Характер линий обсуждался при построении эпюр в каждом элементе. Надо подтвердить, что скачки на эпюре  $Q$  имеют место лишь на опорах и в шарнире  $D$ , где приложена сосредоточенная поперечная сила, и равны опорным реакциям и этой силе. Скачки на эпюре  $M$  показаны правее шарнира  $D$  и в середине элемента

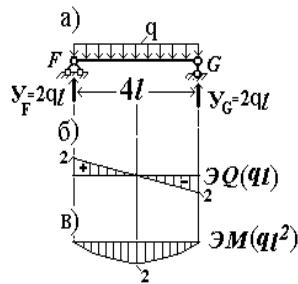


Рис.2.4

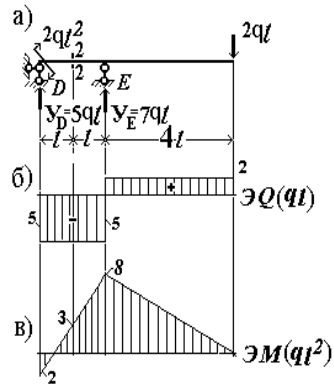


Рис.2.5

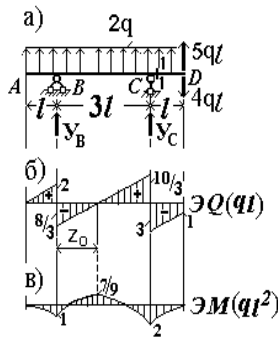


Рис.2.6

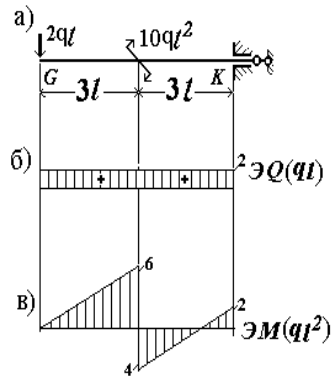


Рис.2.7

ГК, т.е. там, где приложены сосредоточенные моменты, и равны этим моментам. В тех сечениях, в которых на эпюре  $Q$  показан скачок, на эпюре  $M$  имеет место перелом (изменение скачком угла наклона касательной). Если при этом эпюра  $Q$  меняет знак, то на эпюре  $M$  меняет знак угол наклона касательной. И, наконец, надо убедиться, что на каждом участке разность ординат на эпюре  $M$  равна площади эпюры  $Q$ . Например, от опоры  $B$  до экстремального момента в пролете разность равна  $1,778ql^2$  и площадь соответствующего треугольника на эпюре  $Q$  равна  $0,5 \cdot 1,333 \cdot l \cdot 2,67ql = 1,779ql^2$ . Или: от опоры  $C$  до этого же экстремума разность равна  $2,778ql^2$ , а площадь соответствующего треугольника на эпюре  $Q$  равна  $0,5 \cdot 1,667 \cdot l \cdot 3,33ql = 2,777ql^2$ . Как видно, расхождение в пределах точности вычислений.

## 2.2. Построение линий влияния $Q$ и $M$ в сечениях 1–1 и 2–2

Прежде чем строить линии влияния в заданных на балке сечениях, приведем некоторые правила, которые следует соблюдать при построении любых линий влияния в многопролетных балках.

1. Сначала линия влияния строится на элементе, на котором расположено сечение (или опора), как для отдельной балки. Если сечение расположено в пролете балки, то линия влияния строится по одним правилам, если на консоли – то по другим [4, 5, 6].

2. Полученная линия влияния продляется на все балки, являющиеся по отношению к данной «второстепенными», т.е. опирающимися на неё. Это делается по следующему правилу: в шарнире линия влияния претерпевает перелом, проходит через нуль на следующей опоре и продолжается на консоли. При этом другие характерные ординаты линии влияния находятся из подобия треугольников.

3. Если встречаются подряд два шарнира, то в ближайшем к балке шарнире линия влияния получает перелом и заканчивается в другом.

Сечение 1–1 (рис. 2.8, а).

Сечение 1–1 расположено на консоли главной балки. По полученным в теории правилам строим линии влияния  $Q_{1-1}$  (рис. 2.8, б) и  $M_{1-1}$  (рис. 2.8, в) сначала на балке ABCD; затем продолжаем их на балках DEF и FG.

Сечение 2–2 (см. рис. 2.8, а).

Сечение 2–2 расположено в пролете; используя полученные в теории правила, строим сначала линии влияния  $Q_{2-2}$  (рис. 2.8, г) и  $M_{2-2}$  (рис. 2,8, д) на балке DEF; затем продолжаем их только на балке FG (на балке ABCD линия влияния не строится, так как эта балка является главной по отношению к балке DEF и, следовательно, нагрузка с балки ABCD на балку DEF не передается).

### 2.3. Определение внутренних усилий по линиям влияния

По линиям влияния можно вычислять внутренние усилия в заданном сечении бруса как от подвижной, так и от неподвижной нагрузки. Сопоставление результатов определения по линиям влияния внутренних силовых факторов в сечениях 1–1 и 2–2 от заданной неподвижной нагрузки с соответствующими ординатами на эпюрах можно рассматривать как их взаимную проверку.

При определении внутренних усилий для нагрузки применяются следующие правила знаков: сила и распределенная нагрузка считаются положительными, если они направлены вниз; сосредоточенный момент имеет знак плюс, если он действует по ходу часовой стрелки.

Вот как выглядит формула, по которой вычисляются внутренние усилия:

$$S_{n-n} = \sum F_i \cdot y_i + \sum q_j \cdot \omega_j + \sum M_k \cdot \operatorname{tg} \alpha_k, \quad (1)$$

где  $F_i$  – величина сосредоточенной нагрузки;  $y_i$  – ордината на линии влияния под этой нагрузкой;  $q_j$  – интенсивность равномерно распределенной нагрузки;  $\omega_j$  – площадь линии влияния под распределенной нагрузкой;  $M_k$  – величина сосредоточенного момента;  $\operatorname{tg} \alpha_k$  – тангенс угла наклона линии влияния в месте приложения сосредоточенного момента  $M_k$ ; сумма произведений распространяется на все нагрузки, действующие на балку.

В предлагаемом примере:  $q_2 = -2q$ ;  $F = +4ql$ ;  $q_1 = q$ ;  $M_1 = 2ql^2$ ,  $M_2 = 10ql^2$ .

Для заданной нагрузки получаем:

$$Q_{1-1} = (-2q) \cdot 1 \cdot l + (+1) \cdot 4ql + 2ql^2 \cdot (-1/(2 \cdot l)) + q(-1/2 \cdot 2 \cdot 4l) + 10ql^2 \cdot 0 = -3ql;$$

$$M_{1-1} = (-2q)(-1/2 \cdot l \cdot l) + 4ql(-l) + 2ql^2(l/(2 \cdot l)) + q(1/2) \cdot 2l \cdot 4l + 10ql^2 \cdot 0 = +2ql^2;$$

$$Q_{2-2} = (-2q) \cdot 0 + 4ql \cdot 0 + 2ql^2 \cdot (-1/(2 \cdot l)) + q(-1/2) \cdot 2 \cdot 4l + 10ql^2 \cdot 0 = -5ql;$$

$$M_{2-2} = (-2q) \cdot 0 + 4ql \cdot 0 + 2ql^2 \cdot (l/(2 \cdot l)) + q(-1/2) \cdot 2l \cdot 4l + 10ql^2 \cdot 0 = -3ql^2.$$

Нулевые слагаемые можно не записывать.

Значения внутренних усилий, вычисленные по линиям влияния, совпадают с внутренними силовыми факторами, найденными при построении эпюр.

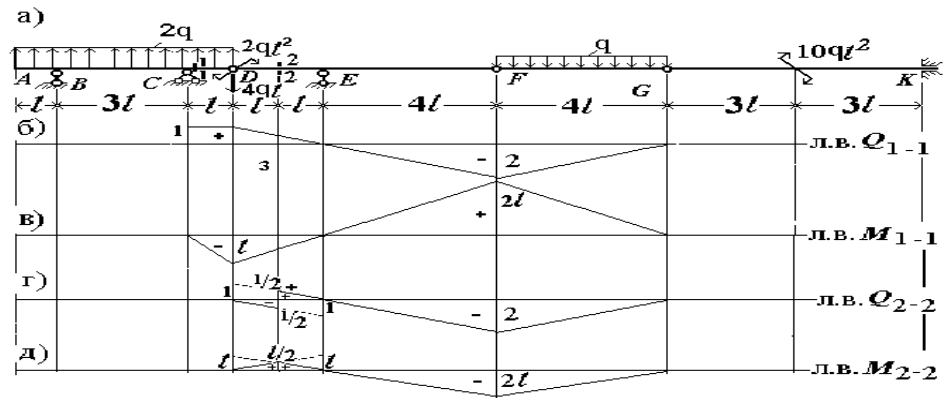


Рис. 2.8

## 2.4. Невыгодное заграждение линий влияния

Если линия влияния имеет полигональный характер, а часть нагрузок может находиться вне её пределов, то для определения наибольшего и наименьшего усилия задача решается методом попыток или перебором. А именно, устанавливают один из грузов, который называют критическим, над наибольшей ординатой линии влияния, располагают в соответствии с привязкой остальные грузы. Этот груз действительно является критическим, если переход его через вершину линии влияния приводит к смене знака производной  $dS_{n-n}/dx = \sum F_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_i$ . При этом положении нагрузки находят искомое усилие. Критических грузов может оказаться несколько. Сравнивая полученные значения усилий, нетрудно установить опасное положение нагрузки и максимальную величину искомого усилия.

Если подвижная нагрузка состоит из небольшого количества грузов, то максимальное искомое усилие можно легко установить простым перебором критических грузов. Ниже показано, как это можно сделать в рассматриваемом примере (рис. 2.9).

А. Линия влияния  $M_{1-1}$  (рис. 2.9, в).

І. Максимальное значение.

1) Попытка 1. Пусть критической будет сила  $F_1 = 5F$ . Тогда (рис. 2.9, г)  
 $M_{1-1} = 5F \cdot 2l = 10Fl$ .

2) Попытка 2. Пусть критической будет сила  $F_2 = 6F$  (рис. 2.9, д). Тогда  
 $M_{1-1} = 5F \cdot (-l) + 6F \cdot 2l + 4F \cdot l = 11Fl$ .

3) Попытка 3. Пусть критической будет сила  $F_3 = 4F$  (рис. 2.9, е). Тогда  $M_{1-1} =$   
 $= 5F \cdot 0 + 6F \cdot l + 4F \cdot 2l = 14Fl$ .

Итак,  $\max M_{1-1} = +14Fl$ .

II. Минимальное значение.

1) Попытка 1. Пусть критической будет сила  $F_1$  (этот случай уже рассмотрен, рис. 2.9, д),  $M_{1-1} = 11Fl$ .

2) Попытка 2. Если критической будет сила  $F_2$  (рис. 2.9, ж), то  $M_{1-1} = 6F \cdot (-l) = -6Fl$ .

3) Попытка 3. Пусть критической будет сила  $F_3$  (рис. 2.9, з). Тогда  $M_{1-1} = 4F \cdot (-l) = -4Fl$ .

Итак,  $\min M_{1-1} = -6Fl$ .

Б. Линия влияния  $M_{2-2}$  (рис. 2.9, и).

I. Максимальное значение.

1) Нетрудно увидеть, что наибольший положительный момент  $M_{2-2}$  возникает, когда над вершиной  $+(1/2) \cdot l$  будет находиться сила  $F_3$ .

Имеем:  $\max M_{2-2} = 4F \cdot 0,5l = 2Fl$  (рис. 2.9, к).

