Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра математического анализа

517.2(07)
А655

С.Г. Андреева, М.А. Корытова, С.А. Шунайлова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие
для студентов экономических специальностей

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2011

УДК 517.2(075.8) + 517.3(075.8)
А655

Одобрено
учебно-методической комиссией
механико-математического факультета

Рецензенты:
Макаров А.С., Фёдоров В.Е.

Андреева, С.Г.
А655 **Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной:** учебное пособие для студентов экономических специальностей / С.Г. Андреева, М.А. Корытова, С.А. Шунайлова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. – 106 с.

В данном пособии рассматриваются основные темы двух разделов курса математики для студентов вузов: «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» и «Интегральное исчисление функций одной переменной». Приводится необходимый теоретический материал, примеры решения задач и, в частности, задачи с экономическим содержанием.

Пособие может быть использовано при самостоятельном изучении данного раздела студентами как очной, так и заочной форм обучения.

УДК 517.2(075.8) + 517.3(075.8)

© Издательский центр ЮУрГУ, 2011

Глава 1. ПРОИЗВОДНАЯ

1.1. Определение производной

Пусть дана функция $y = f(x)$. Зафиксируем значение аргумента x_0. Рассмотрим новое значение аргумента x. При этом x может быть как больше x_0, так и меньше x_0. Вычислим $y_0 = f(x_0)$ и $y = f(x)$.

Разность $x - x_0$ называется *приращением аргумента* x в точке x_0 и обозначается Δx:

$$\Delta x = x - x_0.$$

Разность $y - y_0$ называется *приращением функции* в точке x_0 и обозначается Δy:

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0).$$

Так как $x = x_0 + \Delta x$, то

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \qquad (1.1.1)$$

Отметим, что приращение Δx может быть как положительным, так и отрицательным.

Из (1.1.1) следует, что переменная Δy является функцией переменной Δx.

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Определение. *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *называется предел* (*если он существует и конечен*) *отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении* Δx *к нулю:*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Пусть *M* – множество значений x, в которых существует производная. Правило, по которому каждому $x \in M$ соответствует производная в этой точке $f'(x)$, представляет собой новую функцию, определенную на множестве *M*. При этом множество *M*, вообще говоря, ỳже, чем область определения функции. Эта функция называется *производной от функции* $f(x)$ и обозначается $f'(x)$, y', y'_x.

Конкретное значение производной при $x = x_0$ обозначается $f'(x_0)$ или $y'\big|_{x=x_0}$.

Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием* этой функции.

Пример 1. Найти производную функции $y = 3x^2 + 5$.

Решение. 1. Дадим аргументу x приращение Δx и найдем новое значение функции

$$y(x + \Delta x) = 3(x + \Delta x)^2 + 5.$$

2. Найдем приращение функции

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = 3(x+\Delta x)^2 + 5 - 3x^2 - 5 = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2$$

3. Найдем отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x.$$

4. Вычислим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}(6x + 3\Delta x) = 6x.$$

Эта производная определена на всей числовой оси, так как при ее нахождении значение x было выбрано произвольно.

Найдем значение производной в точке $x_0 = 3$: $f'(3) = 6 \cdot 3 = 18$.

Замечание. Значение производной $f'(x_0)$ находится так: сначала ищем производную $f'(x)$, а потом в выражение производной подставляем данное значение x_0.

Пример 2. Найти производную функции $y = x^3$.

Решение. 1. $y(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

2. $\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3x^2\Delta x}{\Delta x} + \dfrac{3x(\Delta x)^2}{\Delta x} + \dfrac{(\Delta x)^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$.

4. $\left(x^3\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 3x^2$.

Пример 3. Найти производную функции $y = e^x$.

Решение. 1. $y(x+\Delta x) = e^{x+\Delta x} = e^x e^{\Delta x}$.

2. $\Delta y = e^x e^{\Delta x} - e^x = e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right)$.

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = e^x\left(\dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right)$.

4. $\left(e^x\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} e^x\left(\dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right) = e^x \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$.

Пример 4. Найдем производную функции $y = \sin x$.

Решение. 1. $y(x+\Delta x) = \sin(x+\Delta x)$.

2. $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\dfrac{x+\Delta x - x}{2}\cos\dfrac{x+\Delta x + x}{2} = 2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$.

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)$.

4. $(\sin x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)$. Так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}=1$ (первый замечательный предел), то, учитывая непрерывность функции $\cos x$, имеем $(\sin x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$.

1.2. Механический и экономический смысл производной

Будем рассматривать прямолинейное движение некоторой материальной точки.

Для удобства восприятия параллельно будем приводить в квадратных скобках аналогичные построения из п. 1.1.

Путь S, проходимый точкой за время t, является функцией времени, т.е. $S=S(t)$ $\left[y=f(x)\right]$. Зафиксируем некоторый момент времени t_0 $\left[x_0\right]$. К этому моменту точка прошла путь $S_0=S(t_0)$ $\left[y_0=f(x_0)\right]$. Поставим задачу определить скорость υ_0 материальной точки в момент t_0.

Рассмотрим для этого какой-нибудь другой момент времени $t_0+\Delta t$ $\left[x_0+\Delta x\right]$. Ему соответствует пройденный путь $S=S(t_0+\Delta t)$ $\left[y=f(x_0+\Delta x)\right]$. Тогда за промежуток времени $\Delta t=t-t_0$ $\left[\Delta x=x-x_0\right]$ точка прошла путь $\Delta S=S-S_0=$ $=S(t_0+\Delta t)-S(t_0)$ $\left[\Delta y=y(x_0+\Delta x)-y(x_0)\right]$.

Средняя скорость за промежуток времени Δt определяется отношением пройденного пути ко времени $\upsilon_{cp}=\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ $\left[\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right]$. Так как начальный момент времени t_0 зафиксирован, а промежуток времени Δt является переменной величиной, то средняя скорость υ_{cp} является переменной величиной, зависящей от Δt.

Определение. *Скоростью υ_0 в данный момент t_0 называется предел средней скорости υ_{cp} при $\Delta t\to 0$, т.е. $\upsilon_0=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$ при условии, что этот предел существует и конечен.*

Этот предел и есть производная $S'(t_0)$. Заметим, что мгновенная скорость зависит от выбранного значения t_0, т.е. является функцией аргумента t: $\upsilon=\upsilon(t)$.

Таким образом, скорость υ прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по времени t. В этом заключается механический смысл производной.

Рассмотрим задачу об определении производительности труда. Объем произведенной к моменту времени t продукции, является функцией времени, т.е. $u = u(t)$. Зафиксируем некоторый момент времени t_0. К этому моменту была произведена продукция в объеме $u_0 = u(t_0)$. Поставим задачу определить производительность труда z_0 в момент времени t_0.

Рассмотрим для этого какой-нибудь другой момент времени $t_0 + \Delta t$. К этому моменту была произведена продукция в объеме $u = u(t_0 + \Delta t)$. Тогда за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ было произведено $\Delta u = u - u_0 = u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)$.

Средняя производительность труда за промежуток времени Δt определяется отношением произведенной за этот промежуток продукции ко времени $z_{cp} = \dfrac{\Delta u}{\Delta t}$. Средняя производительность труда z_{cp} является переменной величиной, зависящей от Δt.

За производительность труда в момент времени t_0 примем предел средней производительности при неограниченном уменьшении промежутка времени, т.е.

$$z_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)}{\Delta t}.$$

Этот предел и есть производная $u'(t_0)$.

Значит, производительность труда z в момент времени t есть производная от объема производства $u = u(t)$ по времени t. Ниже будут приведены некоторые другие применения производной в экономике.

1.3. Геометрический смысл производной

Рассмотрим график непрерывной функции $y = f(x)$, у которой на промежутке $(a; b)$ существует производная (рис. 1). Зафиксируем на нем точку M_0 с координатами $(x_0, f(x_0))$. Возьмем на графике точку $M(x, f(x))$ и проведем секущую M_0M.

Определение. *Касательной к кривой в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ называется прямая, являющаяся предельным положением секущей M_0M, когда точка M, перемещаясь по кривой, стремится к точке M_0.*

Если точка M неограниченно приближается к точке M_0 с любой стороны, то секущая, поворачиваясь вокруг точки M_0, в пределе переходит в касательную, имеющую с графиком функции $y = f(x)$ одну общую точку M_0.

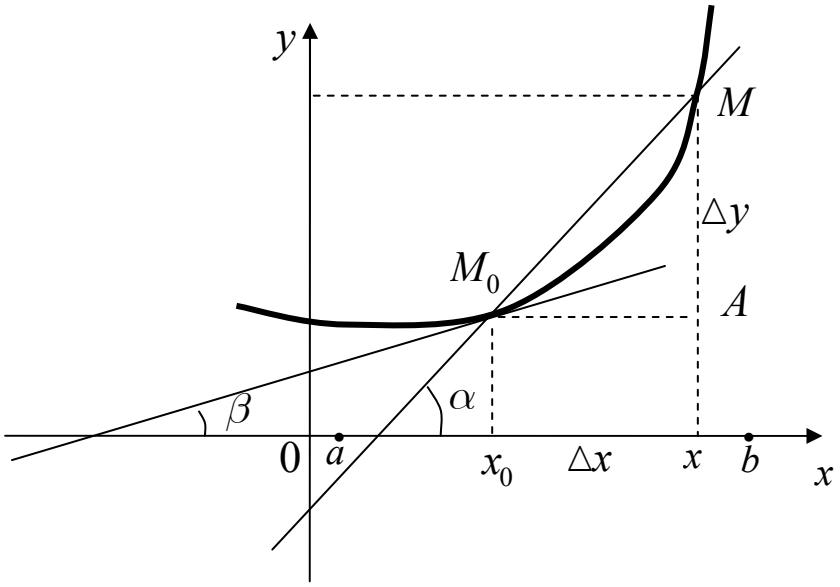

Рис. 1

Геометрический смысл производной вытекает из следующего утверждения.

Теорема. *Если существует производная от функции* $y = f(x)$ *при* $x = x_0$*, равная* $f'(x_0)$*, то прямая, проведенная через точку* $M_0(x_0, y_0)$ *с угловым коэффициентом* $k = f'(x_0)$*, является касательной к графику функции в точке* M_0.

Доказательство. Обозначим $\Delta x = x - x_0$ (рис. 1). Тогда $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Рассмотрим угол α, образованный секущей M_0M с положительным направлением оси OX: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Пусть теперь $\Delta x \to 0$, тогда точка M будет перемещаться по графику функции $y = f(x)$ к точке M_0. Секущая M_0M при этом поворачивается вокруг точки M_0.

Используя факт существования производной $f'(x_0)$, имеем

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta,$$

где β – угол между касательной, проведенной к графику функции в точке M_0, и положительным направлением оси OX,

Таким образом, $k = \operatorname{tg}\beta = f'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной.

Замечание. Мы показали, что если в точке x_0 функция имеет производную, то ее график в точке с абсциссой x_0 имеет невертикальную касательную. Можно показать, что верно и обратное утверждение: если график непрерывной функции $y = f(x)$ имеет невертикальную касательную в точке с абсциссой x_0, то в этой точке существует производная $f'(x_0)$, равная угловому коэффициенту касательной.

1.4. Уравнение касательной и нормали к кривой

Так как касательная проходит через точку $\left(x_0,\, f\left(x_0\right)\right)$ и ее угловой коэффициент равен $k = f'\left(x_0\right)$, то ее уравнение имеет вид

$$y - f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right).$$

Определение. *Нормалью к кривой в данной точке называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно к касательной, проведенной в этой же точке.*

Следовательно, если угловой коэффициент касательной равен $f'\left(x_0\right)$, то угловой коэффициент нормали равен $-\dfrac{1}{f'\left(x_0\right)}$, а потому уравнение нормали имеет вид

$$y - f\left(x_0\right) = -\frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x - x_0\right).$$

Пример. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = 3x^2 + 5$ в точке $x_0 = 3$.

Решение. Находим ординату точки касания $f\left(x_0\right) = f\left(3\right) = 3 \cdot 9 + 5 = 32$. Так как $y' = 6x$ (пример 1 из п. 1.1), имеем $f'\left(x_0\right) = f'\left(3\right) = 18$. Следовательно, уравнение касательной имеет вид $y - 32 = 18\left(x - 3\right)$ или $y = 18x - 22$. Уравнение нормали $y - 32 = -\dfrac{1}{18}\left(x - 3\right)$ или $y = -\dfrac{1}{18}x + \dfrac{193}{6}$.

1.5. Дифференцируемость функций

Пусть функция $y = f\left(x\right)$ определена в некоторой окрестности точки x.

Определение. *Говорят, что функция $y = f\left(x\right)$ дифференцируема в точке x, если ее приращение Δy в этой точке можно записать в виде*

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha\left(\Delta x\right) \cdot \Delta x, \tag{1.5.1}$$

где A – некоторая константа, не зависящая от Δx, но, вообще говоря, зависящая от x, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha\left(\Delta x\right) = 0$.

Пример. Рассмотрим функцию $y = x^3$.

Найдем

$$\Delta y = \left(x + \Delta x\right)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta x\right)^3 = 3x^2\Delta x + \left(3x\Delta x + \left(\Delta x\right)^2\right)\Delta x.$$

Положим $A = 3x^2$, $\alpha\left(\Delta x\right) = 3x\left(\Delta x\right) + \left(\Delta x\right)^2$, получим представление (1.5.1).

Теорема (необходимое и достаточное условие дифференцируемости). *Для того чтобы функция $y = f\left(x\right)$ была дифференцируема в точке x, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную $f'\left(x\right)$.*

Доказательство.

1. **Необходимость.** Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда ее приращение в этой точке можно представить в виде (1.5.1).
Разделим обе части (1.5.1) на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = A.$$

2. **Достаточность.** Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x производную, то существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Отсюда следует, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Или $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$. Если ввести обозначение $A = f'(x)$, то получим требуемое утверждение.

Теорема (о связи непрерывности и дифференцируемости). *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.*

Доказательство. Пусть аргумент x получает в точке x_0 приращение Δx. Ему соответствует некоторое приращение функции Δy.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \right) = A \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = 0.$$

Следовательно, если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$, а это и означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Замечание. Обратное утверждение неверно, т.е. из того факта, что в какой-нибудь точке x_0 функция $y = f(x)$ является непрерывной, еще не следует, что в этой точке она дифференцируема.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим два примера.

Пример 1. Дана функция (рис. 2) $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1, \\ 3x - 2, & x > 1. \end{cases}$

Эта функция при $x = 1$ непрерывна, так как $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = f(1)$. Покажем, что эта функция не имеет производной при $x = 1$. Действительно:

1) пусть $\Delta x > 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(1 + \Delta x) - 2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3.$$

2) пусть $\Delta x < 0$. Имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + \Delta x - 1}{\Delta x} = 1.$$

Таким образом, рассматриваемый предел зависит от того, каков знак Δx, а значит зависит от способа стремления Δx к нулю.

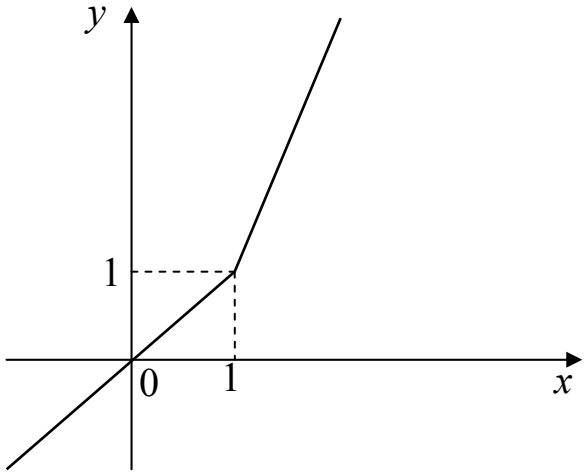

Рис. 2

Пример 2. Функция $y=\sqrt[5]{x}$ непрерывна на всей числовой оси и, в частности, при $x=0$. Докажем, что в точке $x=0$ эта функция не имеет производной.

Действительно, попытаемся вычислить производную в точке $x_0=0$.

1) $\Delta x = x - 0$.

2) $\Delta y = \sqrt[5]{0+\Delta x} - \sqrt[5]{0} = \sqrt[5]{\Delta x}$.

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt[5]{\Delta x}}{\Delta x} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{(\Delta x)^4}}$.

4) Перейдем к пределу: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt[5]{(\Delta x)^4}} = \infty$.

А это и означает, что функция $y=\sqrt[5]{x}$ в точке $x=0$ не имеет производной.

1.6. Основные правила дифференцирования

Установим правила, по которым можно было бы находить производные алгебраической суммы, произведения и частного функций, зная производные слагаемых, сомножителей, делимого и делителей.

При выводе формул будем пользоваться следующей схемой:

1. Дать аргументу x приращение Δx, вычислить значение функции в новой точке:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

2. Найти приращение функции, соответствующее приращению аргумента Δx:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

3. Составить отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

4. Отыскать предел этого отношения при $\Delta x \to 0$:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Предполагается, что все встречающиеся функции определены и дифференцируемы на некотором общем интервале, содержащем рассматриваемые значения x и $x+\Delta x$.

Теорема 1. *Производная от алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна алгебраической сумме производных от этих функций. В частности, если* $u=u(x)$, $v=v(x)$, то

$$(u+v)'=u'+v'.$$

Доказательство. Пусть $y(x)=u(x)+v(x)$.

1. Для значения аргумента $x+\Delta x$ имеем: $y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)$, где Δy, Δu, Δv – приращения функций y, u, v, соответствующие приращению Δx аргумента x.

2. $\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)-(u+v)=\Delta u+\Delta v$.

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

4. $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}=u'+v'$, так как по предположению все слагаемые являются дифференцируемыми функциями.

Пример. $y=\sin x+e^x$, $y'=(\sin x)'+\left(e^x\right)'=\cos x+e^x$.

Теорема 2. Производная произведения двух дифференцируемых функций находится по формуле $(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$.

Доказательство. Пусть $y=u\cdot v$.

1. Если x получит приращение Δx, то функции u и v получат приращения Δu и Δv. Тогда $y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$.

2. $\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv=v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\Delta v$.

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{v\Delta u}{\Delta x}+\dfrac{u\Delta v}{\Delta x}+\dfrac{\Delta u\Delta v}{\Delta x}$.

4. $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{v\Delta u}{\Delta x}+\dfrac{u\Delta v}{\Delta x}+\dfrac{\Delta u\Delta v}{\Delta x}\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{v\Delta u}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u\Delta v}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u\Delta v}{\Delta x}$.

Так как $u=u(x)$ и $v=v(x)$ при фиксированном x постоянны, то их можно вынести за знак предела.

Заметим, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$, так как из дифференцируемости функции u вытекает ее непрерывность. Поэтому, применяя теоремы о пределах, получаем

$$y'=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'v+uv'+0\cdot v'=u'v+uv'.$$

Пример. $y=\sin x\cdot e^x$, $y'=(\sin x)'\cdot e^x+\sin x\cdot\left(e^x\right)'=\cos x\cdot e^x+\sin x\cdot e^x$.

Теорема 3. Производная частного двух дифференцируемых функции $\frac{u}{v}$ при условии, что знаменатель не равен нулю в области дифференцирования, вычисляется по формуле

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

Доказательство. 1. Если x получит приращение Δx, то функции u и v получат приращения Δu и Δv. При этом $y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$.

2. $\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{(v+\Delta v)v}$.

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{v\Delta u-u\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}=\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$.

4. $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v+\Delta v)}$.

Заметив, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$, так как v дифференцируемая и, следовательно, непрерывная функция, получаем $y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$.

Пример. $y=\frac{x^3}{e^x}$; $y'=\frac{\left(x^3\right)'\cdot e^x-\left(e^x\right)'\cdot x^3}{\left(e^x\right)^2}=\frac{3x^2\cdot e^x-x^3\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{3x^2-x^3}{e^x}$.

1.7. Производная обратной функции

Пусть на интервале $(a;b)$ задана строго монотонная непрерывная функция $y=f(x)$. Пусть образ $(a;b)$ есть интервал $(A;B)$. Тогда обратная к f функция $x=\varphi(y)$ есть однозначная, непрерывная и строго монотонная на $(A;B)$ функция.

Зафиксируем $x\in(a;b)$ и дадим ему приращение так, чтобы $x+\Delta x\in(a;b)$. Тогда f получит соответствующее приращение Δy: $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$.

Наоборот, $\varphi(y+\Delta y)=x+\Delta x$.

Вследствие непрерывности прямой и обратной функций для указанных Δx и Δy имеет место утверждение: из $\Delta x \to 0$ следует $\Delta y \to 0$ и, наоборот, если $\Delta y \to 0$, то и $\Delta x \to 0$.

Пусть теперь функция φ в точке y имеет неравную нулю производную $\varphi'(y)$. Покажем, что в таком случае функция f также имеет в соответствующей точке x производную. В самом деле, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$. Так как из того, что $\Delta x \to 0$, следует, что $\Delta y \to 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y)}$, и мы получили $f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$ или

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}. \qquad (1.7.1)$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

Теорема. *Пусть $y=f(x)$ есть строго монотонная непрерывная функция, $x=\varphi(y)$ – обратная к ней функция, имеющая в точке y производную $\varphi'(y)\neq 0$. Тогда функция f имеет в соответствующей точке x производную, определяемую формулой* (*1.7.1*).

Замечание. Может случиться, что в точке y $\lim\limits_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\infty$. В этом случае функция f имеет в точке x производную $f'(x)=0$.

1.8. Производная сложной функции

Пусть $y=f(u)$, а $u=\varphi(x)$. Тогда y есть сложная функция x: $y=f(\varphi(x))$.

Как найти производную сложной функции y'_x, зная производную y'_u и производную u'_x?

Теорема. *Если функция $u=\varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x, а функция $y=f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке u, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ в данной точке x имеет производную y'_x, которая находится по формуле:*

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x \qquad (1.8.1)$$

Доказательство.

1. Дадим x приращение Δx. Тогда u и y получат соответственно приращения Δu и Δy. Будем предполагать, что при $\Delta x\neq 0$ и $\Delta u\neq 0$.

2. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$.

3. Пусть $\Delta x \to 0$. Так как функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x) \text{ и } \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0,$$

поскольку из дифференцируемости функции следует ее непрерывность.

Т.к. функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке u, то $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$. Поэтому, применяя теорему о пределе произведения, получаем

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot \varphi'(x) = y'_u \cdot u'_x.$$

Пример. Найдем производную функции $y = e^{3x^2+5}$. Данная функция является сложной. Обозначим $u = 3x^2 + 5$, тогда $y = e^u$. По формуле (1.8.1) получаем $y'_x = \left(e^u\right)'_u \cdot \left(3x^2 + 5\right)'_x = e^u \cdot 6x$, или, поскольку $u = 3x^2 + 5$, окончательно $y'_x = e^{3x^2+5} \cdot 6x = 6x \cdot e^{3x^2+5}$.

Сложная функция может быть составлена не из двух звеньев, как это было в только что рассмотренном примере, а из большего их числа. В таких случаях необходимо ясно представить себе, какое из действий, приводящих к значению сложной функции, является последним. При дифференцировании сложной функции та величина, над которой совершается последнее действие, принимается за промежуточный аргумент u. При этом цепочка вложенных функций постепенно дифференцируется.

Пример. Пусть $y = \sin\left(e^{x^3}\right)$. Найти производную этой функции.

Последним действием является вычисление синуса. Это действие совершается над функцией e^{x^3}. Поэтому принимаем за промежуточный аргумент $u = e^{x^3}$. Тогда $y = \sin u$ и

$$y'_x = (\sin u)'_u \cdot u'_x = \cos\left(e^{x^3}\right) \cdot \left(e^{x^3}\right)'_x.$$

Функция e^{x^3} также является сложной. Положим теперь $u = x^3$ и снова применим формулу (1.8.1).

$$\left(e^{x^3}\right)'_x = \left(e^u\right)'_u \cdot \left(x^3\right)'_x = e^u \cdot 3x^2 = e^{x^3} \cdot 3x^2.$$

Окончательно имеем

$$\left(\sin e^{x^3}\right)' = \cos\left(e^{x^3}\right) \cdot e^{x^3} \cdot 3x^2.$$

1.9. Производные элементарных функций

Выведем некоторые формулы для вычисления производных основных элементарных функций. При выводе будем пользоваться схемой, приведенной в п. 1.6. Остальные формулы таблицы производных (см. п. 1.10) приведем без доказательства. Предлагаем доказать их самостоятельно в качестве упражнения.

I. Производная постоянной $y = C$.

1. $y + \Delta y = C$.
2. $\Delta y = C - C = 0$.
3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.
4. $C' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0}{\Delta x} = 0$.

Следствие. *Постоянный множитель можно выносить за знак производной:*

$$(Cu)' = Cu', C = const.$$

Доказательство. По формуле дифференцирования произведения находим $(Cu)' = C'u + Cu' = 0 \cdot u + Cu' = Cu'$.

II. Производная функции $y = x$.

1. $y + \Delta y = x + \Delta x$.
2. $\Delta y = \Delta x$.
3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.
4. $x' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1$.

III. Производная функции $y = \sin x$ выведена выше (см. п. 1.1, пример 4).

IV. Производная функции $y = \cos x$. Используем правило дифференцирования сложной функции. Имеем:

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),\ y' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x.$$

V. Производная функции $y = \operatorname{tg} x$.

Так как эта функция может быть представлена в виде дроби $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, то ее производная находится по формуле дифференцирование частного от двух функций (п. 1.6).

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

VI. Производная функции $y = \mathrm{ctg}x$.

$$\left(\mathrm{ctg}x\right)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\left(\cos x\right)'\sin x - \cos x\left(\sin x\right)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

VII. Производная логарифмической функции $y = \log_a x$.

1. $y + \Delta y = \log_a\left(x + \Delta x\right)$.

2. $\Delta y = \log_a\left(x + \Delta x\right) - \log_a x = \log_a \dfrac{x + \Delta x}{x} = \log_a\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)$.

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right) = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right) = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\log_a\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}}$.

4. $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\log_a\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \dfrac{1}{x}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$.

Так как логарифмическая функция непрерывна, то можно перейти от предела логарифма к логарифму предела: $y' = \dfrac{1}{x}\log_a\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)$.

Применяя второй замечательный предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = e$, получаем

$$y' = \frac{1}{x}\log_a e, \text{ или, поскольку, } \log_a e = \frac{1}{\ln a},\ \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}.$$

В частности, при $a = e$ имеем $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$.

VIII. Производная показательной функции $y = a^x$.

Воспользуемся правилом дифференцирования обратной функции. Если $y = a^x$, то $x = \log_a y$. Отсюда $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{y\ln a}} = y\ln a = a^x\ln a$.

В частности, при $a = e$ получаем, что $\left(e^x\right)' = e^x$.

IX. Производная степенной функции $y = x^\alpha$ *(α – действительное число).*

Считая x положительным числом, воспользуемся тождеством $x^\alpha = e^{\alpha\ln x}$.

Тогда $y = e^{\alpha\ln x}$ есть сложная функция x, и ее производная находится так:

$$y' = \left(e^{\alpha\ln x}\right)' = e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\left(\ln x\right)' = \alpha\cdot e^{\alpha\ln x}\cdot\frac{1}{x}.$$

Так как $e^{\alpha \ln x} = x^{\alpha}$, то $y' = x^{\alpha} \cdot \dfrac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

X. Производная функции $y = \arcsin x$.

Рассмотрим обратную функцию $x = \sin y$, $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Эта функция в интервале $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ монотонная и дифференцируемая, а ее производная $x' = \cos y$ в этом интервале в нуль не обращается.

Следовательно, по правилу дифференцирования обратной функции получим $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{\cos y}$. Но $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$ при $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Таким образом, при $x \neq \pm 1$ $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. А при $x = \pm 1$ y' не существует.

XI. Производная функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Эта функция по определению должна удовлетворять условию $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. При этом обратная функция $x = \operatorname{tg} y$ монотонна и дифференцируема.

Находим сначала $x'_y = \dfrac{1}{\cos^2 y}$. Следовательно, согласно формуле дифференцирования обратной функции, имеем $y'_x = \cos^2 y = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

XII. Производная гиперболического синуса $y = \operatorname{sh} x$.

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{\left(e^x\right)' - \left(e^{-x}\right)'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

XIII. Производная гиперболического тангенса $y = \operatorname{th} x$.

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Но так как $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, то $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

1.10. Таблица основных формул дифференцирования

1. $(C)' = 0$;
2. $x' = 1$;
3. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$;
4. $(\sin x)' = \cos x$;
5. $(\cos x)' = -\sin x$;

6. $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

7. $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

8. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$;

9. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

10. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$;

11. $\left(e^x\right)' = e^x$;

12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

14. $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

15. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

16. $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$;

17. $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$;

18. $(\mathrm{th}x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$;

19. $(\mathrm{cth}x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$.

1.11. Логарифмическое дифференцирование

Так называется прием дифференцирования, при котором производные от заданной функции отыскиваются с помощью производной от ее логарифма.

Пусть $y = f(x)$. Тогда $\ln y = \ln f(x)$. Продифференцируем полученное равенство

$$\frac{y'}{y} = \left(\ln f(x)\right)'.$$

Отсюда $y' = y \cdot \left(\ln f(x)\right)'$.

Обычно этот прием применяется для дифференцирования функций вида $y = \left(\varphi(x)\right)^{g(x)}$.

Пример. Найти производную функции $y = x^{\sin x}$.

Решение. $\ln y = \ln x^{\sin x} = \sin x \cdot \ln x$,

$$(\ln y)'_x = \frac{y'}{y} = (\sin x \cdot \ln x)' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}.$$

Окончательно имеем: $y' = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \dfrac{1}{x}\right)$.