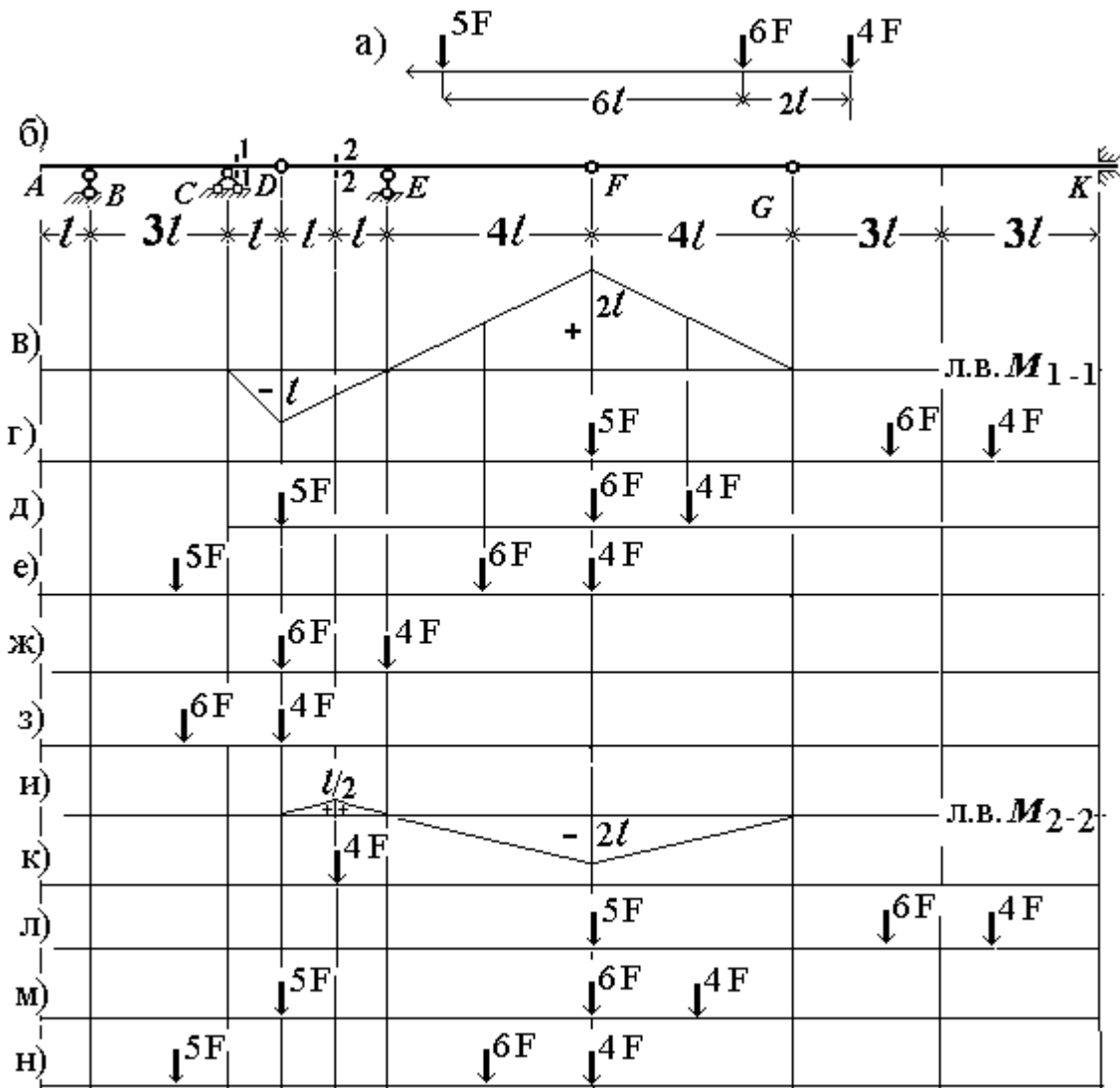


Рис.2.9

II. Минимальное значение.

1) Попытка 1. Пусть критической будет сила  $F_1$  (рис. 2.9, л). Тогда  $M_{2-2} = 5F \cdot (-2l) = -10Fl$ .

2) Попытка 2. Если критической будет сила  $F_2$  (рис. 2.9, м), то  $M_{2-2} = 6F \cdot (-2l) + 4F \cdot (-l) = -16Fl$ .

3) Пусть критической будет сила  $F_3$  (рис. 2.9, н). Тогда  $M_{2-2} = 5F \cdot 0 + 6F \cdot (-l) + 4F \cdot (-2l) = -14Fl$ . Итак,  $\min M_{2-2} = -16Fl$ .

### 3. РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ

#### 3.1. Основные положения и пояснения к расчету

Ферма – это стержневая система, которая остается неизменяемой, если все ее узлы считать шарнирными. Места соединения стержней называют узлами. Предполагается также, что внешняя нагрузка прикладывается только в узлах в виде сосредоточенных сил. При такой нагрузке в стержнях фермы возникают только продольные силы  $N_i$ , для которых остается правило знаков, принятое в сопротивлении материалов. Напомним его: продольное усилие считается положительным, если оно направлено от сечения, т.е. вызывает растяжение стержня.

В случае подвижной нагрузки предполагается наличие на ферме дополнительных элементов, например, в виде второстепенных балок под настил или плит перекрытия, опирающихся на узлы фермы, т.е. передающих нагрузку в узлы фермы (так называемая «узловая передача нагрузки»).

Для определения усилий в стержнях ферм используется, как и во всех других случаях, метод сечений. Применительно к фермам можно выделить три основных разновидности этого метода [4, 5, 6].

1. Способ вырезания узлов. Используется, в основном, в частных случаях равновесия узлов.

2. Способ проекций. Используется для определения усилий в элементах решетки ферм с параллельными поясами.

3. Способ моментной точки. Используется в тех случаях, когда линии действия усилий во всех разрезанных стержнях, кроме одного (определяемого), пересекаются в одной точке.

Выделение узлов или частей фермы нужно производить так, чтобы усилия в элементах фермы определялись бы наиболее просто, по возможности с помощью одного уравнения с одним неизвестным, чтобы избежать решения системы уравнений.

#### 3.2. Пример расчета

Для изображенной на рис. 3.1 фермы, требуется:

1) произвести кинематический анализ;

- 2) определить аналитически усилия в перечеркнутых стержнях;
- 3) построить линии влияния для этих же стержней;
- 4) вычислить в перечеркнутых стержнях усилия по линиям влияния;
- 5) сравнить полученные результаты с аналитическим расчетом.

В контрольной работе при её оформлении должны быть представлены:

- 1) условие задачи; данные выпишите из таблицы 2 [7] согласно варианту;
- 2) расчетная схема с указанием всех буквенных и числовых значений;

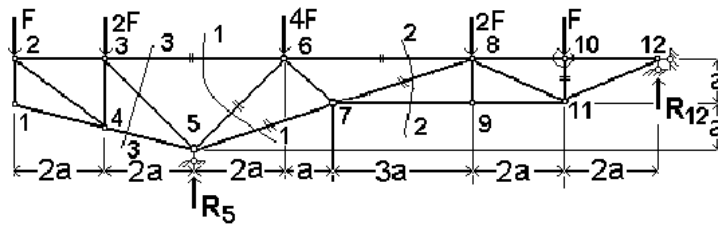


Рис. 3.1

- 3) кинематический анализ;
- 4) определение опорных реакций;
- 5) схемы отсеченных частей фермы и узлы, нужные для определения усилий;
- 6) все вычисления, связанные с аналитическим расчетом;
- 7) линии влияния усилий в перечеркнутых стержнях с пояснениями;
- 8) определение усилий по линиям влияния;
- 9) сравнение результатов, полученных аналитически и по линиям влияния.

### 3.2.1. Кинематический анализ фермы

Как и для любого другого сооружения, расчет фермы начинается с кинематического анализа. Однако подсчет степени свободы в фермах удобнее производить по формуле:

$$W = 2 \cdot U - C - C_0, \quad (2)$$

где  $U$  – количество узлов в ферме;  $C$  – число стержней;  $C_0$  – количество опорных связей. Эта формула имеет преимущество по сравнению с использованной в п.1 параграфа 2.1.1, состоящее в том, что не нужно подсчитывать количество шарниров с учетом их кратности.

Итак, для заданной фермы имеем:

$W = 2 \cdot 13 - 23 - 3 = 26 - 26 = 0$ , т.е. связей достаточно для неизменяемости системы, лишних связей нет.

Структурный анализ. Ферма геометрически неизменяема. Доказательство:

а) элементы (диски) фермы 1–2, 1–4 и 2–4 соединены между собой тремя шарнирами 1, 2 и 4, не лежащими на одной прямой; это диск;

б) к этому диску крепится при помощи двух связей (стержней) 2–3 и 3–4 шарнир 3; это снова диск;

в) далее, аналогично к этому диску последовательно присоединяются друг за другом шарниры 6, 5, 7 и т.д., образуя все новые и новые диски;

г) затем диск-ферма крепится к основанию тремя связями в узлах 5 и 12, не пересекающимися в одной точке.

Итак, заданная ферма статически определима, геометрически неизменяема и неподвижна, т.е. может воспринимать любую нагрузку.

### 3.2.2. Определение усилий в стержнях фермы аналитическим методом

Сначала определяют опорные реакции. При их вычислении составляют три уравнения равновесия для фермы в целом. Из суммы проекций сил на горизонтальную ось видно, что горизонтальная составляющая опорной реакции в узле 12 равна нулю.

Запишем уравнение моментов всех сил относительно опоры (узла) 5:

$$\sum \text{mom}_5 = R_{12} \cdot 10a + F \cdot 4a + 2F \cdot 2a - 4F \cdot 2a - 2F \cdot 6a - F \cdot 8a = 0, \text{ откуда } R_{12} = 2F.$$

Из суммы моментов относительно опоры 12:

$$\sum \text{mom}_{12} = R_5 \cdot 10a - F \cdot 14a - 2F \cdot 12a - 4F \cdot 8a - 2F \cdot 4a - F \cdot 2a = 0, \text{ откуда } R_5 = 8F.$$

Проверка опорных реакций:

$$\sum Y = 8F + 2F - F - 2F - 4F - 2F - F = 0.$$

Как было сказано выше, имеются три аналитических способа вычисления усилий в стержнях фермы. Рассмотрим использование их в данном примере.

#### 1. Способ моментной точки (способ Риттера).

Способ моментной точки является наиболее часто используемым. В самом простом виде этот способ применим к фермам, в которых можно провести сечение только через три стержня. Для определения усилия в нужном стержне ферма разрезается на две части и для одной из частей составляется уравнение моментов всех сил относительно точки, лежащей на пересечении линий действия усилий в тех стержнях, которые из уравнения равновесия надо исключить. Точка, относительно которой составляется уравнение моментов, называется *моментной*.

В рассматриваемом примере способом моментной точки можно найти усилия во всех стержнях фермы за исключением усилий в раскосах и стойках на участке фермы с параллельными поясами.

Определим усилия в 6-ти стержнях фермы (рис. 3.1). Разрезав ферму сечением 1-1, замечаем, что можно вычислить усилия во всех трех стержнях: 3-6, 5-6, 5-7.

Стержень 3-6. Рассмотрим равновесие левой части фермы (рис. 3.2). Замечаем, что для этого стержня имеется моментная точка (узел 5). Составим сумму моментов всех сил относительно этого узла. Получаем:

$$\sum \text{mom}_5 = -F \cdot 4a - 2F \cdot 2a + N_{3-6} \cdot 2a = 0; \text{ тогда } N_{3-6} = +4F.$$

Стержень 5-7. Для этого стержня моментной точкой является узел 6. Составив сумму моментов всех сил относительно этой точки, получаем:

$$\sum \text{mom}_6 = -F \cdot 6a - 2F \cdot 4a + 8F \cdot 2a - N_{5-7} \cdot h_{5-7} = 0.$$

Из геометрии фермы, рассмотрев треугольник 6-8-D, имеем:  $h_{5-7} = 4a \cdot \sin(\alpha)$ . Величину  $\sin(\alpha)$  удобно найти из треугольника 5-K-8: через катеты K-5 и K-8 находим по теореме Пифагора гипотенузу 5-8 (длина ее равна  $(40)^{1/2} = 6,32a$ ), тогда  $\sin(\alpha) = 2:6,32 = 0,316$ . Теперь  $h_{5-7} = 4a \cdot 0,316 = 1,264a$ . Тогда  $N_{5-7} = (16Fa - 14Fa) / 1,264a = 1,582 \cdot F$ .

Стержень 5-6. Для этого стержня моментной точкой будет узел 8. Запишем сумму моментов всех сил относительно этого узла. Получаем:

$$\sum \text{mom}_8 = -F \cdot 10a - 2F \cdot 8a + 8F \cdot 6a + N_{5-6} \cdot h_{5-6} = 0.$$



Из геометрии фермы (треугольник 5–К–6) получаем:  $\operatorname{tg} \beta = 1$ ;  $\beta = 45^\circ$ ;  $\cos \beta = 0,7071$ ;  $h_{5-6} = 4a \cdot \cos \beta = 2,8284a$ . Откуда  $N_{5-6} = (-48Fa + 26Fa) / 2,8284a = -7,778F$ .