Логарифмическое дифференцирование может быть применено для отыскания производных от произведения или частного нескольких функций, что упрощает вычисления.

Пример. Найти производную функции $y = 2^x \cdot \sqrt{x^2+4} \cdot \sin^2 x$.

Решение. $\ln y = \ln\left(2^x \cdot \sqrt{x^2+4} \cdot \sin^2 x\right) = \ln 2^x + \ln\sqrt{x^2+4} + \ln\sin^2 x =$

$$= x\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) + 2\ln\sin x.$$

$$y' = y\left(x\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) + 2\ln\sin x\right)' = 2^x \cdot \sqrt{x^2+4} \cdot \sin^2 x\left(\ln 2 + \frac{x}{x^2+4} + 2\mathrm{ctg}x\right).$$

1.12. Производная функции, заданной параметрически

Предположим, что функция y от x задана параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t); \end{cases} \quad t_0 \le t \le T.$$

Причем в области изменения параметра t функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы и $\varphi'(t) \ne 0$.

Тогда определенную параметрическим уравнением функцию $y = f(x)$ можно рассматривать как сложную функцию

$$y = \psi(t),\ t = \Phi(x),$$

где Φ – функция, обратная к φ.

По правилу дифференцирования сложной функции получим

$$y'_x = \psi'_t \cdot \Phi'_x.$$

На основании теоремы о дифференцировании обратной функции получаем

$$\Phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Таким образом,

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (1.12.1)$$

Пример. Найти производную функции y от x, заданной параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos 2t. \end{cases}$$

Решение. По формуле (1.12.1) получаем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\left(\sin^2 t\right)'}{\left(\cos 2t\right)'} = \frac{2\sin t \cdot \cos t}{-2\sin 2t} = -\frac{\sin 2t}{-2\sin 2t} = -\frac{1}{2}.$$

1.13. Неявная функция и ее производная

До сих пор мы рассматривали функции, заданные в *явном* виде уравнением $y = f(x)$. Но функция может быть задана также и в *неявном* виде уравнением $F(x, y) = 0$, не разрешенном относительно y.

Так, например, уравнение $x+y^2+10=0$ неявно определяет следующие элементарные функции $y=\sqrt{-10-x}$ и $y=-\sqrt{-10-x}$.

Эти выражения получились путем решения уравнения относительно y. Но не всякую неявно заданную функцию можно представить явно в виде $y=f(x)$. Так, например, функцию, заданную уравнением $y^2+e^y-x=0$ нельзя представить в явном виде.

Производная неявной функции может быть найдена без приведения этой функции к явному виду на основании правила дифференцирования сложной функции, т.е. имея в виду, что y есть функция от x, обращающая это соотношение в тождество.

Пусть, например, функция задана уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Тогда $\left(\frac{x^2}{a^2}\right)'_x+\left(\frac{y^2}{b^2}\right)'_x=(1)'_x$, $\frac{2x}{a^2}+\frac{2y\cdot y'}{b^2}=0$. Откуда получаем, выражая y',

$$y'=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}.$$

Пример. Найти производную функции, заданной в виде $xy^2-3x=0$.

Решение. $\left(xy^2\right)'_x-(3x)'_x=0$, $(x)'_x\cdot y^2+x\cdot\left(y^2\right)'_x-3=0$, $y^2+x\cdot 2y\cdot y'-3=0$.

Выразим y': $y'=\frac{3-y^2}{2xy}$.

1.14. Предельные величины и эластичность функции

Пусть зависимость переменной величины y от переменной величины x задана функцией $y=f(x)$. Производная $y'=f'(x)$ выражает скорость изменения y при изменении x.

В экономике производные называются предельными величинами и обычно обозначаются как Mf. Например, если функция $C=C(Q)$ задает зависимость издержек от объема производства, то предельные издержки MC – производная от этой функции: $MC=C'(Q)$.

Пример. Зависимость между издержками производства C и объемом продукции Q выражается функцией $C(Q)=40Q-0{,}03Q^3$. Найдите предельные издержки при объеме производства $Q=10$.

Решение. $MC=40-3\cdot 0{,}03Q^2=40-0{,}09Q^2$, $MC(10)=40-0{,}09\cdot 10^2=$ $=40-9=31$.

Пример. Население мира растет по закону $N(T)=\dfrac{200}{2025-T}$, где T – время в годах, $N(T)$ – численность населения в млрд. Найдите скорость роста населения в 2015 году и в 2020 году.

Решение. Скорость роста равна $N'(T)=\left(\dfrac{200}{2025-T}\right)'=\dfrac{200}{(2025-T)^2}$. Скорость роста в 2015 году составляет $N'(2015)=\dfrac{200}{(2025-2015)^2}=2$ млрд/год. Скорость роста в 2020 году составляет $N'(2020)=\dfrac{200}{(2025-2020)^2}=8$ млрд/год.

Скорость изменения, выраженная производной, зависит от единиц измерения переменных x и y. Так, например, если время измеряется в часах, а пройденный материальной точкой путь – в километрах, то скорость, которая является производной от пути по времени (п. 1.2) измеряется в км/ч.

В экономических исследованиях широко применяется такое понятие, как эластичность, выражающее относительную скорость изменения величины. Эластичность не зависит от единиц измерения самой величины. Она вычисляется по формуле:

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}\right)=\frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x}{y}\cdot y'.$$

Эластичность спроса по цене равна $E_P(Q)=\dfrac{P}{Q}\cdot Q'$, где функция $Q=Q(P)$ выражает спрос на товар в зависимости от его цены. Величина $E_P(Q)$ дает относительное изменение величины спроса (в %) при изменении цены на 1% и характеризует чувствительность потребителей к изменению цены на товар.

Эластичность спроса по доходу равна $E_I(Q)=\dfrac{I}{Q}\cdot Q'$, где функция $Q=Q(I)$ выражает спрос на товар в зависимости от дохода потребителей этого товара. Величина $E_I(Q)$ дает относительное изменение величины спроса (в %) при изменении дохода потребителей на 1%. Рассматриваются также и другие виды эластичности.

Пример. Зависимость спроса на некоторый товар от его цены задана функцией: $Q=28-7P$.

а) Определите, при какой цене коэффициент эластичности спроса равен –0,5.

б) Определите эластичность спроса, если известно, что выручка продавцов составляет 21 ден. ед.

Решение. а) $E_P(Q)=\dfrac{P}{Q}\cdot Q'=\dfrac{P}{28-7P}\cdot(-7)=\dfrac{P}{P-4}$.

Решим уравнение $\frac{P}{P-4}=-0,5$:

$$P=-0,5(P-4),\ 1,5P=2,\ P=\frac{4}{3}.$$

б) Выручка равна $R(P)=P\cdot Q(P)=P(28-7P)=21$.

Получаем уравнение $P^2-4P+3=0$. Его корни: $P_1=1$ и $P_2=3$.

При $P=1$ $E_P(Q)=-\frac{1}{3}$, $|E_P(Q)|<1$, спрос неэластичен, т.е. увеличение цены на 1 % вызывает незначительное изменение спроса. При $P=3$ $E_P(Q)=-3$, $|E_P(Q)|>1$, спрос эластичен (изменению цены на 1 % соответствует значительное изменение спроса).

1.15. Производные высших порядков

Пусть функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в некотором интервале изменения независимой переменной x. Эта производная $f'(x)$ сама, в свою очередь, является функцией. Производная от $f'(x)$, если она существует, называется **второй производной** или **производной второго порядка** от $f(x)$ и обозначается $f''(x)=(f'(x))'$.

Таким же образом **производной третьего порядка** или **третьей производной** $f'''(x)$ от функции $f(x)$ называется производная от производной второго порядка. Дадим общее определение.

Определение. *Производной n-го порядка $f^{(n)}(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка:* $f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Пример. Найти третью производную функции $y=x^5$.

Решение. $y'=5x^4$, $y''=20x^3$, $y'''=60x^2$.

Пример. Найти вторую производную функции $y=x^{\frac{3}{2}}$, $x\in[0;+\infty)$.

Решение. $y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, $y''=\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}$. Вторая производная не определена при $x=0$.

Выясним механический смысл второй производной.

Пусть материальная точка движется прямолинейно по закону $S=S(t)$ (см. п. 1.2). Тогда скорость υ этого движения есть некоторая функция времени: $\upsilon=\upsilon(t)$. В момент времени t_0 скорость имеет значение $\upsilon_0=\upsilon(t_0)$. Рассмотрим

другой момент времени $t_0+\Delta t$. Ему соответствует значение скорости $\upsilon=\upsilon(t_0+\Delta t)$. Приращению времени Δt соответствует приращение скорости $\Delta\upsilon=\upsilon-\upsilon_0=\upsilon(t_0+\Delta t)-\upsilon(t_0)$.

Отношение $\dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$ называется средним ускорением за промежуток времени Δt.

Определение. *Ускорением* w *в момент времени* t_0 *называется предел среднего ускорения при* $\Delta t\to 0$: $w=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t}=\upsilon'_t$.

Учитывая, что скорость υ есть производная пути S по времени t, получаем, что ускорение прямолинейного движения точки есть вторая производная пути по времени: $w=\upsilon'_t=(S')'=S''$.

1.16. Производные высших порядков от неявных функций и функций, заданных параметрически

1. Покажем на примере способ нахождения производных высших порядков от неявных функций.

Пусть неявная функция y от x определяется равенством

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2.$$

Дифференцируем по x все члены этого равенства, помня, что y есть функция от x:

$$2(x-a)+2(y-b)\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

Отсюда находим $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x-a}{y-b}$. Это равенство снова дифференцируем по x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{d(x-a)}{dx}\cdot(y-b)-\dfrac{d(y-b)}{dx}\cdot(x-a)}{(y-b)^2}=\frac{(x-a)\dfrac{dy}{dx}-(y-b)}{(y-b)^2}.$$

Подставляя сюда вместо $\dfrac{dy}{dx}$ его выражение, получаем

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x-a)\left(-\dfrac{x-a}{y-b}\right)-(y-b)}{(y-b)^2}=\frac{-\dfrac{(x-a)^2}{y-b}-(y-b)}{(y-b)^2}=\frac{-(x-a)^2-(y-b)^2}{(y-b)^3}\ \text{и т.д.}$$

2. Рассмотрим задачу о нахождении производных высших порядков от функции, заданной параметрически

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t);\end{cases}\quad t_0\le t\le T.$$

Ранее (п. 1.12) было показано, что

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \tag{1.16.1}$$

т.е. производная y'_x является некоторой функцией параметра t: $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = \chi(t)$ и ее можно задать параметрически следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \chi(t), \\ x = \varphi(t). \end{cases} \tag{1.16.2}$$

Для нахождения $\frac{d^2y}{dx^2}$ применим формулу (1.16.1) к уравнениям (1.16.2):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\chi'_t}{\varphi'_t} = \frac{\left(\frac{\psi'_t}{\varphi'_t}\right)'_t}{\varphi'_t} = \frac{\psi''_t\varphi'_t - \psi'_t\varphi''_t}{\left(\varphi'_t\right)^3}. \tag{1.16.3}$$

Пример. Найти вторую производную $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции y, заданной параметрически $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t. \end{cases}$

Решение. Воспользуемся формулой (1.16.3):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\cos t)'' \cdot (\sin t)' - (\sin t)'' \cdot (\cos t)'}{\left((\sin t)'\right)^3} = -\frac{1}{\cos^3 t}.$$

Замечание. Если известна производная $\frac{dy}{dx}$ функции y, заданной параметрически, то для нахождения второй производной можно воспользоваться формулой

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{\varphi'_t} \tag{1.16.4}$$

Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ

2.1. Определение и геометрический смысл дифференциала

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то ее приращение Δy в этой точке можно представить в виде (см. п. 1.5)

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \tag{2.1.1}$$

где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Определение. *Главная часть приращения функции $f'(x) \cdot \Delta x$, пропорциональная приращению аргумента, называется дифференциалом этой функции.*

Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначается символом dy. Итак, по определению

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \tag{2.1.2}$$

Найдем дифференциал функции $y = x$.

В этом случае $y' = x' = 1$, и, следовательно, $dy = dx = \Delta x$ или $dx = \Delta x$. Таким образом, дифференциал dx независимой переменной x совпадает с его приращением. Тогда формулу (2.1.2) мы можем записать так

$$dy = f'(x)dx.$$

Отсюда следует, что $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Пример. Найти дифференциал dy функции $y = \cos x$.

Решение. $dy = (\cos x)' dx = -\sin x \cdot dx$.

Выясним геометрический смысл дифференциала. Рассмотрим график дифференцируемой функции $y = f(x)$ (рис. 3).

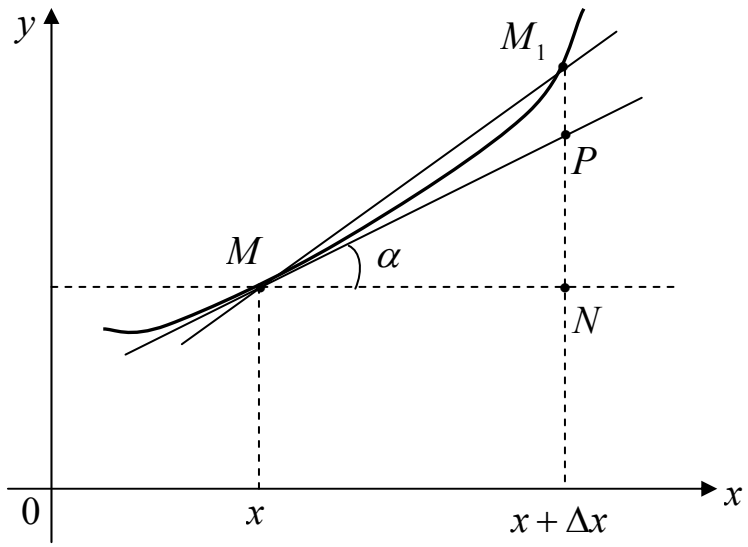

Рис. 3

Точка M_1 имеет координаты $(x+\Delta x;\ y+\Delta y)$. Приращение функции в точке x: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ равно длине отрезка M_1N. С другой стороны, $M_1N = M_1P + PN$, где $PN = \mathrm{tg}\alpha \cdot \Delta x = f'(x)\cdot \Delta x$. Таким образом, отрезок PN есть дифференциал функции f в точке x: $PN = dy = f'(x)\cdot \Delta x$.

Следовательно, дифференциал функции, соответствующий данным значениям x и Δx, равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке x.

2.2. Свойства дифференциала

1. Дифференциал алгебраической суммы дифференцируемых функций равен сумме дифференциалов этих функций: $d(u+v) = du + dv$.

Доказательство. $d(u+v) = (u+v)'\,dx = u'dx + v'dx = du + dv$.

2. Дифференциал произведения двух дифференцируемых функций u и v определяется формулой $d(u\cdot v) = du\cdot v + dv\cdot u$.

Упражнение. Доказать самостоятельно.

3. Дифференциал частного двух дифференцируемых функций u и v при условии, что $v \neq 0$, находится по формуле $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{du\cdot v - dv\cdot u}{v^2}$.

Доказательство. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \left(\dfrac{u}{v}\right)' dx = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}dx = \dfrac{(u'dx)v - (v'dx)u}{v^2} = \dfrac{du\cdot v - dv\cdot u}{v^2}$.

Пример. Найти дифференциал функции $y = x\cdot \mathrm{tg}x$.

Решение. $dy = dx\cdot \mathrm{tg}x + d(\mathrm{tg}x)\cdot x = \mathrm{tg}x dx + \dfrac{1}{\cos^2 x}dx\cdot x = \mathrm{tg}x dx + \dfrac{x}{\cos^2 x}dx =$

$= \left(\mathrm{tg}x + \dfrac{x}{\cos^2 x}\right)dx$.

4. Найдем дифференциал сложной функции.

Пусть $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции своих аргументов. Используя формулу дифференцирования сложной функции (см. п. 1.8): $dy = y'_x \cdot dx = f'_u \cdot \varphi'_x \cdot dx$. Но $\varphi'_x \cdot dx = du$, и значит, $dy = f'_u \cdot du$, т.е. дифференциал dy имеет такой же вид, как если бы величина u была независимой переменной.

Это свойство называется **инвариантностью формы дифференциала**. Всегда можно, не интересуясь природой аргумента, записать дифференциал функции в одном и том же виде.

Пример. Найти дифференциал функции $y = \ln^2 x$.

Решение. $dy = \left(\ln^2 x\right)' dx = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x}\cdot dx$.

А можно записать и так: $dy = 2\ln x d(\ln x)$.

2.3. Дифференциалы высших порядков

Дифференциал dy функции $y = f(x)$ есть функция двух переменных: независимой переменной x и ее дифференциала dx. Причем, дифференциал dx независимой переменной x есть величина, не зависящая от x, так как приращение в данной точке x можно выбирать независимо от этой точки.

Рассматривая $dy = f'(x)dx$ только как функцию x (т.е. считая dx постоянным), можно найти дифференциал этой функции. Этот дифференциал, если он существует, называется **дифференциалом второго порядка** или **вторым дифференциалом** от функции $y = f(x)$ и обозначается d^2y: $d^2y = d(dy)$.

Аналогично определяются и находятся дифференциалы третьего, четвертого и более высоких порядков.

Определение. *Дифференциалом n-го порядка $d^n y$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка $d^n y = d\left(d^{n-1}y\right)$.*

Утверждение. Дифференциал n-го порядка равен произведению производной n-го порядка по независимой переменной на n-ю степень дифференциала независимой переменной:

$$d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n. \tag{2.3.1}$$

Доказательство. $d^n y = \left(d^{n-1}y\right)' dx = \left(f^{(n-1)}(x)(dx)^{n-1}\right)' dx = f^{(n)}(x)(dx)^n$.

Из формулы (2.3.1) следует, что $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Замечание. В п. 2.2 было показано, что дифференциал первого порядка обладает свойством инвариантности. Дифференциалы высших порядков $(n > 1)$ уже не обладают этим свойством. В самом деле, предположим, что x есть не независимая переменная, а функция: $x = \varphi(t)$. Тогда dx также будет функцией от t, и мы не сможем считать dx постоянным при дифференцировании первого дифференциала. А именно, взяв дифференциал от dy на основании правила дифференцирования произведения, получим

$$d^2y = d\left(f'(x)dx\right) = d\left(f'(x)\right)dx + f'(x)d(dx) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x.$$

Как видим, появился добавочный член $f'(x)d^2x$. Он обращается в нуль, если x – независимая переменная: $d^2x = x''(dx)^2 = 0 \cdot (dx)^2 = 0$.

Глава 3. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

3.1. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Определение. *Говорят, что функция* $y = f(x)$ *достигает в точке* x_0 *локального максимума* (*минимума*), *если* $f(x) < f(x_0)$ $\left(f(x) > f(x_0)\right)$ *для любой точки* $x \neq x_0$ *из некоторой окрестности точки* x_0.

Локальный максимум (*минимум*) *называется экстремумом функции.*

Замечание. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум (минимум), то это еще не означает, что в этой точке функция имеет наибольшее (наименьшее) значение во всей области ее определения. Из определения экстремума следует только то, что это самое большое (маленькое) значение функции в точках, **достаточно близких** к точке x_0.

Замечание. Из определения следует, что функция, определенная на **отрезке,** может достигать экстремума только в его внутренних точках.

Замечание. Функция может иметь несколько экстремумов в области определения.

Теорема Ферма. *Если функция* $y = f(x)$ *дифференцируема в окрестности точки экстремума* x_0, *то ее производная в этой точке равна нулю:* $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть, для определенности, функция $f(x)$ принимает в точке x_0 максимальное значение.

По определению производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, где Δx берется таким, чтобы точка $x_0 + \Delta x$ принадлежала рассматриваемой окрестности точки x_0, при этом приращение Δx может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Рассмотрим отношение $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Так как в точке x_0 функция принимает максимальное значение, то при любом знаке Δx имеем $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$.

Отсюда, если $\Delta x > 0$, то $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$ и, следовательно, по теореме о переходе к пределу в неравенствах $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$.

Если же $\Delta x < 0$, то $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$ и $f'(x_0) \geq 0$.

Таким образом, $f'(x_0)$ не может быть ни положительной, ни отрицательной. Значит $f'(x_0) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ферма заключается в следующем: касательная к графику дифференцируемой функции в точках экстремума параллельна оси абсцисс (см. рис. 4), так как тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции в этих точках, равен нулю.

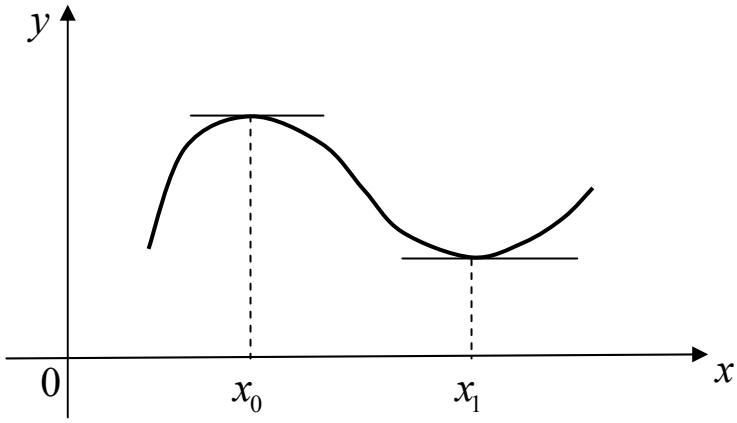

Рис. 4

Экономический смысл теоремы Ферма. Пусть дана функция прибыли $\pi(Q)$, выраженная через функции издержек $C(Q)$ и дохода $R(Q)$, где Q – объем производства: $\pi(Q)=R(Q)-C(Q)$. Оптимальный объем производства Q_0 – это объем производства, при котором функция $\pi(Q)$ достигает максимума, а значит, по теореме Ферма, ее производная равна нулю. Значит, при таком объеме производства предельные издержки должны быть равны предельным доходам:

$$MC(Q_0)=MR(Q_0).$$

Это равенство выражает один из базовых экономических законов.

Теорема Ролля. *Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема во всех его внутренних точках и $f(a)=f(b)$, то существует хотя бы одна точка $c\in(a;b)$ такая, что $f'(c)=0$.*

Доказательство. Так как функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего M и наименьшего m значения. Возможны два случая:

1) если $M=m$, то функция постоянна на отрезке $[a;b]$. Тогда ее производная равна нулю при всех значениях $x\in[a;b]$: $f'(x)=0$.

2) пусть теперь $M\neq m$ и пусть $f(x_M)=M$, $f(x_m)=m$. Так как $f(a)=f(b)$, а $f(x_M)>f(x_m)$, то либо точка x_M, либо точка x_m лежит внутри отрезка $[a;b]$ (рис. 5). Ее мы и обозначим через c.

По теореме Ферма $f'(c)=0$.

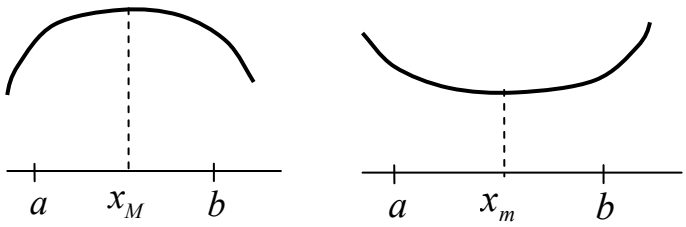

Рис. 5

Геометрический смысл теоремы Ролля таков: на дуге графика функции $y = f(x)$ между ее концами $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, если $f(a) = f(b)$ найдется точка $c \in (a; b)$, в которой касательная параллельна оси абсцисс (см. рис. 6).

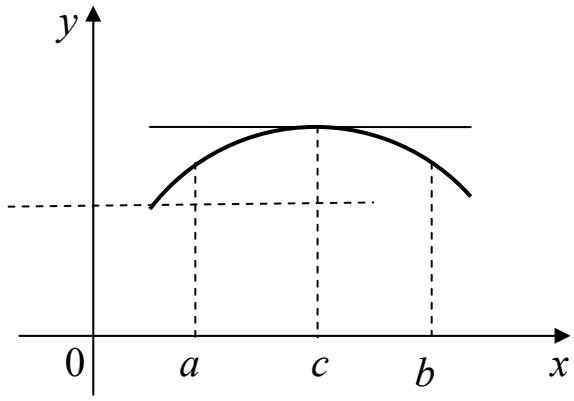

Рис. 6

Теорема Лагранжа. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема во всех его внутренних точках, то на интервале $(a; b)$ существует хотя бы одна точка c такая, что имеет место равенство:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad (3.1.1)$$

Доказательство.

Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

Она обладает следующими свойствами:

1) $F(x)$ непрерывна при $x \in [a; b]$;

2) $F(x)$ дифференцируема при $x \in (a; b)$;

3) $F(a) = F(b) = f(a)$.

Применим к $F(x)$ теорему Ролля: существует точка $c \in (a; b)$, в которой

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0. \qquad (3.1.2)$$

Отсюда $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Замечание. Перепишем равенство (3.1.2) в виде $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Эта формула называется **формулой конечных приращений**.

Геометрически теорема Лагранжа означает следующее: пусть AB, где $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, – дуга графика непрерывной функции $y=f(x)$, имеющая в каждой точке невертикальную касательную. Тогда на дуге всегда найдется хотя бы одна точка $(c, f(c))$, в которой касательная будет параллельная хорде, стягивающей концы дуги AB. Это вытекает из того факта, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ представляет собой тангенс угла α наклона хорды, проходящей через точки AB графика с абсциссами a и b (рис. 7).

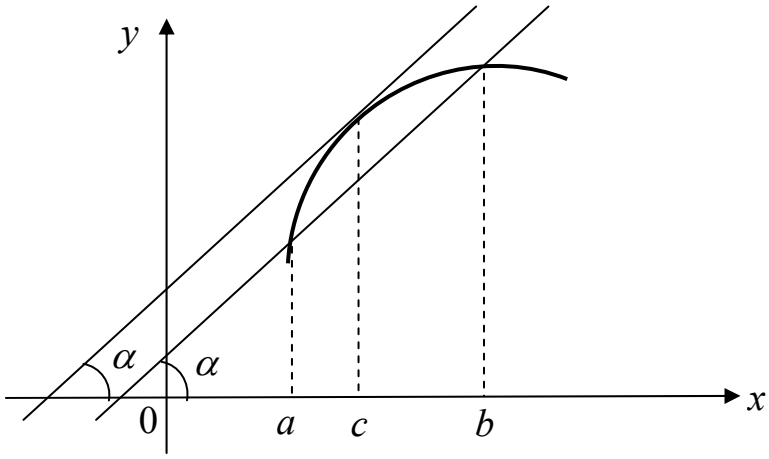

Рис. 7

Теорема Коши. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы во всех его внутренних точках, причем $\varphi'(x)\neq 0$, то на интервале $(a;b)$ существует хотя бы одна точка c такая, что имеет место равенство*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\big(\varphi(x)-\varphi(a)\big).$$

Она обладает следующими свойствами:

1) $F(x)$ непрерывна при $x\in[a;b]$;

2) $F(x)$ дифференцируема при $x\in(a;b)$;

3) $F(a)=F(b)=f(a)$.

Применим к $F(x)$ теорему Ролля: существует точка $c\in(a;b)$ такая, что $F'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c)=0$.

Отсюда $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Замечание. В дальнейшем буквой w будем обозначать либо точку x_0, либо $+\infty$, либо $-\infty$, либо ∞.

3.2. Правило Лопиталя

Теорема (правило Лопиталя I). *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и имеют производные в окрестности точки w, за исключением, быть может, самой точки w. При этом $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ не равны нулю в указанной окрестности и $\lim\limits_{x\to w} f(x)=\lim\limits_{x\to w}\varphi(x)=0$.*

Тогда, если существует предел $\lim\limits_{x\to w}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$ (конечный или бесконечный), то существует также равный ему предел $\lim\limits_{x\to w}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to w}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$.

1. Пусть w – число. Доопределим $f(w)=0=\lim\limits_{x\to w} f(x)$, $\varphi(w)=0=\lim\limits_{x\to w}\varphi(x)$. Тогда получаем, что функции f и φ непрерывны в точке w.

Это свойство вместе со сформулированными в теореме свойствами позволяет применить к функциям f и φ теорему Коши.

Тогда $\lim\limits_{x\to w}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to w}\dfrac{f(x)-f(w)}{\varphi(x)-\varphi(w)}=\lim\limits_{x\to w}\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, где $c\in(w;x)$ или $c\in(x;w)$. Если $x\to w$, то и $c\to w$ и поэтому $\lim\limits_{x\to w}\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim\limits_{c\to w}\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\cos 2x}{2x-\pi}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x-\pi)=0$. Применим правило Лопиталя I:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\cos 2x)'}{(2x-\pi)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\sin 2x}{2}=0.\ \text{Значит,}\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2x-\pi}=0.$$

2. Рассмотрим случай $w=\infty$ (или $w=+\infty$, или $w=-\infty$). Сделаем подстановку $x=\frac{1}{u}$. Тогда получим функции $F(u)=f\left(\frac{1}{u}\right)$, $\Phi(u)=\varphi\left(\frac{1}{u}\right)$ от u. Они непрерывны в окрестности точки 0 (при $w=+\infty$ или при $w=-\infty$ в правой или левой окрестностях точки 0), имеют производные по u в этой окрестности и функция Φ, так же как и Φ', не равна нулю в ней.