Далее, разрезав ферму сечением 2 – 2 и рассмотрев равновесие правой части её, находим усилия в стержнях 6–8 и 7–8 (рис. 3.3).

Стержень 6–8. Для определения усилия в этом стержне используем способ моментной точки. Моментная точка в этом случае совпадает с узлом 7. Получаем:

$$\sum \operatorname{mom}_7 = N_{6-8} \cdot a + 2F \cdot 7a - 2F \cdot 3a - F \cdot 5a = 0, \text{ откуда } N_{6-8} = -3F.$$

Стержень 7–8. Этот стержень является элементом решетки (раскосом) на участке фермы с параллельными поясами. Усилие в нем находится способом проекций. Спроецировав все силы на вертикальную ось, получаем:

$$\sum Y = N_{7-8} \cdot \sin \alpha + 2F + F - 2F = 0.$$

Величина  $\sin \alpha = 0,3162$  была получена выше (см. определение усилия в стержне 5 – 7). Теперь:

$$N_{7-8} = -F / 0,3162 = -3,162F.$$

Стержень 10–11. В этом стержне усилие удобно найти способом вырезания узлов, так как в узле 10 имеет место один из частных случаев. Вырежем этот узел из фермы (рис. 3.4) и спроецируем все силы на ось Y. Получаем:

$$\sum Y = N_{10-11} + F = 0; \text{ тогда } N_{10-11} = -F.$$

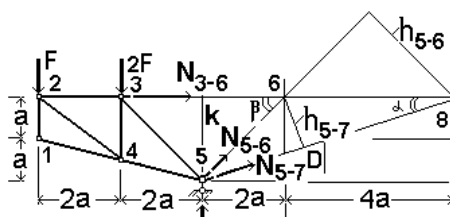


Рис. 3.2

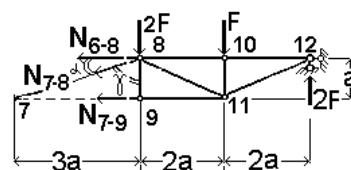


Рис. 3.3

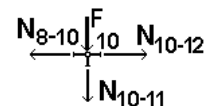


Рис. 3.4

### 3.2.3. Построение линий влияния в заданных стержнях фермы

Рассмотрим в пособии примеры построения линий влияния только в консольно-балочных фермах с раскосной или треугольной решеткой, т.е. в простейших фермах.

Пусть перемещение груза происходит по какому-то одному поясу фермы, как правило, прямолинейному. Пояс, по которому движется единичная сила, называют *грузовым поясом*. При этом груз движется не по стержням пояса, а по некоторым элементам (настилы или плиты перекрытия), передающим давление через опоры только в узлы фермы. Это так называемая *узловая передача* нагрузки.

Участок фермы между соседними узлами называют *панелью* фермы. При узловой передаче нагрузки в пределах рассекаемой панели, как это следует из теории, крайние точки линии влияния соединяются прямой, которая называется *передаточной прямой*. При построении линий влияния для определения усилий в стержнях ферм применяют те же методы, что и при аналитическом определении усилий от неподвижной нагрузки.

Построим линии влияния усилий в некоторых стержнях в ферме, изображенной на рис. 3.5, а.

Линии влияния опорных реакций

Опорные реакции в данном примере это  $R_5$  и  $R_{12}$ , изменяются у фермы при перемещении единичной силы так же, как и в обычной балке с аналогичными размерами пролета и консолей. Эти линии влияния показаны на рис. 3.5, б, в.

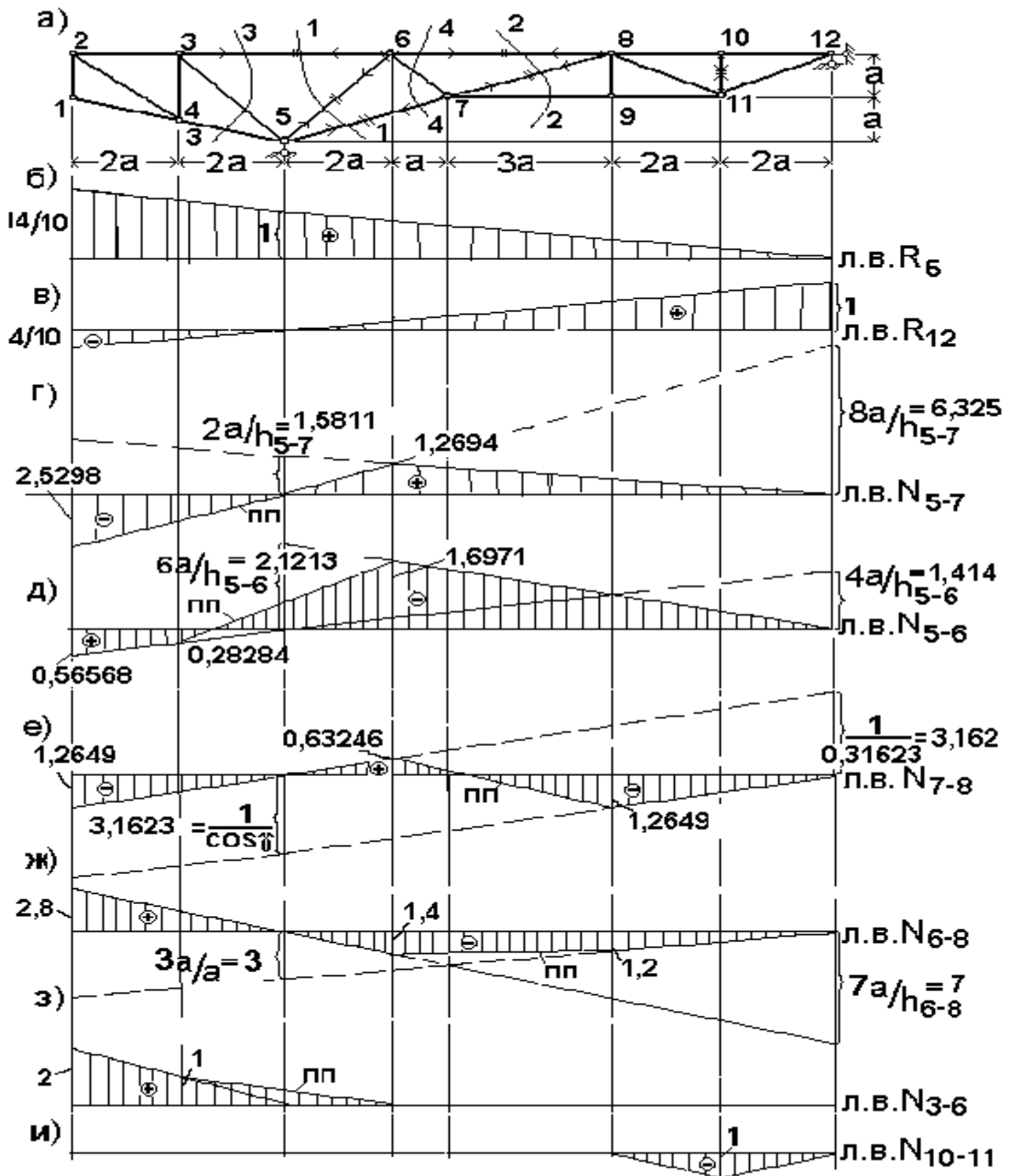


Рис. 3.5

1. Стержень 7-8. Анализ структуры решетки фермы для выбора способа построения линий влияния в её стержнях показывает, что для большинства

стержней линии влияния строятся весьма просто, если рационально использовать метод сечений. Для построения линии влияния усилия  $N_{7-8}$  разрежем ферму сквозным сечением 2–2. Оно рассекает три стержня. Замечаем, что два стержня 6–8 и 7–9 на ось  $Y$  не проецируются, так как они горизонтальны. Поэтому можно составить уравнение с одним неизвестным  $N_{7-8}$ , применив способ проекций.

Составляем уравнение проекций на ось  $Y$ , перпендикулярную к параллельным стержням.

а) пусть единичный груз находится правее рассеченной панели 6–8, но в пролете (при таком положении нагрузки реакции будут направлены вверх); рассмотрим равновесие части фермы, расположенной левее от сечения (рис. 3.6, а); проецируя все силы на ось  $Y$ , получаем:

$$\sum Y = N_{7-8} \cdot \cos \gamma + R_5 = 0, \text{ откуда } N_{7-8} = -R_5 / \cos \gamma,$$

т.е. при движении груза правее панели 6–8 усилие  $N_{7-8}$  равно реакции  $R_5$ ,

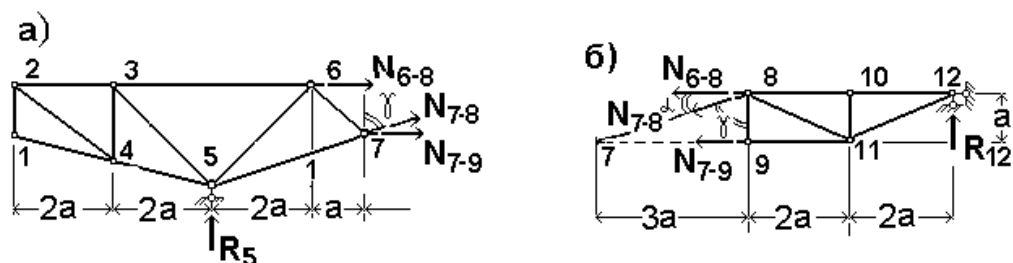


Рис.3.6

умноженной на  $1/\cos \gamma$  (см. рис. 3.5, е). При определении усилия в этом стержне от нагрузки мы вычислили, что  $\cos \gamma = \sin \alpha = 0,3162$ . Так строится левая ветвь линии влияния  $N_{7-8}$ .

б) если груз будет располагаться левее рассеченной панели 6–8, то, составляя аналогичное уравнение, но теперь уже для правой части фермы, получаем (рис. 3.6, б)

$$\sum Y = -N_{7-8} \cdot \cos \gamma + R_{12} = 0, \text{ тогда } N_{7-8} = R_{12} / \cos \gamma.$$

Из этого уравнения следует, что для построения правой ветви линии влияния  $N_{7-8}$  (см. рис. 3.5, е) нужно построить линию влияния реакции  $R_{12}$ , умножив её ординаты на  $-1/\cos \gamma$ .

Здесь существенно заметить, что построенные ветви должны быть параллельны. Левая ветвь этой линии влияния действительна только до границы рассеченной панели левее (до узла 6), правая – правее границы панели 6–8 (до узла 8). Ординаты левой ветви (для наглядности заштриховываем до узла 6, а правой ветви – до узла 8). После этого достраиваем последний участок линии влияния – в пределах рассеченной панели. Это передаточная прямая. Она соединяет крайнюю ординату левой ветви с крайней ординатой правой ветви в пределах рассеченной панели.

При перемещении нагрузки по низу фермы на ветви нужно сносить узлы 7 и 9.

Здесь надо запомнить, что некоторые этапы (позиции) построения линий влияния являются общими для всех линий влияния не зависимо от того, какой

способ применяется при их построении. Это касается позиций, следующих за построением ветвей линий влияния. Об этом подробно сказано несколько ниже.

Примечание. Если угол между вертикалью и осью стержня (угол  $\gamma$ ) будет равен нулю, что характерно для стоек фермы, то  $\cos \gamma$  будет равен 1 и, следовательно, над (под) опорами нужно будет откладывать ординаты, равные 1.

## 2. Линии влияния усилий в стержнях 5–6 и 5–7.

Проведем сечение 1–1. Оно рассекает три стержня. В данном случае для определения любого из усилий можно составить одно уравнение с одним неизвестным.

2.1. Стержень (элемент фермы) 5–7 (см. рис. 3.5, а); для определения усилия в этом стержне нужно составить одно уравнение; это будет уравнение моментов всех сил относительно узла 6 (*моментная точка* для вычисления усилия  $N_{5-7}$ ), в которой пересекаются два других стержня 3–6 и 5–6, так как усилия в этих стержнях из уравнения нужно исключить. Запишем уравнение для двух положений единичной силы, когда сила расположена левее и правее рассеченной панели грузового пояса. Это позволяет построить *левую* и *правую ветви* линии влияния усилия  $N_{5-7}$ , выразив его через реакции опор.

а) пусть сила  $F = 1$  находится левее рассеченной панели 3–6 (левее узла 3). Составим указанное уравнение моментов для правой части фермы, так как на эту часть действует только одна внешняя сила, а именно – реакция  $R_{12}$ . Она (при расположении нагрузки в пролете фермы) направлена вверх (рис. 3.7, б).

$$\sum \text{mom}_6 = N_{5-7} \cdot h_{5-7} - R_{12} \cdot 8a = 0, \text{ тогда } N_{5-7} = R_{12} \cdot 8a/h_{5-7}$$

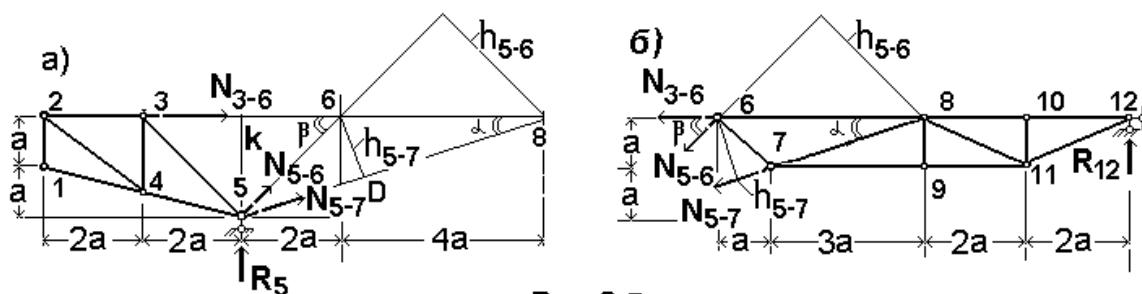


Рис.3.7

При движении силы левее рассеченной панели 3–6 (левее узла 3) усилие  $N_{5-7}$  изменяется пропорционально реакции  $R_{12}$  и для построения линии влияния  $N_{5-7}$  нужно построить линию влияния  $R_{12}$ , умножив её ординаты на  $8a/h_{5-7}$  (рис. 3.5, г), где  $8a$  – расстояние от правой опоры до моментной точки;  $h_{5-7}$  – плечо (оно уже было вычислено при расчете фермы на неподвижную нагрузку и равно  $2,265a$ ).

Так строится левая ветвь линии влияния  $N_{5-7}$  (см. рис. 3.5, г).

б) если груз расположен правее рассеченной панели (узла 6) (рис. 3.7, а), то составив аналогичное уравнение, но теперь для левой от сечения части фермы (при расположении нагрузки в пролете реакция  $R_5$  направлена вверх), получаем

$$\sum \text{mom}_6 = N_{5-7} \cdot h_{5-7} - R_5 \cdot 2a = 0, \text{ откуда } N_{5-7} = R_5 \cdot 2a/h_{5-7},$$

где  $2a$  – расстояние от правой опоры до моментной точки.

На основании этого уравнения получаем *правую ветвь* линии влияния (рис. 3.5, г); для её построения нужно построить линию влияния реакции  $R_5$  и умножить её ординаты на коэффициент  $2a/h_{5-7}$ .

в) левая и правая ветви имеют *протяженность* (действительны) *только* до соответствующей границы рассеченной панели грузового пояса. Ординаты левой ветви справедливы до левого узла (узла 3); ординаты правой ветви действительны до правого узла (узла 6).

г) после этого достраиваем последний участок линии влияния, а именно: в пределах рассеченной панели. На этом участке соединяем прямой линией крайнюю ординату левой ветви с крайней ординатой правой ветви. Так строится передаточная прямая. В данном случае передаточная прямая сливается с продолжением левой ветви. Если бы нагрузка перемещалась по нижнему поясу, то на ветви нужно было бы сносить узлы 5 и 7. Линия влияния тогда имеет несколько другой вид (срезается вершина линии влияния под узлом 6). Стержень, у которого линии влияния при перемещении нагрузки по верху и по низу фермы различны, при построении линий влияния в *шпренгельных* фермах относят к стержням так называемой *четвертой категории*.

д) остальные ординаты линии влияния находятся из подобия треугольников.

При использовании способа моментной точки левая и правая ветви линии влияния *всегда* пересекаются под моментной точкой. Это обстоятельство можно использовать для упрощения построения линии влияния. Достаточно составить уравнение для одной ветви линии влияния. Другая ветвь проходит через нулевую ординату под следующей опорой и проекцию моментной точки на построенную ветвь.

Здесь нужно заметить, что пункты в) – д), *описанные выше*, являются общими при построении *любой* линии влияния.

Линию влияния усилия в стержне 5–7 можно построить, используя сечение 4–4.

Читателю предлагается самостоятельно построить её. Естественно, она должна совпадать с линией влияния, показанной на рис. 3.5, г. Однако заметим, что в этом случае нужно будет на ветви сносить узлы рассеченной панели 6–8 (левый узел 6 на левую ветвь, а правый узел 8 на правую ветвь). Для лучшего усвоения изложенного материала построим ещё одну линию влияния с использованием моментной точки.

## 2.2. Стержень 5–6 (рис. 3.5, д).

Для построения линии влияния в этом стержне воспользуемся тем же сечением. Только теперь нужно составить уравнение моментов относительно узла 8, который является моментной точкой для усилия  $N_{5-6}$ , так как в нём пересекаются два других усилия  $N_{3-6}$  и  $N_{5-7}$ , в которые из уравнения нужно исключить.

Запишем уравнение для двух положений груза, когда он находится левее и правее рассеченной панели.

1. Пусть груз  $F=1$  расположен левее рассеченной панели (панели 3–6, рис. 3.7, б). Запишем уравнение моментов для правой части:

$$\sum m_8 = N_{5-6} \cdot h_{5-6} + R_{12} \cdot 4a = 0, \quad \text{тогда} \quad N_{5-6} = -R_{12} \cdot 4a/h_{5-6}.$$

Здесь  $4a$  – проекция на ось  $X$  расстояния от правой опоры до моментной точки.

Следовательно, при движении груза левее рассеченной панели 3–6 усилие  $N_{5-6}$  изменяется пропорционально реакции  $R_{12}$  и для построения линии влияния  $N_{5-6}$  надо построить линию влияния  $R_{12}$ , умножив её ординаты на  $-4a/h_{5-6}$  (рис. 3.5, д).

Для заданной фермы (из её геометрии) мы уже вычислили, что  $h_{5-6} = 2,828a$ . Так строится левая ветвь линии влияния  $N_{5-6}$ .

2. Если груз расположен правее от панели 3–6, то составив аналогично уравнение, но уже для левой части фермы (рис. 3.7, а), получаем:

$$\sum \text{mom}_8 = N_{5-6} \cdot h_{5-6} + R_5 \cdot 6a = 0, \quad N_{5-6} = -R_5 \cdot 6a / h_{5-6}.$$

Здесь  $6a$  – проекция на ось  $X$  расстояния от левой опоры до моментной точки.

На основании этого уравнения строим правую ветвь линии влияния (см. рис. 3.5, д). Напоминаем, что обе ветви действительны только до соответствующего узла панели: левая до узла 3, правая до узла 6. После этого достраиваем участок линии влияния в пределах пересеченной панели, т.е. строим передаточную прямую (п.п.). Она соединяет крайнюю ординату левой ветви с крайней ординатой правой ветви (см. рис. 3.5, д) и не совпадает ни с одной из ветвей линии влияния.

Если бы нагрузка двигалась по нижнему поясу, то на ветви линии влияния надо было бы сносить узлы 5 и 7. Линия влияния тогда имела бы другой вид.

Замечания. 1) Если моментная точка стержня находится в пределах пролета фермы, то ординаты ветвей линии влияния на опорах откладываются по *одну сторону* от нулевой (базовой) линии. 2) Если моментная точка находится за пределами пролета фермы (при рассечении её в пределах пролета), то ординаты ветвей линии влияния на опорах откладываются в *разные стороны* от нулевой (базовой) линии.

3. Стержень 10 – 11 (рис. 3.5, и). При построении линии влияния в этом стержне воспользуемся способом вырезания узлов. Это одиночный стержень-стойка. Вырезаем узел 10 замкнутым сечением, которое разрезает четвертую и пятую панели грузового пояса. Как и ранее, рассмотрим два положения груза:

1) Груз  $F=1$  (рис. 3.8, а) находится в узле 10. Проецируя все силы на ось  $Y$ , из условия равновесия вырезанного узла находим  $N_{10-11}$ :  $\sum Y = -1 - N_{10-11} = 0$ , откуда  $N_{10-11} = -1$ .

2) Груз  $F = 1$  находится вне узла 10 (рис. 3.8, б). Проецируя все силы на ось  $Y$ , получаем:  $\sum Y = -N_{10-11} = 0$ , т.е. линия влияния в этом случае будет нулевой.

На базисной прямой откладываем под узлом 10 ординату, равную  $-1$ , и, соединив её вершину двумя передаточными прямыми с нулевыми ординатами под узлами 8 и 12, получим линию влияния  $N_{10-11}$ .

Рассмотрим построение линий влияния для стержней, расположенных на консоли.

4. Стержень 3–6 (рис. 3.5, з). Заметим, что линию влияния для стержня 3–6 можно построить различными путями; например, можно использовать сечение 1–1, можно с помощью сечения 3–3. Построим линию влияния усилия  $N_{3-6}$ , полагая, что стержень расположен на консоли (линию влияния в этом стержне с использованием сечения 1–1 читателю предлагается построить самостоятельно).

Рассечем ферму сквозным сечением 3–3. Разрезаем три стержня. Для стержня 3–6 имеется моментная точка; это узел 5, где пересекаются два других стержня. Это левая опора фермы.

При расположении груза правее рассеченной панели (рис. 3.9, а), составляя

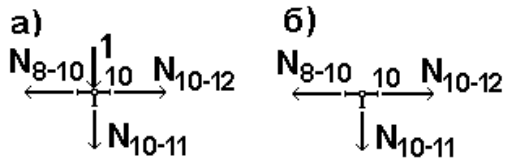


Рис.3.8

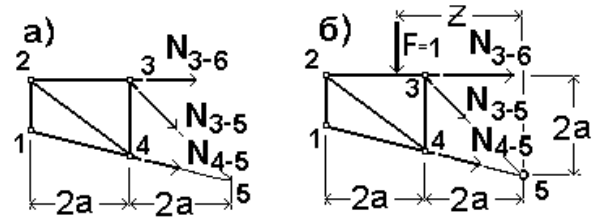


Рис.3.9

уравнение моментов относительно узла 5 для левой части фермы:  $\sum \text{mom}_5 = N_{3-6} \cdot h_{3-6} = 0$ , находим, что усилие  $N_{3-6} = 0$ , так как эта часть фермы не нагружена; т.е. правая ветвь линии влияния усилия  $N_{3-6}$  нулевая.

Если груз будет располагаться левее рассеченной панели (узла 3, рис. 3.9, б), то, составив уравнение равновесия левой части фермы, получаем следующее равенство:  $\sum \text{mom}_5 = N_{3-6} \cdot 2a - 1 \cdot z = 0$ , где  $z$  – расстояние от моментной точки 5 до места расположения единичного груза. Откуда  $N_{3-6} = 1 \cdot z / 2a$ . Это левая ветвь линии влияния.

Для её построения достаточно найти две ординаты. Например, при  $z = 2a$   $N_{3-6} = 2a / 2a = 1$  и при  $z = 4a$   $N_{3-6} = 4a / 2a = 2$ . После построения ветвей достраиваем линию влияния по шаблону: на левую ветвь сносим левый узел пересеченной панели (узел 3); на правую ветвь – правый узел (узел 6); левая ветвь действительна левее узла 3, правая – правее узла 6;

Примечание. Если бы груз двигался по нижнему поясу фермы, то на ветви линии влияния нужно было бы сносить узлы 4 и 5 соответственно. В этом случае линия влияния выглядит несколько по-другому, т.е. так, как показано на рис. 3.5, з пунктиром. В таких случаях говорят, что линия влияния усилия имеет разный вид при перемещении нагрузки по верху и по низу.

5. Стержень 6–8 (рис. 3.5, ж). Линию влияния усилия в стержне 6–8 можно построить, используя не только сечение 2–2, но и сечение 4–4. В обоих случаях на ветви при движении нагрузки по верхнему поясу нужно будет сносить узлы 6 и 8. Читателю предлагается самостоятельно построить эту линию влияния. Только ещё раз напомним, если бы единичная нагрузка перемещалась по нижнему поясу фермы, то на ветви нужно было бы сносить: для сечения 2–2 узлы 7 и 9, а для сечения 4–4 узлы 5 и 7. При этом линии влияния получаются одинаковые.