При этом $\lim\limits_{u\to 0}F(u)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ и $\lim\limits_{u\to 0}\Phi(u)=\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$. Далее, если существует $\lim\limits_{x\to w}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то, используя утверждение, доказанное в части 1, имеем

$$\lim_{u\to 0}\frac{F'(u)}{\Phi'(u)}=\lim_{u\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{1}{u^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{1}{u^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

И, следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{F(u)}{\Phi(u)}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{F'(u)}{\Phi'(u)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Теорема (правило Лопиталя II). *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и имеют производные в окрестности точки w, за исключением, быть может, точки w. При этом $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ не равны нулю в указанной окрестности и $\lim\limits_{x\to w}f(x)=\lim\limits_{x\to w}\varphi(x)=\infty$ ($+\infty$ или $-\infty$).*

Тогда, если существует предел $\lim\limits_{x\to w}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$ (конечный или бесконечный), то существует также равный ему предел $\lim\limits_{x\to w}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to w}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$.

Без доказательства.

Замечание. Если отыскание предела отношения производных опять представляет собой неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то можно снова применять правило Лопиталя I или II, т.е. перейти к отношению вторых производных и т.д.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}$.

Решение. Применяя 2 раза правило Лопиталя II, находим $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$.

Замечание. Если предела отношения производных не существует, то это не означает, что не существует предела отношения самих функций.

Приведем пример, когда отношение функций имеет предел, а отношение производных не стремится ни к какому пределу. Так, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$.

Однако, отношение $\dfrac{(x+\sin x)'}{(x)'}=1+\cos x$ при $x\to\infty$ не имеет предела.

Раскрытие неопределенностей

Кроме рассмотренных случаев неопределенностей вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ встречаются еще неопределенности других видов.

1. Раскрытие неопределенности $[\infty-\infty]$

Пусть $\lim\limits_{x\to w}f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to w}\varphi(x)=\infty$. Тогда $\lim\limits_{x\to w}\left(f(x)-\varphi(x)\right)=[\infty-\infty]$. Этот случай преобразованием выражения $f(x)-\varphi(x)$ сводится к неопределенности $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\mathrm{tg}x\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\mathrm{tg}x\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)=0$ и $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$.

Применяем правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1-\sin x)'}{(\cos x)'}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\sin x}=0$.

2. Раскрытие неопределенности вида $[0\cdot\infty]$

Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim\limits_{x\to w}\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)$, если $\lim\limits_{x\to w}f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to w}\varphi(x)=\infty$. Этот случай также преобразованием выражения $f(x)\cdot\varphi(x)$ сводится к раскрытию неопределенностей вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0+0}x\ln x$.

Решение. $$\lim_{x\to 0+0}x\ln x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to 0+0}(-x)=0.$$

3. Раскрытие неопределенностей видов $\left[1^{\infty}\right]$, $\left[0^{0}\right]$ и $\left[\infty^{0}\right]$

В этом случае функция предварительно логарифмируется. Сначала отыскивается предел логарифма заданной функции, а затем уже по пределу логарифма находится предел функции (что допустимо вследствие непрерывности логарифмической функции).

Пример. Найти $A=\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left[1^{\infty}\right]$.

Решение. Пусть $A_1=\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\cos x\right)}{x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\ln\left(\cos x\right)\right)'}{\left(x^2\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\mathrm{tg}x}{2x}=-\dfrac{1}{2}$. Но $A_1=\ln\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}=\ln A$.

Поэтому $A=e^{A_1}=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Пример. Найти $A=\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{ctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\left[\infty^{0}\right]$.

Решение. $A_1=\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\mathrm{ctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\mathrm{ctg}x\right)}{\ln x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\ln\left(\mathrm{ctg}x\right)\right)'}{\left(\ln x\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{\cos x\sin x}=-1$. Тогда $A=e^{A_1}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

Пример. Вычислить $A=\lim\limits_{x\to 0}x^{x}=\left[0^{0}\right]$.

Решение.

$$A_1=\lim_{x\to 0}\ln x^{x}=\lim_{x\to 0}x\ln x=\left[0\cdot\infty\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln x\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0.\ \text{Тогда}\ A=e^{A_1}=e^{0}=1.$$

3.3. Формула Тейлора

Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 все производные до порядка n включительно.

Определение. *Многочленом Тейлора n-го порядка с центром в точке x_0 для данной функции $f(x)$ называется*

$$P_n(x, f, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) +$$

$$+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \qquad (3.3.1)$$

Нас будет интересовать величина $f(x) - P_n(x, f, x_0) = r_n(x, f, x_0)$, называемая **остаточным членом**. Наша задача – оценить величину $r_n(x, f, x_0)$ при различных значениях x_0.

Определение. *Формулой Тейлора n-го порядка с центром в точке x_0 для данной функции $f(x)$ называется формула*

$$f(x) = P_n(x, f, x_0) + r_n(x, f, x_0). \qquad (3.3.2)$$

Теорема (остаточный член в форме Пеано). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна вместе со своими n производными в некоторой окрестности точки x_0.*

Тогда $r_n(x, f, x_0) = o\left((x - x_0)^n\right)$.

Доказательство.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x, f, x_0)}{(x - x_0)^n} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n} =$$

(применим правило Лопиталя I n раз)

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - \frac{f''(x_0)}{1!}(x - x_0) - \frac{f'''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n-1}}{n(x - x_0)^{n-1}} =$$

$$= \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.$$

Теорема (остаточный член в форме Лагранжа). (Без доказательства.) *Пусть функция $f(x)$ непрерывна вместе со своими $(n+1)$-ой производными в некоторой окрестности точки x_0.*

Тогда $r_n(x, f, x_0) = f(x) - P_n(x, f, x_0) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, *где число* c *заключено между* x *и* x_0.

Замечание. Так как число c заключено между x и x_0, то его можно представить в форме $c = x_0 + \Theta(x - x_0)$, где $\Theta \in (0;1)$. Тогда формула остаточного члена примет вид

$$r_n(x, f, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \ \Theta \in (0;1). \qquad (3.3.3)$$

Пример. Пусть $f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$. Тогда $r_n(x, f, x_0) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, так как $f^{(n+1)}(c) = 0$ ($(n+1)$-я производная от многочлена степени n равна нулю).

Разложим многочлен

$$f(x) = -3 + x - x^2 + 2x^3 \qquad (3.3.4)$$

по степеням $(x-1)$. Здесь $x_0 = 1$.

$$f(1) = -1,\ f'(1) = \left(1 - 2x + 6x^2\right)\Big|_{x=1} = 5,\ f''(1) = (-2 + 12x)\Big|_{x=1} = 10,\ f'''(1) = 12.$$

$$P_3(x) = -1 + \frac{5(x-1)}{1!} + \frac{10(x-1)^2}{2!} + \frac{12(x-1)^3}{3!} =$$

$$= -1 + 5(x-1) + 5(x-1)^2 + 2(x-1)^3 \qquad (3.3.5)$$

Замечание. Можно убедиться, раскрыв скобки, что многочлен (3.3.5) совпадает с многочленом (3.3.4).

Если в формулах (3.3.1) – (3.3.3) положим $x_0 = 0$, то получим формулу

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где $\Theta \in (0;1)$, которая называется формулой Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа.

Разложение некоторых функций по формуле Маклорена

1. $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$.

Следовательно, $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + e^{\Theta x}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, $0 < \Theta < 1$.

2. $f(x) = \sin x$, $f(0) = 0$;

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ f'(0)=1;$$

$$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ f''(0)=0;$$

$$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ f'''(0)=-1;$$

$$f^{IV}(x)=\sin x=\sin\left(x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ f^{IV}(0)=0;\ \ldots;$$

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(n)}(0)=\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Получаем, что

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\Theta x+\frac{\pi(n+1)}{2}\right),\quad \text{где}\quad 0<\Theta<1,$$

или $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(\Theta x+\frac{\pi(2n+1)}{2}\right).$

3. $f(x)=\cos x$. Для этой функции $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right),\ f^{(n)}(0)=\cos\frac{\pi n}{2}.$

И формула Маклорена имеет вид

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\Theta x+\frac{\pi(n+1)}{2}\right),\ 0<\Theta<1$$

или $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\cos\left(\Theta x+\frac{2\pi n}{2}\right).$

4. $f(x)=\ln(1+x),\ f(0)=\ln 1=0;$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\ f'(0)=1;\ f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\ f''(0)=-1;$$

$$f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3},\ f'''(0)=2;\ f^{IV}(x)=-\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4},\ f^{IV}(0)=-2\cdot 3;\ \ldots;$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},\ f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Подставив в формулу Маклорена и, взяв остаточный член в форме Лагранжа, получим

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\cdot\frac{1}{(1+\Theta x)^n},\ 0<\Theta<1.$$

3.4. Исследование функций

3.4.1. Признаки монотонности функции

Замечание. В дальнейшем под словами «множество X» мы будем понимать множество, получающееся объединением конечного числа множеств вида $(a;b)$, $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$.

Теорема (необходимое условие монотонности).

1) Если дифференцируемая функция $f(x)$ на множестве X возрастает, то ее производная $f'(x)$ неотрицательна на этом множестве: $f'(x)\geq 0$.

2) Если дифференцируемая функция $f(x)$ на множестве X убывает, то ее производная $f'(x)$ на этом множестве неположительна: $f'(x)\leq 0$.

3) Если дифференцируемая функция $f(x)$ на множестве X сохраняет постоянное значение, то ее производная $f'(x)$ тождественно равна нулю: $f'(x)=0$.

Доказательство.

1) Пусть функция $f(x)$ на множестве X возрастает, т.е. $f(x+\Delta x)>f(x)$, если $\Delta x>0$, и $f(x+\Delta x)<f(x)$, если $\Delta x<0$ для любого x из рассматриваемого множества. Тогда отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0$ и не зависит от знака Δx.

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получаем, что $f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0$.

2) Если $f(x)$ убывает, то отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – величина отрицательная: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}<0$. Но тогда

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\leq 0.$$

3) Пусть $f(x)=c$. Тогда $f'(x)=0$.

Теорема (достаточное условие монотонности). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема во всех его внутренних точках. Тогда:*

1) если $f'(x)$ в интервале $(a;b)$ всюду положительна, то функция $f(x)$ в интервале $(a;b)$ возрастает;

2) если $f'(x)$ в интервале $(a;b)$ всюду отрицательна, то функция $f(x)$ в интервале $(a;b)$ убывает;

3) если $f'(x)$ в интервале $(a;b)$ всюду равна нулю, то функция $f(x)$ в интервале $(a;b)$ постоянна.

Доказательство. Возьмем произвольные точки x_1 и x_2 такие, что $a \le x_1 < x_2 \le b$ и применим к отрезку $[x_1; x_2]$ формулу конечных приращений

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),\ c \in (x_1; x_2).$$

1) Так как $x_2 - x_1 > 0$, $f'(c) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ и, следовательно, $f(x_2) > f(x_1)$ при $x_2 > x_1$. Но это и означает, что функция $f(x)$ возрастает.

2) Если $f'(c) < 0$, то $f(x_2) - f(x_1) < 0$ и, следовательно, $f(x_2) < f(x_1)$ при $x_2 > x_1$, т.е. функция $f(x)$ убывает.

3) Если $f'(c) = 0$, следовательно, $f(x_2) = f(x_1)$ при любых x_1 и x_2, т.е. функция $f(x)$ постоянна.

Пример. Исследовать на монотонность функцию $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 15$.

Решение. Область определения $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

1. Находим производную $y' = 6x^2 + 6x - 36 = 6\left(x^2 + x - 6\right)$.

2. Находим корни производной: $y' = 6\left(x^2 + x - 6\right) = 0,\ x_1 = -3,\ x_2 = 2$.

3. Корни производной разбивают область определения функции на промежутки: $(-\infty; -3)$, $(-3; 2)$, $(2; +\infty)$ (рис. 8).

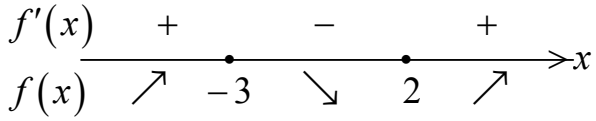

Рис. 8

На интервалах $(-\infty; -3)$ и $(2; +\infty)$ $f(x)$ возрастает, на интервале $(-3; 2)$ $f(x)$ убывает.

3.4.2. Экстремумы функции

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке экстремума x_0, то по теореме Ферма ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$. Могут, однако, встретиться случаи, когда в точках экстремума функция не имеет производной. Так, например, для функции $f(x) = |x|$, график которой изображен на рис. 9, в точке $x_0 = 0$ не существует производной.

Упражнение. Показать, что $y = |x|$ при $x = 0$ не имеет производной.

Но, очевидно, что в точке $x_0 = 0$ функция $y = |x|$ имеет минимум.

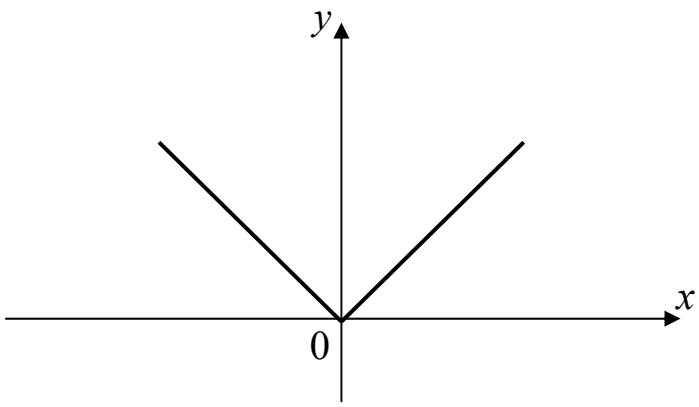

Рис. 9

Для функции $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$, график которой изображен на рис. 10, производная $f(x)=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ при $x=0$ не существует. Однако функция в этой точке имеет максимум.

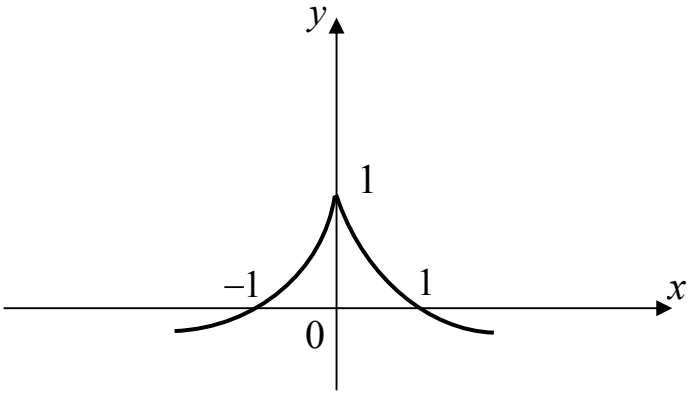

Рис. 10

Сформулируем теперь **необходимое условие экстремума:** *если в точке* x_0 *функция* $f(x)$ *достигает экстремума, то ее производная* $f'(x)$ *в этой точке либо равна нулю, либо не существует.*

Замечание. Данное условие не является достаточным для существования экстремума. Например, для функции $f(x)=x^3$ производная $f'(x)=3x^2$ обращается в нуль при $x=0$, однако при $x=0$ функция не имеет экстремума.