### 3.2.4. Определение усилий по линиям влияния в стержнях фермы

При вычислении продольных усилий в стержнях фермы с помощью линий влияния используют только первое слагаемое в формуле (1), поскольку на ферму действуют только нагрузка в виде сосредоточенных сил. Применительно к рассматриваемой в пособии ферме получаем:

$$R_5 = F \cdot (1 \cdot 14/10 + 2 \cdot 12/10 + 4 \cdot 8/10 + 2 \cdot 4/10 + 1 \cdot 2/10) = 8F;$$

$$R_{12} = F \cdot (-1 \cdot 4/10 - 2 \cdot 2/10 + 4 \cdot 2/10 + 2 \cdot 6/10 + 1 \cdot 8/10) = 2F;$$

$$N_{5-7} = F \cdot (-2,5298) \cdot (1 \cdot 1 + 2 \cdot 1/2) + F \cdot 1,2649 \cdot (4 \cdot 1 + 2 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/4) = + 1,582F;$$

$$N_{5-6} = F \cdot 0,56568 \cdot (1 \cdot 1 + 2 \cdot 1/2) + F \cdot (-1,6971) \cdot (4 \cdot 1 + 2 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/4) = - 7,778F;$$

$$N_{7-8} = F \cdot (-1,2649) \cdot (1 \cdot 1 + 2 \cdot 1/2) + 4F \cdot 0,63246 + F \cdot (-1,2649) \cdot (2 \cdot 1 + 1 \cdot 1/2) = - 3,162F;$$

$$N_{6-8} = F \cdot 2,8 \cdot (1 \cdot 1 + 2 \cdot 1/2) + 4F \cdot (-1,4) + F \cdot (-1,2) \cdot (2 \cdot 1 + 1 \cdot 1/2) = - 3,0F;$$

$$N_{3-6} = F \cdot 2,0 \cdot (1 \cdot 1 + 2 \cdot 1/2) = 4F; \quad N_{10-11} = F \cdot (-1) = - F.$$

## **4. ЭПЮРЫ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В ПЛОСКИХ МНОГОДИСКОВЫХ РАМАХ**

### **4.1. Пояснения к проблеме расчета и методические указания**

Теория расчета плоских статически определимых рам на внешнюю нагрузку рекомендует придерживаться общего подхода [4, 5, 6].

1. Систему необходимо расчленить по шарнирам, изобразить, раздвинув элементы, показать все нагрузки, опорные реакции и усилия взаимодействия в шарнирах. Разъединив по шарниру, соединяющему два элемента, надо показать усилие взаимодействия, неизвестное по величине и направлению. Это удобнее сделать, разложив его на горизонтальную и вертикальную составляющие. Если шарнир кратный, то сначала надо указать усилия взаимодействия между двумя элементами, а затем между получившейся системой и каждым следующим элементом.

2. Рассматривая равновесие всей системы в целом или любой её части (один элемент или группа элементов), определяем опорные реакции и усилия взаимодействия в шарнирах. Для любой плоской системы сил можно записать три независимых уравнения равновесия. При этом желательно каждый раз записывать уравнение с одним неизвестным, чтобы не решать систему уравнений. Такая возможность как правило есть, за исключением трехшарнирной рамы с опорами на разном уровне.

Для каждого элемента надо сделать проверки, чтобы убедиться в правильности определения усилий. Не следует включать в уравнение найденное ранее, но не проверенное усилие, так как возможно допущенная ошибка попадет в следующие уравнения.

3. После этого внутренние силовые факторы в сечениях любого элемента определяются методом сечений как в отдельной простой раме. Вероятность ошибок при вычислении внутренних силовых факторов значительно снизится, если каждый раз будет рассматриваться «удобная» отсеченная часть.

В плоских рамах отличными от нуля могут быть три внутренних силовых фактора. Соответственно необходимо строить три эпюры: продольных сил  $N$ , поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  (каждая на своей схеме). Для вычисления усилий используют метод сечений и составляют три уравнения: сумму проекций сил на продольную ось бруса (для определения  $N$ ), сумму проекций на поперечную ось бруса (для определения  $Q$ ) и сумму моментов сил относительно оси, перпендикулярной плоскости рамы и лежащей в рассматриваемом сечении (для определения  $M$ ). Ординаты продольной или поперечной силы откладывают перпендикулярно к оси стержня в любую сторону



от него с указанием знака и заштриховывают перпендикулярно оси эпюры. Ординаты эпюры изгибающих моментов откладывают тоже перпендикулярно к оси бруса, но обязательно со стороны растянутых волокон.

Дифференциальные зависимости, полученные в сопротивлении материалов, имеют место и в рамах; необходимо их соблюдать и использовать при построении эпюр.

Правила знаков для  $N$ ,  $Q$  принимаются как и в сопротивлении материалов. Правило знаков для изгибающего момента аннулируется. В рамках ординаты изгибающих моментов откладываются со стороны растянутых волокон.

Напоминаем, что эпюры  $N$ ,  $Q$  и  $M$  строятся каждая на своей схеме, т.е. нужно изображать три графика.

Вышеизложенный материал проиллюстрируем на конкретном примере.

## 4.2. Пример расчета рамы на внешнюю нагрузку

Для рамы, расчетная схема которой показана на рис. 4.1, требуется:

1. Произвести кинематический анализ.
2. Построить эпюры внутренних силовых факторов  $N$ ,  $Q$  и  $M$ .

В задаче должны быть представлены:

1. Расчетная схема с указанием размеров и нагрузки.
2. Кинематический анализ.
3. Рисунки, уравнения и вычисления, связанные с определением реакций и внутренних усилий.
4. Эпюры внутренних силовых факторов  $N$ ,  $Q$  и  $M$  (они приведены на рис. 4.7).

### 4.2.1. Кинематический анализ рамы

1. Находим степень свободы. Рама состоит из трех дисков  $ACB$ ,  $CD$ ,  $DFE$ , имеет два простых шарнира ( $C$  и  $D$ ) и прикрепена к основанию тремя опорами  $A$ ,  $B$  и  $E$ , которые представляют собой пять кинематических связей. Тогда получаем:  $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 9 - 9 = 0$ , т.е. связей достаточно для получения неизменяемой системы (при расчёте рамы используются только уравнения равновесия).

2. Структурный анализ. Диск (элемент рамы)  $ACB$  неподвижно соединен с землей тремя связями (шарнирно-подвижная опора  $A$  и шарнирно-неподвижная опора  $B$ ), не пересекающимися в одной точке; это геометрически неизменяемая система. Затем диск (элемент  $DFE$ ) крепится к земле двумя связями  $E$  и связью  $CD$  с диском  $ACB$  (в данном случае диск  $CD$  можно представить как связь) и образует неизменяемую систему, так как линия действия усилия в стержне  $CD$  не проходит через опору  $E$ . Итак, рама статически определима и геометрически неизменяема.

### 4.2.2. Определение реакций опор и усилий взаимодействия в шарнирах

Обозначим реакции опор, как показано на рис. 4.2. Замечаем, что ни одну из реакций из рассмотрения условий равновесия всей рамы вычислить не возможно.

Изобразим систему в расчлененном по шарнирам виде (рис. 4.3).

На элемент ACB действуют пять неизвестных усилий, уравнение с одним неизвестным записать не возможно. На элемент DFE действует четыре неизвестных усилия и уравнение с одним неизвестным записать тоже нет возможности. На элемент CD тоже действует четыре неизвестных усилия, но при этом три из них пересекаются в одной точке. Поэтому, записав суммы моментов всех сил, действующих на элемент рамы CD, получаем:

$$\begin{aligned} \sum \text{mom C} &= Y_D \cdot 2a = 0, & Y_D &= 0; \\ \sum \text{mom D} &= Y_C \cdot 2a = 0, & Y_C &= 0. \end{aligned}$$

Обобщая этот случай, делаем вывод, что в прямолинейном элементе рамы, шарнирно опертом по концам и не нагруженном поперечной нагрузкой, возникает

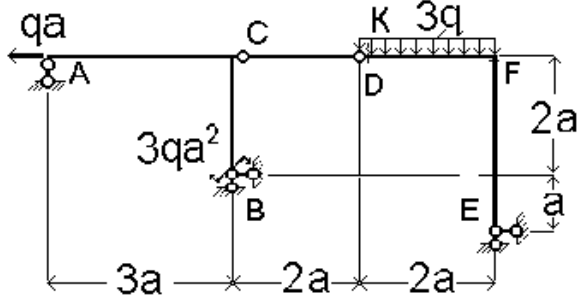


Рис.4.1

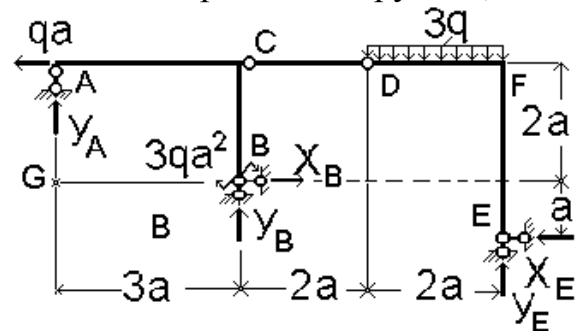


Рис.4.2

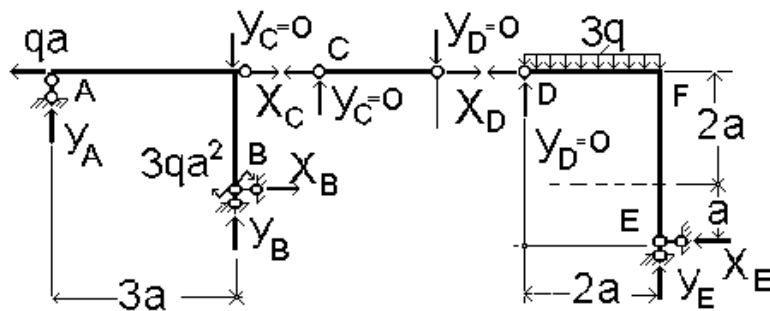


Рис.4.3

только продольное усилие N. Этот факт значительно упрощает ручной расчет рам, чем в дальнейшем мы и воспользуемся.

Горизонтальные усилия  $X_C$  и  $X_D$  из условий равновесия элемента CD найти нельзя.

Теперь на элемент DFE действуют три неизвестных усилия, которые можно найти из трех уравнений равновесия независимо друг от друга.

$$\begin{aligned} \sum \text{mom E} &= X_D \cdot 3a + 3q \cdot 2a \cdot a = 0, & \text{и } X_D &= -2qa; \\ \sum \text{mom F} &= X_E \cdot 3a - 3q \cdot 2a \cdot a = 0, & \text{и } X_E &= 2qa; \\ \sum Y &= Y_E - 3q \cdot 2a = 0; & \text{откуда } Y_E &= 6qa. \end{aligned}$$

Полученные усилия показываем на рис. 4.4. Знак «—» указывает на то, что усилие  $X_D$  направлено не так, как предполагалось. Изменяем на рисунке направление усилия и указываем его величину, опустив знак. Нулевые усилия не показываем.

Проверка найденных усилий (элемент DFE):

$$\sum X = -2qa + 2qa = 0.$$

Из условия равновесия элемента CD находим:

$$\sum X = X_C + 2qa = 0, \quad X_C = -2qa.$$

Покажем это усилие на рис. 4.4. Теперь на элемент ACB действует лишь три неизвестных усилия, которые легко найти:

$$\begin{aligned} \sum \text{mom B} &= Y_A \cdot 3a - qa \cdot 2a - 2qa \cdot 2a + 3qa^2 = 0, \quad \text{тогда} \quad Y_A = qa; \\ \sum \text{mom G} &= Y_B \cdot 3a + qa \cdot 2a + 2qa \cdot 2a - 3qa^2 = 0, \quad \text{тогда} \quad Y_B = -qa; \\ \sum X &= X_B - 2qa = 0, \quad X_B = 3qa. \end{aligned}$$

Чтобы усилие  $Y_B$  найти независимо от двух других, сумму моментов записали относительно вспомогательной точки G, в которой пересекаются линии действия усилий  $Y_A$  и  $X_B$ . Показываем найденные усилия на рис. 4.4 и делаем проверку (элемент ACB):

$$\sum Y = qa - qa = 0.$$

После этого можно переходить к построению эпюр N, Q и M. Из-за ограничения объема пособия из всех участков рамы рассмотрим только два: горизонтальный DF и вертикальный BC.

Участок BC. Рассечем раму по стержню BC и рассмотрим равновесие нижней части рамы (рис. 4.5). Проецируя все силы на ось X, получаем:

$$\sum X = Q_{BC} + 3qa = 0, \quad \text{откуда} \quad Q_{BC} = -3qa.$$

Из проекции всех сил на ось Y имеем:

$$\sum Y = N_{BC} - qa = 0, \quad \text{откуда} \quad N_{BC} = qa.$$

Взяв сумму моментов всех сил относительно оси Z, проходящей через сечение, получаем:

$$\sum \text{mom Z} = M_{BC} + 3qa^2 - 3qa \cdot Y = 0; \quad M_{BC} = -3qa^2 + 3qa \cdot Y.$$

При  $y = 0$   $M_{BC} = -3qa^2$ ; при  $y = 2a$   $M_{BC} = 3qa^2$ .

Видим, что  $N_{BC}$  и  $Q_{BC}$  не зависят от переменной координаты Y, т.е. представляют собой постоянные функции, а изгибающий момент  $M_{BC}$  меняется линейно в зависимости от Y. Теперь строим эпюры N, Q и M на участке BC.

Тестовые проверки. На этом участке нет ни продольной, ни поперечной распределенных нагрузок. Тогда, согласно дифференциальным зависимостям, N и Q должны быть постоянными, а M – изменяться по линейному закону, что и подтверждается расчетами. Разность значений изгибающих моментов на концах участка равна площади эпюры Q на этом участке.

Участок DF. Разрежем раму на участке DF и рассмотрим равновесие левой части рамы (рис. 4.6). Из рисунка видно, что левую часть диска DFE удобнее рассмотреть, чем правую. Проецируя все силы на ось X, получаем:

$$\sum X = N_{DF} + qa = 0, \quad \text{откуда} \quad N_{DF} = -qa.$$

Спроецировав все силы на ось Y, имеем:

$$\sum Y = Q_{DF} + 3q \cdot x = 0, \quad \text{откуда} \quad Q_{DF} = -3qx, \quad \text{линейная функция.}$$

$$\text{При } x = 0 \quad Q_{DF} = 0; \quad \text{при } x = 2a \quad Q_{DF} = -6qa.$$

Сумма моментов сил относительно поперечной оси в сечении дает уравнение

$$\sum \text{mom} = M_{DF} + 3q \cdot x \cdot 0,5x = 0, \quad \text{откуда} \quad M_{DF} = -1,5qx^2 - \text{квадратная парабола.}$$

$$\text{При } x = 2a \quad M_{DF} = -6qa^2; \quad \text{при } x = 0 \quad M_{DF} = 0.$$

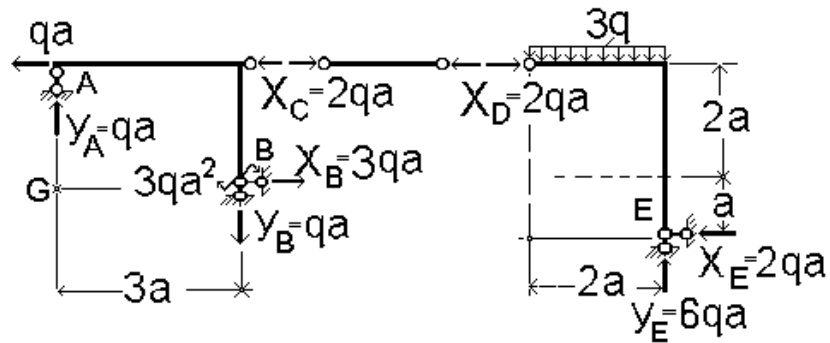


Рис.4.4

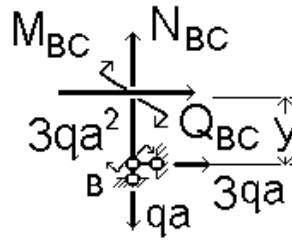


Рис.4.5

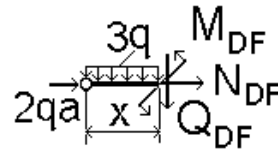


Рис.4.6

Изгибающий момент на этом участке имеет экстремум в сечении, где  $x = 0$  (читатель может в этом убедиться самостоятельно).

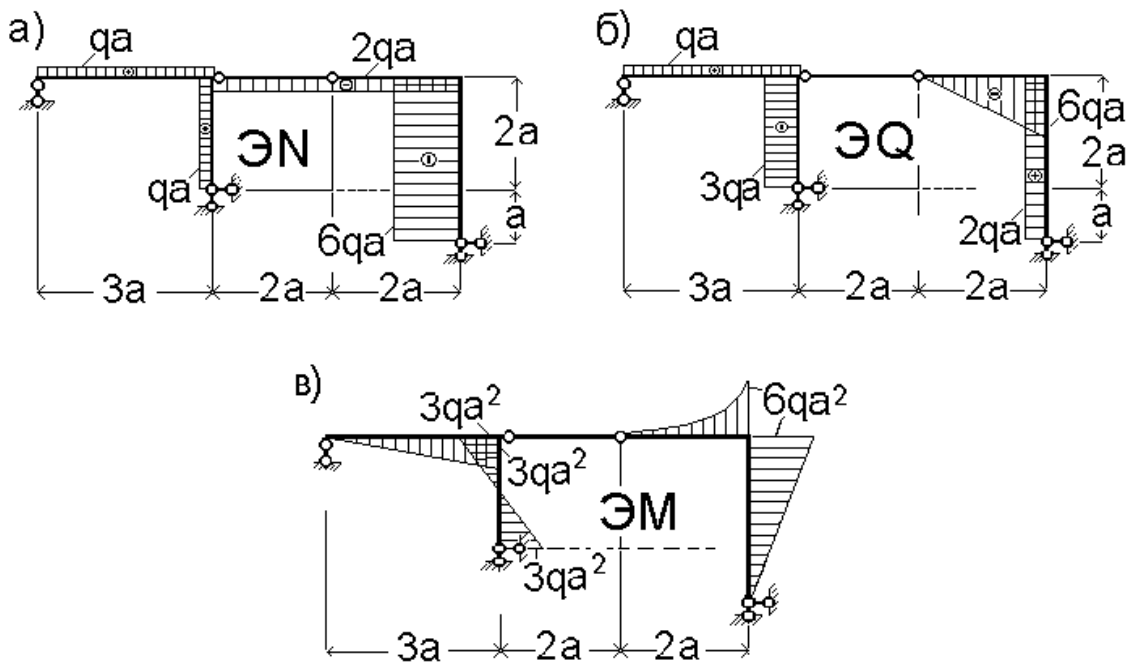


Рис.4.7

Тестовые проверки. Продольная сила  $N$  должна быть постоянной, так как на этом участке продольной погонной нагрузки нет. Поперечная сила  $Q$  должна изменяться по линейному закону, так как на участке имеется равномерно распределенная поперечная нагрузка, а изгибающий момент должен изменяться по закону квадратной параболы. Что и подтверждено расчетами. Разность значений

изгибающих моментов на концах участка равна площади эпюры  $Q$  на этом участке.

Строим эпюры внутренних силовых факторов на участке  $DF$ .

Аналогично определяем внутренние силовые факторы на остальных участках.

Окончательные эпюры  $N$ ,  $Q$  и  $M$  приведены на рис. 4.7, а, б, в.

## **5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ**

### **5.1. Пояснения и методические указания к теме**

Под действием внешней нагрузки и других факторов (изменение температуры, смещения опор, неточности изготовления конструкций) сооружения деформируются. Все или почти все его сечения (точки, узлы) занимают новые положения. Изменение положения любой точки (сечения) называется перемещением. Умение определять перемещения необходимо не только для оценки жесткости сооружений, но и для расчета статически неопределимых систем.

Линейные и угловые перемещения сечений в рамах можно находить различными способами. В пособии рассмотрим один из основных, самый распространенный и простой метод, который заключается в использовании универсальной формулы – интеграла Максвелла – Мора.

Из-за громоздкости вывода формулы приводить его не будем. Однако заметим, что понимание вывода, который можно найти в любом учебнике по строительной механике, очень важно для грамотного использования интеграла Максвелла–Мора.

При определении перемещений нужно рассматривать два состояния стержневой системы: первое – действительное состояние, зависящее от внешнего воздействия, и второе – вспомогательное (фиктивное) под действием единичной силы или момента, приложенных по направлению искомого перемещения.

Для определения взаимного смещения точек или поворота сечений во вспомогательном состоянии необходимо приложить противоположно направленные единичные силы или моменты по направлению искомого перемещения.

### **5.2. Определение перемещений от внешней нагрузки**

При расчете рам на внешнюю нагрузку учитывают только один член интеграла Максвелла – Мора, поскольку для них основным является изгиб, а перемещения от поперечных и продольных сил малы по сравнению с изгибными перемещениями и ими пренебрегают. Итак, для балок и рам определение перемещений, вызванных действием внешней нагрузки, производится с использованием следующего выражения:

$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{M_F \cdot M_i}{EJ_k} ds, \quad (3)$$

в этой формуле:  $M_F$  – аналитическое выражение изгибающего момента в заданной системе от внешней нагрузки в зависимости от продольной координаты сечения  $s$ ;  $M_i$  – аналитическое выражение изгибающего момента во вспомогательном состоянии от обобщенной единичной силы ( $F_i = 1$ ), приложенной в точке  $i$  по направлению искомого перемещения;  $EJ_k$  – изгибная жесткость  $k$ -го участка рамы;  $L_k$  – длина  $k$ -го участка.

Эти интегралы записываются по длине всех участков стержневой системы, на которых одновременно получаются ненулевыми эпюры изгибающих моментов  $M_F$  и  $M_i$ .

Перемещение можно вычислить непосредственным интегрированием. Однако такой путь связан с громоздкими выкладками и не всегда удобен для практического пользования.

Поскольку «единичная» эпюра  $M_i$  в балках и рамах без криволинейных участков бруса всегда линейна и изгибная жесткость в пределах участка постоянна, то для вычисления интеграла Максвелла–Мора можно использовать правило Верещагина или формулу Симпсона. Эти математические приемы в строительной механике называют «способами перемножения эпюр».

Правило Верещагина заключается в том, что интеграл от произведения двух функций, одна из которых любая, а другая линейна, равен площади, ограниченной произвольной функцией, умноженной на ординату линейной функции, взятой под центром тяжести этой площади.

Формулу Симпсона можно использовать, если одна из функций под интегралом не сложнее квадратной параболы, а другая линейна. Тогда интеграл равен сумме произведений левых ординат эпюр, правых ординат и учетверенного произведения средних, умноженной на длину участка и поделенной на 6 (шесть).

Правило Верещагина удобно при перемножении прямоугольных и треугольных эпюр. Формула Симпсона применяется для перемножения более сложных эпюр, типа трапеции на трапецию.

Проиллюстрируем вышеизложенный материал на примере.

Пример 5.1. В изображенной на рис. 4.1 раме определить полное линейное перемещение узла  $C$  и угол поворота сечения  $K$ , если изгибная жесткость горизонтальных стержней –  $2EJ$ , а вертикальных –  $EJ$ .

1. Эпюра изгибающих моментов от нагрузки  $M_F$  показана на рис. 4.7, в.
2. Определение вертикального перемещения узла  $C$ .

Для определения вертикального перемещения узла  $C$  строим эпюру  $M_i$  от единичной силы, приложенной вертикально в этом сечении (рис. 5.1).

Находим реакции опор, усилия взаимодействия и усилие в ригеле  $CD$ .

Для этого рассечем раму по стержню  $CD$  и рассмотрим сначала равновесие правой части рамы (рис. 5.2). На эту часть рамы действуют: две реакции  $X_{E1}$ ,  $Y_{E1}$  и продольное усилие  $N_{CD}^1$  вместо отброшенной левой части (см. замечание на стр. 26). Составив сумму моментов всех сил относительно опоры  $E$ , получаем уравнение

$\sum \text{mom } E = N_{CD}^1 \cdot 3a = 0$ , из которого следует, что  $N_{CD}^1 = 0$ .

Проекция всех сил на ось  $Y$ :  $\sum Y = Y_{E1} = 0$  приводит к тому, что  $Y_{E1} = 0$ .

Из проекции всех сил на ось  $X$ :  $\sum X = X_{E1} = 0$  получаем  $X_{E1} = 0$ .

Теперь рассмотрим равновесие левой части рамы (рис. 5.3). В связях этой части рамы возникают реакции:  $Y_{A1}$ ,  $Y_{B1}$  и  $X_{B1}$ . Сумма моментов всех сил относительно опоры  $B$ :  $\sum \text{mom } B = Y_{A1} \cdot 3a = 0$ , откуда  $Y_{A1} = 0$ .