Определение. *Значения аргумента* $x=x_0$*, при которых производная функции* $f(x)$ *обращается в нуль или не существует, называются критическими точками функции.*

Таким образом, экстремум функции, если он существует, может иметь место только в критических точках. Однако не во всякой критической точке функция имеет экстремум.

Теорема (первый достаточный признак экстремума). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна в некоторой окрестности критической точки* x_0 *и имеет в этой окрестности производную всюду, кроме, быть может, самой точки* x_0*, тогда:*

если при $x < x_0$ *производная* $f'(x)$ *положительна, а при* $x > x_0$ *– отрицательна, то* x_0 *– точка максимума;*

если при $x < x_0$ *производная* $f'(x)$ *отрицательна, а при* $x > x_0$ *– положительна, то* x_0 *– точка минимума.*

Доказательство. Пусть при $x < x_0$ производная $f'(x) > 0$, это значит, что слева от точки x_0 находится некоторый интервал возрастания функции $f(x)$, примыкающий к точке x_0; при $x > x_0$ производная $f'(x) > 0$, значит справа от точки x_0 находится некоторый примыкающий к ней интервал убывания функции. Следовательно, точка x_0 есть точка максимума.

Совершенно аналогично исследуется второй случай, когда производная меняет знак при переходе аргумента слева направо через точку x_0 с минуса на плюс (рис. 11).

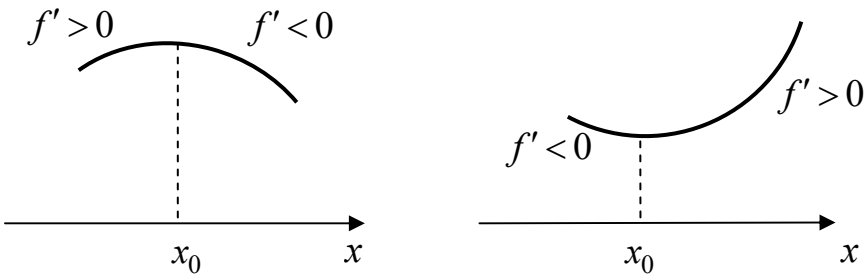

Рис. 11

Замечание. Если производная $f'(x)$ не меняет знака при переходе через критическую точку, то функция в этой точке не имеет ни максимума, ни минимума.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

Решение. 1) Находим производную $y = x^2 - 4x + 3$.

2) Приравниваем производную к нулю и находим корни производной (критические точки): $x^2 - 4x + 3 = 0$, $x_1 = 1, x_2 = 3$.

3) Последовательно исследуем каждую критическую точку. Результаты заносим в таблицу (табл. 1):

Таблица 1

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 3)$	3	$(3; +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	↗	максимум	↘	минимум	↗

Пример. Пусть задана производственная функция $Q(L)=200\sqrt{L}-4L$, выражающая объем выпускаемой фирмой продукции Q (производительность труда) в зависимости от количества имеющегося персонала L. Исследовать изменение объема выпускаемой продукции при изменении количества персонала.

Решение. Ответить на поставленный вопрос можно, вычислив предельную производительность труда:

$$MQ=Q'(L)=200\cdot\frac{1}{2\sqrt{L}}-4=\frac{100}{\sqrt{L}}-4=\frac{100-4\sqrt{L}}{\sqrt{L}}.$$

Найдем критические точки функции:

$$Q'(L)=\frac{100-4\sqrt{L}}{\sqrt{L}}=0,\ L=5.$$

При $0<L<5$ $Q'(L)>0$, т.е. производительность труда растет; При $L>5$ $Q'(L)<0$, т.е. производительность труда падает. Значит, оптимальное количество персонала равно 5.

Достаточные условия экстремума в терминах высших производных

Пусть функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, имеет в x_0 производные до порядка n включительно.

Если $f'(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$ и $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, то при n нечетном в x_0 экстремума нет, а при n четном есть, причем это минимум, если $f^{(n)}(x_0)>0$, и максимум, если $f^{(n)}(x_0)<0$.

Доказательство. Запишем разложение функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора

$$f(x)-f(x_0)=f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\alpha(x), \tag{3.4.1}$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$.

Поскольку $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, а $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$, то сумма $f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)$ имеет знак $f^{(n)}(x_0)$, когда x достаточно близко к x_0.

Если n нечетно, то при переходе слева направо через точку x_0 скобка $(x-x_0)^n$ меняет знак.

Тогда изменится знак всей правой, а значит и левой части равенства (3.4.1). Значит при нечетном n экстремума нет.

Если n четно, то $(x-x_0)^n>0$ при $x\neq x_0$, и, следовательно, в малой окрестности точки x_0 знак разности $f(x)-f(x_0)$ совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$: если $f^{(n)}(x_0)>0$, то $f(x)>f(x_0)$ и в точке x_0 функция имеет максимум; если $f^{(n)}(x_0)<0$, то $f(x)<f(x_0)$ и в точке x_0 функция имеет минимум.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $y = x^2 + 2\cos x - 2$.

Решение. Критическая точка $x_0 = 0$.

$y = x^2 + 2\cos x - 2$, $y(0) = 0$; $y' = 2x - 2\sin x$, $y'(0) = 0$; $y'' = 2 - 2\cos x$, $y''(0) = 0$; $y''' = 2\sin x$, $y'''(0) = 0$; $y^{IV} = 2\cos x$, $y^{IV}(0) = 2 \neq 0$. Число $n = 4$ – четное, значит в точке $x_0 = 0$ минимум, так как $y^{IV}(0) > 0$.

Пример. Исследовать на экстремумы функцию $y = 3x^3 + 4{,}5x^2 - 4x + 1$.

Решение. 1) $y' = 9x^2 + 9x - 4$.

2) Найдем критические точки $y' = 9x^2 + 9x - 4 = 0$, $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

3) $y'' = 18x + 9$.

4) Определим знак второй производной y'' в критических точках: $y''\left(-\frac{4}{3}\right) < 0$, значит $x = -\frac{4}{3}$ – точка максимума, $y''\left(\frac{1}{3}\right) > 0$, значит $x = \frac{1}{3}$ – точка минимума.

Пример. Зависимость выручки фирмы TR от объема производства Q задается формулой $TR = 200Q - Q^2$, зависимость издержек TC от объема производства – формулой $TC = Q^3 - 51Q^2 - 600Q + 4000$. Определить, при каком объеме производства фирма получит максимальную прибыль.

Решение. Прибыль определяется функцией: $\pi = TR - TC = \left(200Q - Q^2\right) - \left(Q^3 - 51Q^2 - 600Q + 4000\right) = -Q^3 + 50Q^2 + 800Q - 4000$.

Тогда предельная прибыль $M\pi = \pi' = -3Q^2 + 100Q + 800$. Критические точки функции прибыли находим из уравнения $\pi' = -3Q^2 + 100Q + 800 = 0$:

$$3Q^2 - 100Q - 800 = 0,\ Q_1 = 40,\ Q_2 = -\frac{20}{3}.$$

Значение Q_2 не подходит по смыслу задачи $(Q > 0)$.

Вторая производная $\pi'' = -6Q + 100$.

Определим знак второй производной в точке $Q = 40$: $\pi''(40) = -140 < 0$, значит, в точке $Q = 40$ прибыль максимальна.

Таким образом, максимальная прибыль в размере 44 000 будет получена фирмой при объеме производства $Q = 40$.

3.4.3. Выпуклость графика функции

Определение. *График дифференцируемой функции $f(x)$ называется выпуклым вверх (выпуклым) на интервале $(a; b)$, если он расположен не выше любой своей касательной.*

Определение. *График дифференцируемой функции* $f(x)$ *называется выпуклым вниз (вогнутым) на интервале* $(a;b)$*, если он расположен не ниже любой своей касательной* (рис. 12).

Определение. *Точка графика непрерывной функции, отделяющая его выпуклую вверх часть от выпуклой вниз, называется точкой перегиба.*

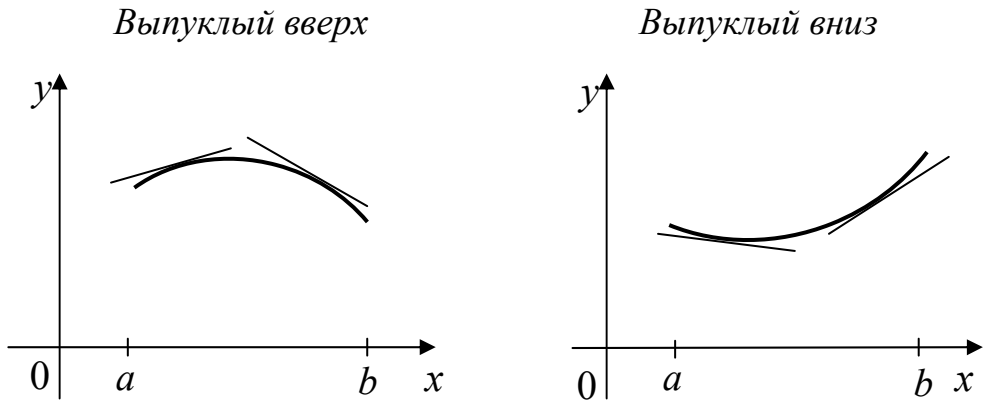

Рис. 12

Теорема (достаточный признак выпуклости вверх (вниз) графика). *Пусть функция* $f(x)$ *имеет вторую производную* $f''(x)$ *во всех точках интервала* $(a;b)$*. Если* $f''(x)<0$ *всюду в этом интервале, то график функции* $f(x)$ *выпуклый вверх, если же* $f''(x)>0$*, то – выпуклый вниз.*

Доказательство. Для определенности предположим, что $f''(x)<0$. Возьмем на графике функции произвольную точку M_0 с координатами $(x_0; f(x_0))$, $x_0 \in (a;b)$, и проведем через точку M_0 касательную (рис. 13).

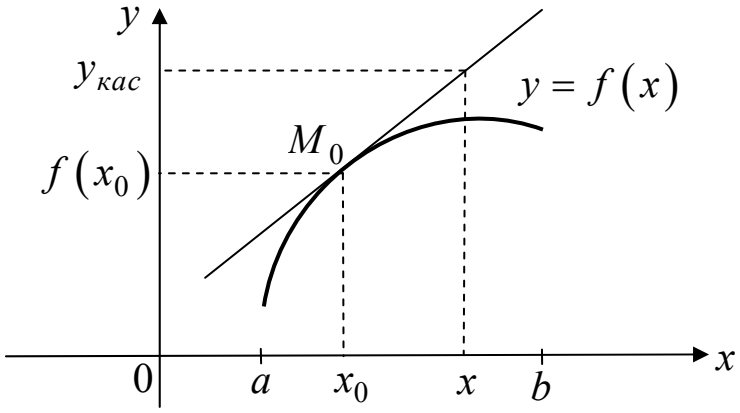

Рис. 13

Для доказательства теоремы мы должны установить, что график функции в интервале $(a;b)$ расположен ниже этой касательной, т.е. мы должны показать,

что для одной и той же абсциссы x ордината кривой меньше ординаты касательной.

Уравнение касательной $y_{кас} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, $y_{кас}$ – ордината касательной, соответствующая точке x. Разность ординат кривой и касательной при одной и той же абсциссе x равна $y - y_{кас} = f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right)$ или $y - y_{кас} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

Разность $f(x) - f(x_0)$ преобразуем по формуле конечных приращений

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),$$

где c заключено между x_0 и x. Тогда

$$y - y_{кас} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)\left(f'(c) - f'(x_0)\right).$$

Разность $f'(c) - f'(x_0)$ снова преобразуем по формуле конечных приращений:

$$f'(c) - f'(x_0) = (c - x_0) f''(c_1),$$

где c_1 заключено между c и x_0 и, следовательно, между x_0 и x. Получаем

$$y - y_{кас} = (x - x_0)(c - x_0) f''(c_1).$$

Разности $(x - x_0)$ и $(c - x_0)$ имеют одинаковый знак, так как c заключено между x_0 и x. Следовательно, $(x - x_0)(c - x_0) > 0$.

Так как по условию $f''(c_1) < 0$, то $y - y_{кас} < 0$, т.е. $y < y_{кас}$.

Аналогично доказывается, что при $f''(x) > 0$ график выпуклый вниз.

Теорема (достаточный признак существования точки перегиба). *Если вторая производная $f''(x)$ непрерывной функции $f(x)$ меняет знак при переходе через x_0, то точка с абсциссой $x = x_0$ является точкой перегиба графика функции.*

Упражнение. Доказать самостоятельно.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ имеет в интервале $(a; b)$ непрерывную вторую производную $f''(x)$. Тогда если точка с абсциссой $x_0 \in (a; b)$ является точкой перегиба, то $f''(x_0) = 0$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что $f''(x_0) \neq 0$. Пусть, для определенности $f''(x_0) > 0$. Тогда в силу предположения о непрерывности второй производной она является положительной в некоторой окрестности точки x_0, и, следовательно, график функции в этой окрестности выпуклый вниз. Но это противоречит тому, что x_0 есть абсцисса точки перегиба. Полученное противоречие показывает, что $f''(x_0) = 0$.

Замечание. Могут встретиться случаи, когда в точке x_0 вторая производная непрерывной функции разрывна или не существует.

Так, например, для функции $y=\sqrt[3]{x^5}$, $y''=\dfrac{10}{9\sqrt[3]{x}}$. Очевидно, что $y''<0$ при $x\in(-\infty;\,0)$ и $y''>0$ при $x\in(0;\,+\infty)$. Следовательно, $x=0$ – точка перегиба. Однако в этой точке вторая производная не существует.

Сформулируем теперь **необходимый признак существования точки перегиба.** *Если в точке с абсциссой x_0 график непрерывной функции $f(x)$ имеет точку перегиба, то вторая производная $f''(x)$ либо равна нулю $f''(x_0)=0$, либо не существует.*

Пример. Исследовать на выпуклость функцию $y=x^5+5x^4$.

Решение. 1) $y'=5x^4+20x^3$, $y''=20x^3+60x^2$.

2) $y''=20x^3+60x^2=0$, $x_1=-3,\ x_2=0$.

3) Исследуем знак второй производной и результат занесем в таблицу (табл. 2).

Таблица 2

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;\,0)$	0	$(0;\,+\infty)$
y''	–	0	+	0	+
y	график выпуклый вверх	точка перегиба	график выпуклый вниз		график выпуклый вниз

3.4.4. Асимптоты графика функции

Определение. *Асимптотой графика функции $f(x)$ называется прямая линия, обладающая тем свойством, что расстояние от точки на графике до прямой стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по графику от начала координат.*

Вертикальные асимптоты

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$. Тогда из определения следует, что прямая $x=x_0$ есть асимптота.

Аналогично, если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$, то прямая $x=x_0$ асимптота.