Сумма проекций всех сил на ось  $X$ :  $\sum X = X_{B1} = 0$ , дает  $X_{B1} = 0$ .

Спроецировав все силы на ось  $Y$ :  $\sum Y = Y_{B1} - 1 = 0$ , откуда  $Y_{B1} = 1$ .

Из этого следует, что при такой единичной нагрузке изгибающих моментов в раме не возникает ( $M_1 \equiv 0$ ). Следовательно, вертикальное перемещение узла  $C$  равно нулю, т.е.  $\Delta_{C,B} = 0$ .

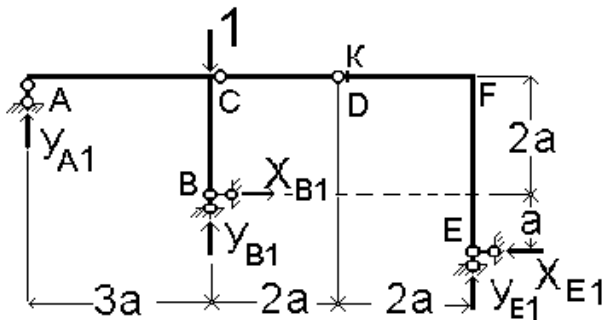


Рис.5.1

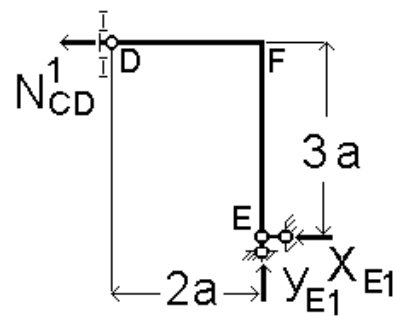


Рис.5.2

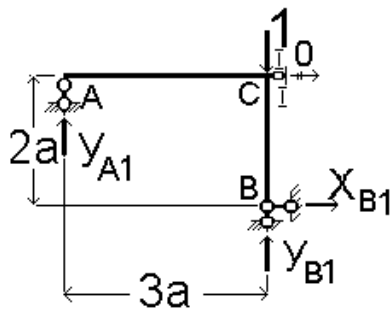


Рис.5.3

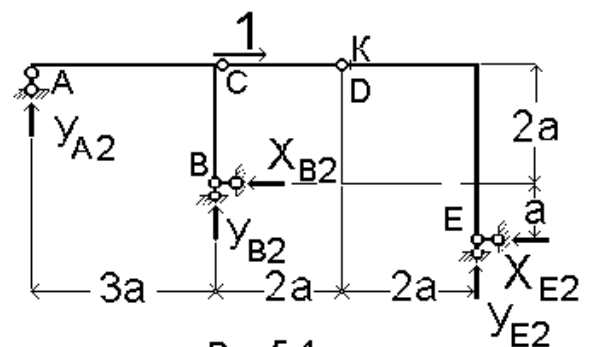


Рис.5.4

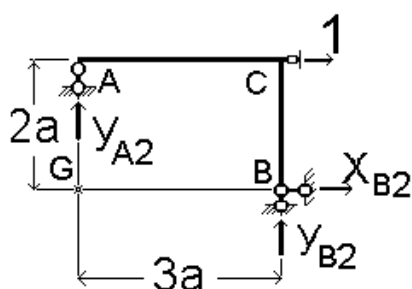


Рис.5.5

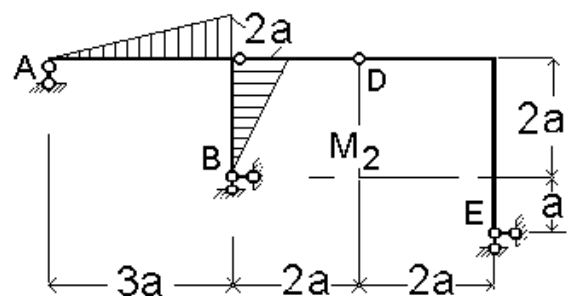


Рис.5.6

3. Определяем горизонтальное перемещение узла  $C$ .

Для определения горизонтального перемещения узла  $C$  строим эпюру  $M_2$  (рис. 5.6) от единичной силы, приложенной в узле  $C$  горизонтально (рис. 5.4). Расчленив раму по стержню  $CD$  и рассмотрев равновесие её правой части (как и

в предыдущем случае (рис. 5.2)) и используя те же уравнения равновесия, приходим к выводу, что реакции  $X_{E2}$ ,  $Y_{E2}$  и усилие  $N_{CD}^2$  равны нулю.

Рассмотрим равновесие левой части рамы (рис. 5.5). Находим реакции опор:  $\text{mom B} = Y_{A2} \cdot 3a + 1 \cdot 2a = 0$ ,  $Y_{A2} = -2/3$ ;  $\sum \text{mom G} = Y_{B2} \cdot 3a - 1 \cdot 2a = 0$ ,  $Y_{B2} = 2/3$ ;  $\sum X = X_{B2} + 1 = 0$ ,  $X_{B2} = -1$ .

Перемножив по правилу Верещагина и формуле Симпсона эпюру  $M_F$  (рис. 4.7, в) на эпюру  $M_2$ , находим:

$$\Delta_{C,F} = \Delta M_F \cdot \Delta M_2 = - (1/2EJ) \cdot 0,5 \cdot 3qa^2 \cdot 3a \cdot (2/3) \cdot 2a + (2a/6EJ)(3qa^2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \cdot a - 3qa^2 \cdot 2a) = -5qa^4/EJ.$$

При этом на каждом участке используем рациональный вариант перемножения.

Знак «минус» в ответе указывает на то, что направление перемещения противоположно единичной нагрузке, т.е. оно произойдет влево. Можно легко убедиться, что размерность ответа соответствует единицам длины.

#### 4. Угол поворота сечения К.

Для вычисления угла поворота сечения К строим эпюру  $M_3$  (рис. 5.9) от единичного момента, приложенного в этом сечении (рис. 5.7).

Изобразим систему в рассеченном по стержню CD виде (рис. 5.8, а, б). Рассмотрим равновесие правой части рамы. Определяем опорные реакции  $Y_{E3}$ ,  $X_{E3}$  и усилие в стержне CD, т.е.  $N_{CD}^3 = X_{D3}$  (рис. 5.8, а).

$$\begin{aligned} \sum \text{mom E} &= X_{D3} \cdot 3a - 1 = 0, & X_{D3} &= 1/(3a); \\ \sum \text{mom F} &= X_{E3} \cdot 3a - 1 = 0, & X_{E3} &= 1/(3a); \\ \sum Y &= Y_{E3} = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим равновесие левой части рамы (рис. 5.8, б), т.е. элемент ACB.

Из уравнения  $\sum X = 1/3a + X_{B3} = 0$ ,  $X_{B3} = -1/3a$ . Из уравнения  $\sum \text{mom B} = Y_{A3} \cdot 3a + (1/3a) \cdot 2a = 0$  следует, что  $Y_{A3} = -2/9a$ . Из уравнения  $\sum \text{mom G} = Y_{B3} \cdot 3a - 1/3 \cdot 2a = 0$  имеем  $Y_{B3} = 2/9a$ .

Теперь строим эпюру  $M_3$  (рис. 5.9). Перемножив эпюры  $M_F$  и  $M_3$  по правилам вычисления интеграла Мора, находим:

$$\varphi_K = \Delta M_F \cdot \Delta M_3 = -1/2EJ \cdot 0,5 \cdot 3qa^2 \cdot 3a \cdot 2/3 \cdot 2/3 + 2a/6EJ(3qa^2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \cdot 1/3 - 3qa^2 \cdot 2 - 1/2EJ \cdot 1/3 \cdot 6qa^2 \cdot 2a \cdot 1 - 1/EJ \cdot 0,5 \cdot 6qa^2 \cdot 3a \cdot 2/3 \cdot 1) = -29/3 \cdot qa^3/EJ \text{ (рад)}.$$

Сечение D поворачивается против хода часовой стрелки, а не по ходу, как направлен единичный момент.

### 5.3. Определение перемещений от осадки опор

Формула для определения перемещений от осадки опор (или неточности изготовления) в стержневых системах легко выводится на основании принципа возможных перемещений. Записав работу сил «единичного» состояния на перемещениях заданного состояния, получаем

$$\Delta_{iC} = - \sum R_j \cdot c_j. \quad (4)$$

В этой формуле:  $\Delta_{iC}$  – искомое перемещение какой-либо точки (сечения) в заданном направлении  $i$ ;  $R_j$  – реакция в  $j$ -й связи, которая возникает от действия единичной нагрузки, приложенной в направлении искомого перемещения;  $c_j$  – заданное смещение  $j$ -й связи (опоры). Чем вызвано это смещение не имеет значения.



Произведение  $R_j \cdot c_j$  положительно, если реакции  $R_j$  и заданное смещение опоры  $c_j$  совпадают по направлению.

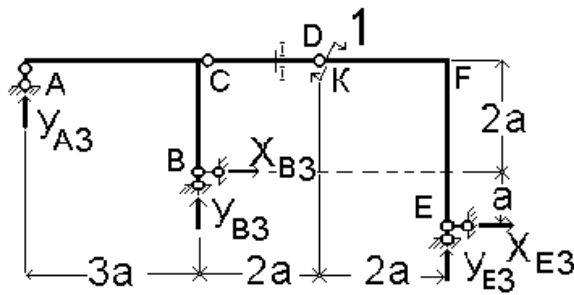


Рис. 5.7

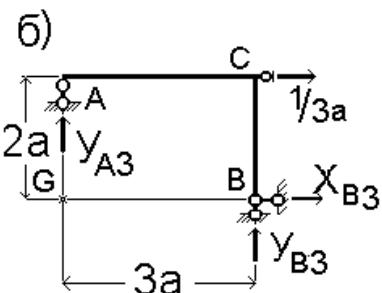
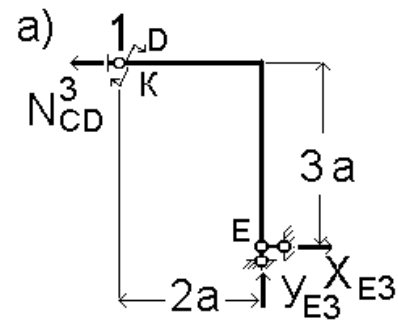


Рис. 5.8

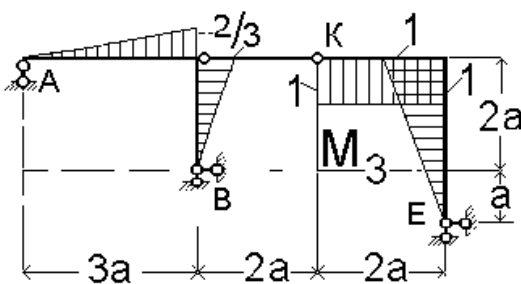


Рис. 5.9

Напомним, что в статически определимых системах смещение опор не вызывает внутренних усилий, т.е. эта задача имеет чисто кинематический характер.

Пример 5.2. В качестве примера рассмотрим раму, изображенную на рис. 4.1. Пусть опоры рамы переместились, как это показано на рис. 5.10, и заняли новое положение. Вычислить полное перемещение узла С и угол поворота сечения К.

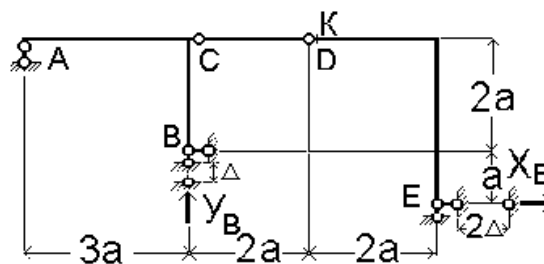


Рис. 5.10

В данном случае направление искомого перемещения узла С заранее неизвестно. Поэтому вычислим отдельно его горизонтальную и вертикальную компоненты, а затем найдем полное перемещение как геометрическую сумму указанных перемещений.

1. Вертикальное перемещение.

Поскольку требуется вычислить перемещения в той же раме и в тех же сечениях, что и в предыдущем примере, то все данные для решения задачи (реакции опор от единичных нагрузок) уже получены и мы ими воспользуемся.