Таким образом, для отыскания вертикальных асимптот графика функции $f(x)$ надо найти значение $x=x_0$, при котором функция терпит бесконечный разрыв (хотя бы односторонний).

Пример. Найти вертикальные асимптоты графика функции $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$, то прямая $x=0$ есть асимптота.

Наклонные асимптоты

Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$. Для определения k и b поступим следующим образом. Возьмем на графике функции $f(x)$ точку $A(x; f(x))$. Тогда расстояние от асимптоты до точки A равно $\rho(x) = \dfrac{|f(x) - kx - b|}{\sqrt{1+k^2}}$. По условию $\lim\limits_{x\to+\infty} \rho(x) = 0$. Отсюда $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx - b) = 0$.

Поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x} \right) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{f(x)}{x} - k \right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} - k$.

Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k. \tag{3.4.2}$$

Если предел (3.4.2) существует, то определяем b

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) \tag{3.4.3}$$

Если хотя бы один из пределов (3.4.2) или (3.4.3) не существует, то наклонной асимптоты нет.

В частном случае коэффициент k в уравнении асимптоты может равняться нулю. В этом случае асимптота параллельна оси OX и называется горизонтальной.

Аналогично определяются асимптоты при $x \to -\infty$.

Пример. Найти наклонные асимптоты графика функции $y = \dfrac{1}{x} + x + e^{-x}$.

Решение. $x \to +\infty$, $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x} + x + e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^2} + 1 + \dfrac{1}{e^x \cdot x} \right) = 1$,

$b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x} + x + e^{-x} - x \right) = 0$.

Итак, при $x \to +\infty$ уравнение асимптоты $y = x$.

$x \to -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^2} + 1 + \dfrac{1}{e^x \cdot x} \right) = +\infty$. Следовательно, при $x \to -\infty$ наклонной асимптоты нет.

3.4.5. Полное исследование функции и построение графиков

План исследования функции и построения графика

Общее исследование функции удобно выполнять по следующей схеме.

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить, является ли функция четной или нечетной.
3. Проверить, является ли функции периодической.

4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.

5. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва функции (если они существуют) и установить характер разрыва.

6. Найти интервалы монотонности функции и точки экстремумов.

7. Найти точки перегиба графика функции и интервалы выпуклости.

8. Найти асимптоты графика функции.

Пример. Исследовать функцию $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ и построить ее график.

Решение.

1. Функция определена при всех значениях x за исключением точки $x = 0$.

2. Функция является нечетной, так как $f(-x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{-x} = -\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -f(x)$.

3. Функция не является периодической.

4. Точек пересечения с осями координат график функции не имеет. При этом, если $x > 0$, то $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} > 0$ и если $x < 0$, то $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} < 0$.

5. Точка $x = 0$ является точкой разрыва первого рода, так как

$$\lim_{x\to 0+0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to 0-0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$

6. Найдем первую производную функции: $y' = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{1+x^2} < 0$.

Экстремумов нет, функция убывает на интервалах $(-\infty;\, 0)$ и $(0;\, -\infty)$.

7. Вторая производная $y'' = \dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$. Если $x > 0$, то $y'' > 0$, график выпуклый вниз; если $x < 0$, то $y'' < 0$, график выпуклый вверх. Точек перегиба нет, так как точка $x = 0$ не принадлежит области определения.

8. Вертикальных асимптот нет, так как $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Найдем наклонную асимптоту $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x} = 0$, $b = \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = 0$.

Следовательно, $y = 0$ – горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$.

Так как функция является нечетной, то прямая $y=0$ также будет горизонтальной асимптотой и при $x\to-\infty$. График исследуемой функции изображен на рис. 14.

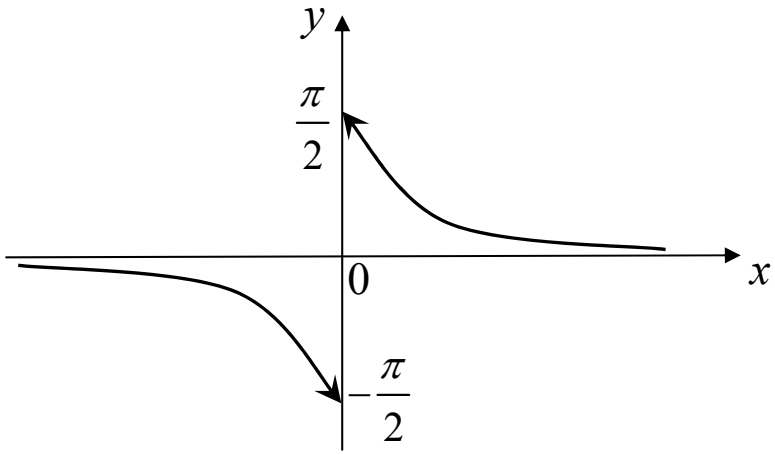

Рис. 14

Пример. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{(x-4)^2}$ и построить ее график.

Решение.

1. Функция определена при всех значениях x за исключением точки $x=4$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной (функция общего вида), так как $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x-4)^2}=-\dfrac{x^3}{(x+4)^2}$, $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$.

3. Функция не является периодической.

4. Точка пересечения графика функции с осями координат – точка $(0;0)$. При этом, если $x>0$, то $y=\dfrac{x^3}{(x-4)^2}>0$ и если $x<0$, то $y=\dfrac{x^3}{(x-4)^2}<0$.

5. Точка $x=4$ является точкой разрыва второго рода, так как

$$\lim_{x\to4+0}\frac{x^3}{(x-4)^2}=\lim_{x\to4-0}\frac{x^3}{(x-4)^2}=+\infty.$$

6. Найдем первую производную функции: $y'=\left(\dfrac{x^3}{(x-4)^2}\right)'=$

$$=\frac{\left(x^3\right)'(x-4)^2-x^3\left((x-4)^2\right)'}{\left((x-4)^2\right)^2}=\frac{3x^2(x-4)^2-x^3\cdot2(x-4)}{(x-4)^4}=\frac{x^2(x-12)}{(x-4)^3}.$$

Найдем критические точки функции: $y' = \dfrac{x^2(x-12)}{(x-4)^3} = 0$ при $x = 0$ и $x = 12$; y' не существует при $x = 4$.

Последовательно исследуем каждую критическую точку. Результаты заносим в таблицу (табл. 4):

Таблица 4

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 4)$	4	$(4; 12)$	12	$(12; +\infty)$
y'	+	0	+	не существует	–	0	+
y	↗	экстремума нет, $y(0) = 0$	↗	не существует	↘	минимум $y(12) = 27$	↗

7. Вторая производная $y'' = \left(\dfrac{x^2(x-12)}{(x-4)^3}\right)' =$

$$= \frac{\left(x^2(x-12)\right)'(x-4)^3 - x^2(x-12)\left((x-4)^3\right)'}{\left((x-4)^3\right)^2} = \frac{96x}{(x-4)^2}.$$

$y'' = \dfrac{96x}{(x-4)^2} = 0$ при $x = 0$; y' не существует при $x = 4$.

Исследуем знак второй производной и результат занесем в таблицу (табл. 5).

Таблица 5

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 4)$	4	$(4; +\infty)$
y''	–	0	+	не существует	+
y	график выпуклый вверх	точка перегиба, $y(0) = 0$	график выпуклый вниз	не существует	график выпуклый вниз

8. Вертикальной асимптотой является прямая $x = 4$, т.к. $\lim\limits_{x \to 4+0} \dfrac{x^3}{(x-4)^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 4-0} \dfrac{x^3}{(x-4)^2} = +\infty$.

Найдем наклонную асимптоту $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x(x-4)^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{(x-4)^2} = 1$,

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x-4)^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x(x-4)^2}{(x-4)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{8x^2 - 16x}{x^2 - 8x + 16} = 8.$$

Следовательно, прямая $y = x + 8$ является наклонной асимптотой при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

График исследуемой функции изображен на рис. 15.

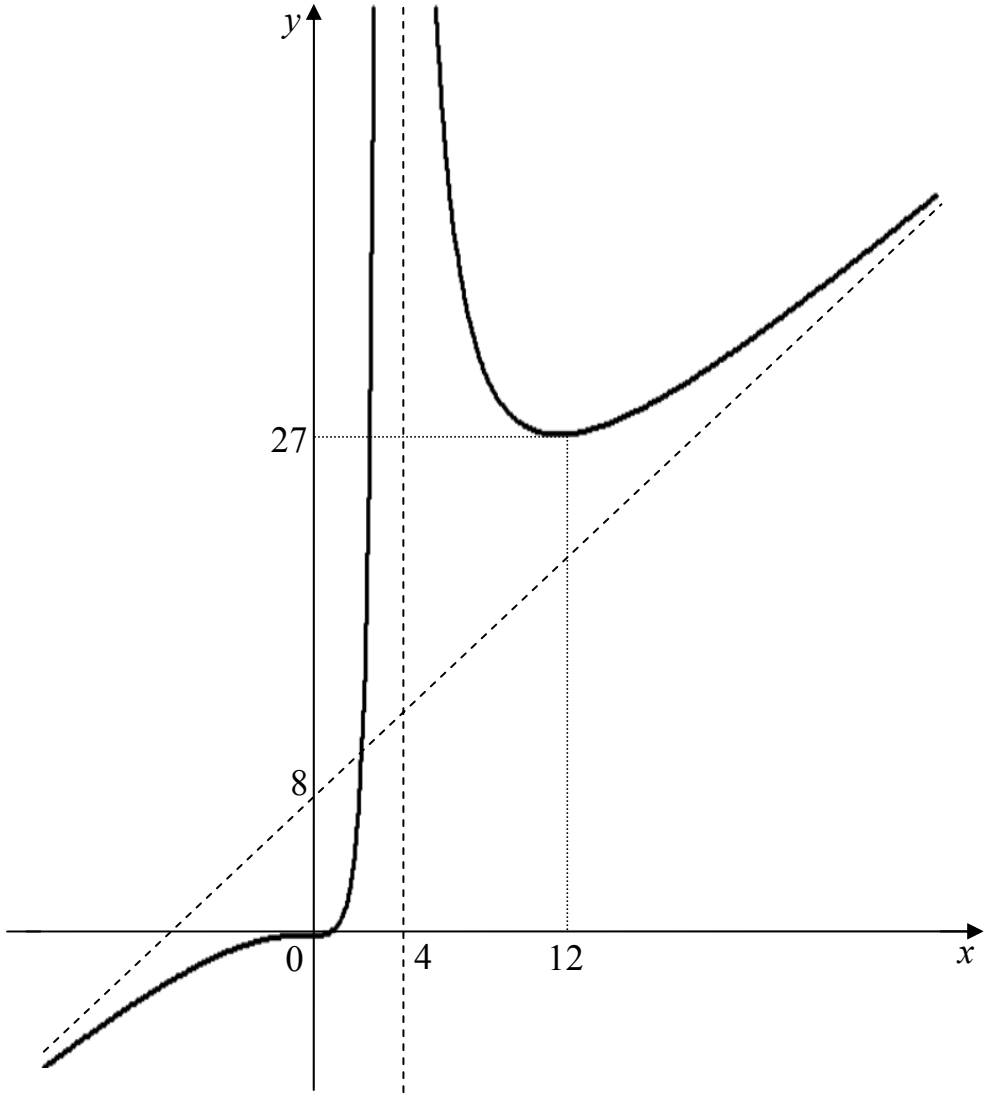

Рис. 15

3.5. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она достигает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке. Если наибольшее (или наименьшее) значение функции достигается внутри отрезка, то это значение явля-

ется одним из максимумом (минимумов) функции. Однако может случиться так, что наибольшее (наименьшее) значение будет достигаться на одном из концов отрезка.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего на отрезке $[a; b]$ значений непрерывной функции $f(x)$.

1. Найти критические точки функции.
2. Выбрать из них те, которые принадлежат отрезку $[a; b]$.
3. Вычислить значение функции в точках, отобранных в п. 2.
4. Вычислить значения функции на концах отрезка: $f(a)$ и $f(b)$.
5. Из всех полученных в пунктах 3 и 4 значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x$ на отрезке $[0; 3]$.

Решение. 1. Находим критические точки: $y' = 3x^2 - 3 = 0$, $x_1 = -1, x_2 = 1$.

2. Точка $x_1 = -1$ не принадлежит отрезку $[0; 3]$.

3. Вычисляем значение функции в критической точке $f(1) = -2$.

4. Вычисляем значения функции на концах отрезках $f(0) = 0$, $f(3) = 18$.

5. Наибольшее значение функции $y_{наиб} = 18$ достигается при $x = 3$, наименьшее значение функции $y_{наим} = -2$ достигается при $x = 1$.

Глава 4. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

4.1. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла

Определение. *Пусть функция* $f(x)$ *определена на интервале* $(a;b)$ *(или бесконечного интервала* $(-\infty;b)$, $(a;+\infty)$, $(-\infty;+\infty)$*). Функция* $F(x)$ *называется первообразной для функции* $f(x)$ *на интервале* $(a;b)$*, если она имеет производную в каждой точке этого интервала и эта производная совпадает с* $f(x)$*, т.е.*

$$F'(x)=f(x).$$

Например, $f(x)=\cos x \Rightarrow F(x)=\sin x$, $f(x)=2^x \Rightarrow F(x)=\dfrac{2^x}{\ln 2}$.

Отметим основные свойства первообразной.

Свойство 1. Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, то и функция $F(x)+C$, где C – любая постоянная, является первообразной для $f(x)$.

Действительно, если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $F'(x)=f(x)$ на $(a;b)$. Но

$$\left(F(x)+C\right)'=F'(x)+C'=F'(x)+0=f(x).$$

Свойство 2. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – первообразные для $f(x)$ на интервале $(a;b)$, то существует такая постоянная C, что

$$F_1(x)-F_2(x)=C$$

для любого x из $(a;b)$.

Рассмотрим производную разности функций $F_1(x)-F_2(x)$:

$$\left(F_1(x)-F_2(x)\right)'=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$$

для любого $x\in(a;b)$. Это означает, что $F_1(x)-F_2(x)=C$ на интервале $(a;b)$.

Следствие. Если для функции $f(x)$ известна первообразная $F(x)$ на интервале $(a;b)$, то все первообразные для $f(x)$ на этом интервале задаются формулой

$$F(x)+C.$$

Определение. *Совокупность всех первообразных для функции* $f(x)$ *называется неопределенным интегралом от функции* $f(x)$ *и обозначается*

$$\int f(x)dx\ .$$

В этом обозначении $\int$ – знак интеграла, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, $f(x)$ – подынтегральная функция.

Если $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$, то, согласно полученному следствию,

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – любая постоянная.

Примеры. $\int \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} + C\ (-1 < x < 1)$; $\int \cos x dx = \sin x + C\ (-\infty < x < +\infty)$.

Замечание. Сформулируем без доказательства ***теорему существования неопределенного интеграла***: если $f(x)$ непрерывна на интервале $(a; b)$, то на этом интервале существует первообразная для $f(x)$ и неопределенный интеграл.