Умножая реакции состояния «1» (рис. 5.1, стр.31) на заданные смещения, если  $X_{E1} = Y_{E1} = X_{B1} = Y_{A1} = 0$ , а  $Y_{B1} = 1$ , получаем:

$$\Delta_{CB} = - \sum R_i \cdot c_i = - (-1 \cdot \Delta + 0 \cdot 2 \cdot \Delta) = \Delta.$$

## 2. Горизонтальное перемещение.

Аналогично, перемножив реакции единичного состояния «2» (рис. 5.4, стр.31) на заданные смещения опор, если  $X_{E2} = Y_{E2} = 0$ ,  $X_{B2} = -1$ ,  $Y_{A2} = -2/3$ ,  $Y_{B2} = 2/3$ , имеем:

$$\Delta_{CF} = - \sum R_i \cdot c_i = - (-2/3 \cdot \Delta + 0 \cdot 2 \cdot \Delta) = 2/3 \cdot \Delta.$$

## 3. Полное перемещение:

$$\Delta_C = (\Delta_{CB}^2 + \Delta_{CF}^2)^{1/2} = \Delta (1^2 + (2/3)^2)^{1/2} = 1,202 \cdot \Delta.$$

## 4. Угол поворота сечения К.

Перемножив реакции единичного состояния «3» (рис. 5.7, стр.33) на заданные смещения опор, если  $Y_{E3} = 0$ ,  $X_{E3} = 1/3a$ ,  $X_{D3} = 1/3a$ ,  $X_{B3} = -1/3a$ ,  $Y_{B3} = -2/9a$ ,  $Y_{A3} = -2/9a$ , получаем:

$$\varphi_D = - \sum R_i \cdot c_i = - (-2/9a) \cdot \Delta + (1/3a) \cdot 2\Delta = - 4 \cdot \Delta / 9a \text{ (рад)}.$$

Поворот сечения произойдет против хода часовой стрелки.

## 5.4. Перемещения от температурного воздействия

Под температурным воздействием понимается влияние изменения температуры стержней конструкций по отношению к начальной, т.е. имевшей место при возведении сооружения. Температурное воздействие в сооружениях тоже вызывает перемещения, не вызывая внутренних усилий в статически определимых системах. Стержни в таких конструкциях не растягиваются (сжимаются) и не изгибаются; однако они удлиняются (укорачиваются) и искривляются. Вследствие этого сечения элементов сооружения поступательно перемещаются (линейные перемещения) и поворачиваются (угловые перемещения).

Будем считать, что по длине участка стержня изменение температуры остается постоянным, а по высоте сечения изменяется по линейному закону. Тогда перемещения от температурного воздействия вычисляются по формуле Максвелла – Мора. Она выглядит так:

$$\Delta_{it} = \sum \alpha \cdot t_0 \cdot \omega_N + \sum \alpha \cdot (\Delta t / h) \cdot \omega_M, \quad (5)$$

где  $\alpha$  – коэффициент температурного расширения материала;  $t_0 = (t_H + t_B) / 2$  – изменение температуры точек оси бруса, если центр тяжести сечения находится на половине высоты сечения стержня;  $\Delta t = |t_H - t_B|$  – разность температур, взятая по модулю;  $t_H$  и  $t_B$  – температура наружных и внутренних (нижних и верхних) волокон бруса;  $h$  – высота поперечного сечения;  $\omega_N$  – площадь эпюры продольных сил на участке стержня;  $\omega_M$  – площадь эпюры изгибающих моментов на участке стержня. Знак суммы в этой формуле распространяется на все стержни, подвергнутые тепловому воздействию.

Знаки слагаемых определяются следующим образом:  $t_0$  и  $N$  берутся со своими знаками; произведение  $(\Delta t/h) \cdot \omega_M$  положительно, если изгибающий момент от единичной нагрузки растягивает на участке бруса те же волокна, которые удлиняются от температурного воздействия, соответствующего  $\Delta t$ .

**Пример 5.3.** Вычислить полное линейное перемещение узла  $C$  и угол поворота сечения  $K$  в раме, изображенной на рис. 4.1, если:  $t_H = -2t$ ;  $t_B = 8t$ ;  $h = 0,1a$ ; (рис. 5.11). Для определения перемещений кроме показанных ранее эпюр изгибающих моментов от соответствующих единичных нагрузок нужно построить эпюры продольных сил. Эти эпюры  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$  показаны на рис. 5.12, а, б, в.

На рисунках 5.13, а и 5.13, б показаны эпюры  $t_0$  и  $\Delta t$ . Для всех стержней (кроме  $AC$ ):  $t_0 = (t_B + t_H)/2 = (8t - 2t)/2 = 3t$ ;  $\Delta t = t_B - t_H = |8t - (-2t)| = 10t$ ; для стержня  $AC$ :  $t_0 = (-2t - 2t)/2 = -2t$ ;  $\Delta t = 2t - (-2t) = 0$ .

В этом примере направление перемещения узла  $C$  тоже неизвестно; поэтому вычислим сначала его составляющие, а затем найдем и полное перемещение.

1. Определяем вертикальное перемещение узла  $C$ . С учетом  $M_1 \equiv 0$  оно равно:

$$\Delta_{Bt} = \alpha \cdot 3t \cdot (-1) \cdot 2a = -6 \cdot \alpha t a.$$

Произведение имеет знак «минус», так как средняя температура стержня «плюс»  $3t$ , а продольное усилие  $N$  (рис. 5.12, а) на этом участке отрицательное.

2. Определяем горизонтальное перемещение узла  $C$ . Оно равно:

$$\Delta_{Гt} = \alpha \cdot 3t \cdot (-2/3) \cdot 2a + \alpha \cdot (0/0,1a) \cdot 2a \cdot 3a/2 + \alpha \cdot (10t \cdot 1/0,1a) \cdot (1/2 \cdot 2a \cdot 2a) = 196 \cdot \alpha t a.$$

Первое слагаемое имеет знак «минус», так как продольная сила на участке  $BC$  эпюры  $N_2$  отрицательна, а  $t_0$  - положительно (рис. 5.12, б и 5.13, а); второе слагаемое равно нулю, так как на этом участке  $\Delta t$  равно нулю; третье слагаемое имеет знак «плюс», так как более нагретые волокна стойки находятся справа.

Полное перемещение узла

$$\Delta_{Ct} = ((\Delta_{Bt})^2 + (\Delta_{Гt})^2)^{1/2} = \alpha t a (6^2 + 196^2)^{1/2} = 196,1 \alpha t a.$$

3. Определяем угол поворота сечения  $K$ . Согласно эпюрам (рис. 5.12, в; 5.13, а; 5.13, б и 5.9)

$$\varphi_{Kt} = \alpha \cdot 3t \cdot (-2/9a) \cdot 2a + \alpha \cdot 3t \cdot (1/3a) \cdot 4a + \alpha \cdot (0/0,1a) \cdot (2/3) \cdot 3a/2 + \alpha \cdot 10t/0,1a \cdot 1/2 \cdot (2/3) \cdot 2a + \alpha \cdot (10t/0,1a) \cdot 1 \cdot 2a + \alpha \cdot (10t/0,1a) \cdot 1/2 \cdot 1 \cdot 3a = 1258 \cdot \alpha t/3 \text{ (рад)} = 419,3 \alpha t.$$

4. Сечение повернется, как и предполагалось, по ходу часовой стрелки.

Первое слагаемое имеет знак «минус», так как положительной температуре  $t_0$  соответствует отрицательное усилие  $N$ ; второе слагаемое имеет знак «плюс», так как при положительном  $t_0$  на участке  $CF$  знак  $N$  положительный.

Остальные слагаемые, связанные с  $\Delta t$ , имеют знак «плюс», так как растянутые волокна единичного состояния  $M_3$  находятся на той же стороне стержня, что и большая температура.

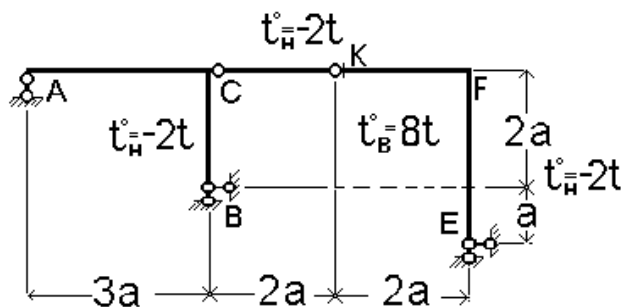


Рис.5.11

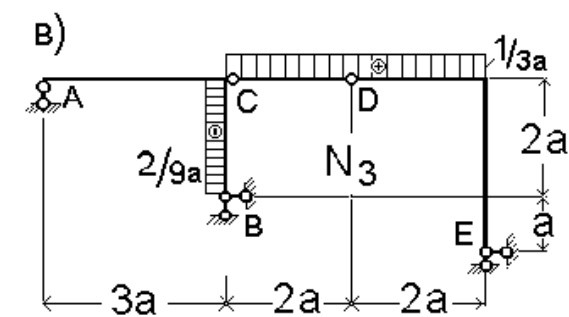
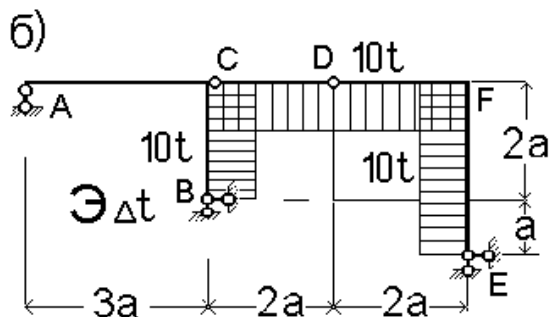
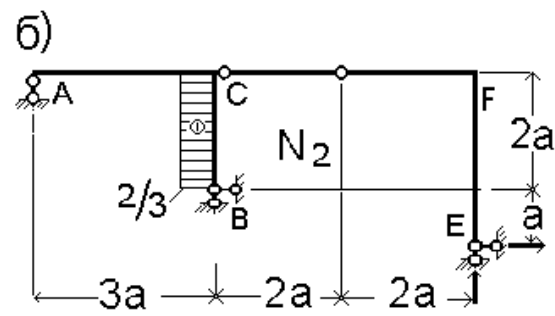
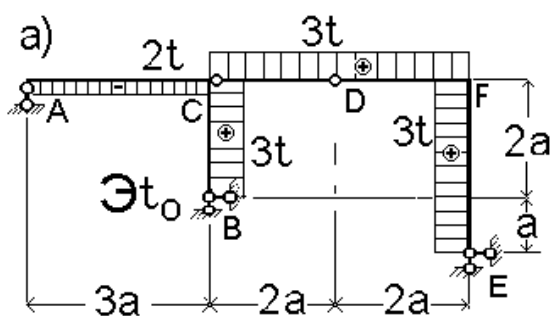
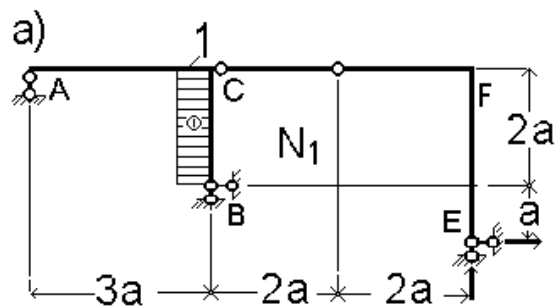


Рис.5.13

Рис.5.12

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров, В.А. Сопротивление материалов: учебник для вузов/ А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. – 2-е изд., испр. – М.: Высшая школа, 2001. – 560 с.
2. Икрин, В.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебное издание/ В.А. Икрин. – М.: Изд-во АСВ, 2005. – 424 с.
3. Икрин, В.А. Эпюры внутренних силовых факторов: учебное пособие для самостоятельной работы / В.А. Икрин, В.Н. Широков. – Челябинск, ЧПИ, 1988. – 69 с.
4. Дарков, А.В. Строительная механика: учебник для вузов строительных специальностей / В.А. Дарков, Н.Н. Шапошников. – 9-е изд., перер. и доп. – М.: Изд-во АСВ, 2006. – 608 с.

5. Розин, Л.А. Расчет статически определимых стержневых систем: учебное пособие / Л.А. Розин, И.А. Константинов, В.А. Смелов. – Л.: Изд-во Лен. ун-та, 1983. – 228 с.

6. Анохин, Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Часть I. Статически определимые системы: учебное пособие / Н.Н. Анохин. – М.: Изд-во АСВ, 1999. – 334 с.

7. Расчёт статически определимых систем: Контрольные задания по строительной механике для студентов-заочников специальностей ПГС и АДиА) /сост. В.Ф. Сбитнев, В.Л. Высоковский, Т.В. Вяткина.– Челябинск, Изд-во ЮУргу, 2007. – 20 с.