4.2. Основные свойства неопределенного интеграла

Связь между дифференцированием и интегрированием:

1. $\int d(F(x)) = F(x) + C$.
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

Линейные свойства интеграла:

3. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.
4. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$.
5. Инвариантность формулы интегрирования. Если справедлива формула

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то для любой функции $\varphi(t)$, имеющей непрерывную производную, верна формула

$$\int f(\varphi(t))d(\varphi(t)) = F(\varphi(t)) + C.$$

Например, формула $\int \cos x dx = \sin x + C$ будет верна, если $x = e^t$:

$$\int \cos(e^t)d(e^t) = \sin(e^t) + C.$$

Все свойства доказываются на основании определения первообразной.

Докажем свойство 2. Найдем дифференциал обеих частей формулы

$$\int f(x)dx = F(x) + C:$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = (F(x) + C)'dx = (F'(x) + 0)dx = F'(x)dx = f(x)dx.$$

Докажем свойство 3. Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, $G(x)$ – первообразная для функции $g(x)$, т.е.

$$\int f(x)dx = F(x) + C_1,\ F'(x) = f(x),$$

$$\int g(x)dx = G(x) + C_2,\ G'(x) = g(x).$$

$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = F(x) \pm G(x) + C_1 \pm C_2 = F(x) \pm G(x) + C.$$

Найдем производную алгебраической суммы (разности) $F(x) \pm G(x)$, применяя свойства производной:

$$\left(F(x) \pm G(x)\right)' = F(x)' \pm G(x)' = f(x) \pm g(x).$$

Следовательно, $\int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = F(x) \pm G(x) + C$ и

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

4.3. Таблица неопределенных интегралов

Каждая формула таблицы производных, устанавливающая, что функция $F(x)$ имеет производную, равную $f(x)$, приводит нас, в силу определения неопределенного интеграла, к соответствующей формуле таблицы интегралов.

1. $\int 0 \cdot dx = C$.
2. $\int dx = x + C$.
3. $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$,

   $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$,

   $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$.
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \ (x \neq 0)$.
5. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $\int e^x\,dx = e^x + C$.
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ n \in Z\right)$.
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C \ \left(x \neq \pi n,\ n \in Z\right)$.

   $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C$,

   $\int \dfrac{dx}{x^2 + 1} = \mathrm{arctg}x + C$.
11. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$.

    $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$,

    $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$.
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.
14. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C$.
15. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

Докажем формулу 4, находя производную правой части.

а) Пусть $x > 0$, тогда $\ln|x| = \ln x$, $\left(\ln|x| + C\right)' = \left(\ln x + C\right)' = \dfrac{1}{x}$. Пусть $x < 0$, тогда $\ln|x| = \ln(-x)$, $\left(\ln|x| + C\right)' = \left(\ln(-x) + C\right)' = \dfrac{1}{-x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x}$. При всех $x \neq 0$ производная совпадает с подынтегральной функцией, т.е. $\ln|x|$ является первообразной для функции $\dfrac{1}{x}$.

Для формул 11, 13, 14 и 15 нет аналогов среди формул таблицы производных, но для их проверки достаточно убедиться в том, что производные функций, стоящих в правых частях этих формул, совпадают с соответствующими подынтегральными функциями. Проверим формулу 13:

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)'=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2\pm a^2}}\cdot 2x\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}+x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}.$$

Упражнение. Доказать формулы из таблицы интегралов.

Замечание. Некоторые интегралы не являются элементарными функциями, хотя и играют большую роль в прикладных задачах, для них составлены таблицы значений. Такими являются интегралы:

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int\frac{\cos x}{x}dx,\ \int\frac{\sin x}{x}dx,\ \int\frac{dx}{\ln x},\ \int\sin\left(x^2\right)dx.$$

4.4. Простейшие методы интегрирования

а) Разложение интеграла

Этот способ основан на применении линейных свойств интеграла.

Примеры.

1) $$\int\frac{x^3+3e^x x-2\sqrt[3]{x}+4}{x}dx=\int\left(\frac{x^3}{x}+\frac{3e^x x}{x}-\frac{2\sqrt[3]{x}}{x}+\frac{4}{x}\right)dx=\int x^2dx+3\int e^x dx-$$

$$-2\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}+4\int\frac{dx}{x}=\frac{x^3}{3}+3e^x-2\int x^{-\frac{2}{3}}dx+4\ln|x|+C=\frac{x^3}{3}+3e^x-2\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+4\ln|x|+C=$$

$$=\frac{x^3}{3}+3e^x-6\sqrt[3]{x}+4\ln|x|+C.$$

2) $$\int\left(x+\sqrt{x}\right)^2dx=\int\left(x^2+2x^{\frac{3}{2}}+x\right)dx=\int x^2dx+\int 2x^{\frac{3}{2}}dx+\int xdx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{2x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{x^2}{2}+C=\frac{x^3}{3}+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{x^2}{2}+C=\frac{x^3}{3}+\frac{4}{5}\sqrt{x^5}+\frac{x^2}{2}+C.$$

3) $$\int\frac{3\cos^2 x-7\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx=\int\left(\frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}-\frac{7\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\right)dx=$$

$$= 3\int\frac{dx}{\sin^2 x} - 7\int\frac{dx}{\cos^2 x} = -3\text{ctg}x - 7\text{tg}x + C.$$

4) $\int\frac{2x-1}{x+2}dx = \int\frac{2(x+2)-5}{x+2}dx = \int\left(\frac{2(x+2)}{x+2} - \frac{5}{x+2}\right)dx = \int 2\,dx - 5\int\frac{dx}{x+2} =$

$= 2x - 5\ln|x+2| + C.$

5) $\int\frac{x^2-5}{x^2+1}dx = \int\frac{(x^2+1)-6}{x^2+1}dx = \int\left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{6}{x^2+1}\right)dx = \int\left(1 - \frac{6}{x^2+1}\right)dx =$

$= \int dx - 6\int\frac{dx}{x^2+1} = x - 6\text{arctg}x + C.$

б) Подведение (внесение) под знак дифференциала

Этот метод интегрированием основан на свойстве инвариантности формул интегрирования.

1) $\int(x-3)^{20}dx.$

В этом примере удобно применить свойство инвариантности и использовать тот факт, что дифференциал постоянного равен нулю $(d(3)=0)$ и поэтому $dx = d(x-3)$.

$$\int(x-3)^{20}dx = \int(x-3)^{20}d(x-3) = \frac{(x-3)^{21}}{21} + C.$$

Отметим, что $\boxed{dx = d(x+a)}$, где a – любое число.

2) $\int(3x+5)^7 dx.$

Чтобы воспользоваться формулой 3 таблицы интегралов, надо вместо dx образовать выражение $d(3x+5)$, которое равно $3dx$. Используем для этого равенство $dx = \frac{1}{3}d(3x+5)$.

$$\int(3x+5)^7 dx = \int(3x+5)^7\cdot\frac{1}{3}d(3x+5) = \frac{1}{3}\int(3x+5)^7 d(3x+5) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+5)^8}{8} + C =$$

$$= \frac{(3x+5)^8}{24} + C.$$

В общем случае $\boxed{dx = \frac{1}{k}d(kx+a)}$, где a и k – любые числа, $k \neq 0$.

3) $\int\sin 2x\,dx = \int\sin 2x\cdot\frac{1}{2}d(2x) = \frac{1}{2}\int\sin 2x\cdot d(2x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$

4) $\int e^{-x^2}\cdot x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-x^2}\cdot d(x^2) = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}\cdot d(-x^2) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$

Чтобы воспользоваться формулой 5 таблицы интегралов, использовали равенство $\boxed{xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right)}$.

5) $\int \frac{2x^2dx}{4+x^6} = 2\cdot\frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^3\right)}{4+\left(x^3\right)^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2} + C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2} + C$.

Использовано равенство $\boxed{x^2\,dx = \frac{1}{3}d\left(x^3\right)}$ и формула 10 из таблицы интегралов.

Отметим в общем случае: $\boxed{x^k\,dx = \frac{1}{k+1}d\left(x^{k+1}\right),\ k \neq -1}$.

6) $\int \cos\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2} = -\int \cos\frac{1}{x}\cdot d\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin\frac{1}{x} + C$. $\boxed{\frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right)}$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\left(\sqrt{x}\right)} = 2\int \frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{\cos^2\left(\sqrt{x}\right)} = 2\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right) + C$. $\boxed{\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\left(\sqrt{x}\right)}$

8) $\int \operatorname{tg}x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d\left(\cos x\right)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$, т.к. $\boxed{\sin x dx = -d\left(\cos x\right)}$.

9) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2+3\sin x}} = \int \frac{d\left(\sin x\right)}{\sqrt{2+3\sin x}} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(2+3\sin x\right)}{\sqrt{2+3\sin x}} = \frac{2}{3}\sqrt{2+3\sin x} + C$.

$\boxed{\cos x\,dx = d\left(\sin x\right)}$

10) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int \frac{d\left(\ln x\right)}{\sqrt{\ln x}} = \int \left(\ln x\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(\ln x\right) = \frac{\left(\ln x\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{\ln x} + C$.

Здесь использовали равенство $\boxed{\frac{dx}{x} = d\left(\ln x\right)}$ и формулу 3 таблицы.

11) $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-9} = \int \frac{d\left(e^x\right)}{\left(e^x\right)^2 - 3^2} = \frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{e^x-3}{e^x+3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{e^x-3}{e^x+3}\right| + C$.

Использовали равенство $\boxed{e^x dx = d\left(e^x\right)}$ и формулу 11 таблицы интегралов.

12) $\int \frac{e^{\operatorname{tg}x}dx}{\cos^2 x} = \int e^{\operatorname{tg}x} d\left(\operatorname{tg}x\right) = e^{\operatorname{tg}x} + C$. $\boxed{\frac{dx}{\cos^2 x} = d\left(\operatorname{tg}x\right)}$

13) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{9-\operatorname{ctg}^2 x}} = -\int \frac{d\left(\operatorname{ctg}x\right)}{\sqrt{9-\operatorname{ctg}^2 x}} = -\arcsin\frac{\operatorname{ctg}x}{3} + C$. $\boxed{\frac{dx}{\sin^2 x} = -d\left(\operatorname{ctg}x\right)}$

14) $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sin\left(\operatorname{arctg}x\right)} = \int \frac{d\left(\operatorname{arctg}x\right)}{\sin\left(\operatorname{arctg}x\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg}x}{2}\right| + C$. $\boxed{\frac{dx}{1+x^2} = d\left(\operatorname{arctg}x\right)}$

15) $\int \frac{2^{\operatorname{arcctg}x}dx}{1+x^2} = -\int 2^{\operatorname{arcctg}x} d\left(\operatorname{arcctg}x\right) = -\frac{2^{\operatorname{arcctg}x}}{\ln 2} + C$. $\boxed{\frac{dx}{1+x^2} = -d\left(\operatorname{arcctg}x\right)}$

16) $\int \frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d\left(\arcsin x\right)}{\arcsin x} = \ln\left|\arcsin x\right| + C$. $\boxed{\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\left(\arcsin x\right)}$

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(\arccos^2 x - 3\right)}} = -\int \frac{d\left(\arccos x\right)}{\sqrt{\arccos^2 x - 3}} =$

$$-\ln\left|\arccos x + \sqrt{\arccos^2 x - 3}\right| + C.$$

$$\boxed{\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -d\left(\arccos x\right)}$$

в) Выделение полного квадрата из квадратного трехчлена

1) $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$.

Выделим в знаменателе полный квадрат и используем формулу 10 таблицы.

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-\left(x-1\right)^2}} = \int \frac{d\left(x-1\right)}{\sqrt{2^2-\left(x-1\right)^2}} = \arcsin \frac{x-1}{2} + C$.

Глава 5. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

5.1. Интегрирование по частям

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные, найдем производную их произведения

$$(uv)' = u'v + v'u .$$

Проинтегрируем обе части равенства

$$\int (uv)' dx = \int u'vdx + \int v'udx .$$

По определению интеграла $\int (uv)' dx = uv + C$, поэтому

$$uv + C = \int u'vdx + \int v'udx .$$

Кроме того, $u'dx = du$, $v'dx = dv$.

Константу C можно включить в неопределенные интегралы, входящие в это равенство, и получить формулу интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu .$$

Перечислим основные типы интегралов, вычисляемых этим методом, и укажем целесообразное разделение подынтегрального выражения на u и dv.

1) $\int x^m \cos axdx$ $\left(\int x^m \sin axdx\right)$.

В интегралах такого типа рекомендуются обозначения: $u = x^m$, $dv = \cos axdx$ $(dv = \sin axdx)$. Тогда $du = mx^{m-1}dx$, $v = \frac{1}{a}\sin ax$ $\left(v = -\frac{1}{a}\cos ax\right)$.

Пример. $\int x\cos 5x\,dx = \begin{bmatrix} u = x \\ dv = \cos 5x\,dx \\ du = dx \\ v = \frac{1}{5}\sin 5x \end{bmatrix} = x \cdot \frac{1}{5}\sin 5x - \int \frac{1}{5}\sin 5x\,dx = \frac{1}{5}x\sin 5x -$

$- \frac{1}{5}\int \sin 5x\,dx = \frac{1}{5}x\sin 5x + \frac{1}{25}\cos 5x + C$.

2) $\int x^m e^{ax}dx$. Здесь $u = x^m$, $dv = e^{ax}dx$, $du = mx^{m-1}dx$, $v = \frac{1}{a}e^{ax}$.

Пример. $\int (1-4x)e^{2x}dx = \begin{bmatrix} u = 1-4x \\ dv = e^{2x}dx \\ du = -4dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{bmatrix} = (1-4x)\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}(-4)dx =$

$$=\frac{1}{2}(1-4x)e^{2x}+2\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}(1-4x)e^{2x}+e^{2x}+C.$$

Замечание. В этих интегралах интегрирование по частям применяется столько раз, какова степень переменной x, т.е. m раз.

3) $\int x^m \arcsin x dx$ $\left(\int x^m \arccos x dx, \int x^m \mathrm{arctg} x dx, \int x^m \mathrm{arcctg} x dx\right)$.

В этих интегралах $dv = x^m dx$, $u = \arcsin x$ $(u = \arccos x, u = \mathrm{arctg} x, u = \mathrm{arcctg} x)$.

Тогда $v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left(du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, du = \frac{dx}{x^2+1}, du = -\frac{dx}{x^2+1}\right)$.

Пример.

$$\int \mathrm{arcctg}\, x dx = \begin{bmatrix} u = \mathrm{arcctg}\, x; & du = -\frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx; & v = x \end{bmatrix} = \mathrm{arcctg}\, x \cdot x - \int x\left(-\frac{dx}{1+x^2}\right) = x \cdot \mathrm{arcctg}\, x +$$

$$+\int \frac{xdx}{1+x^2} = x \cdot \mathrm{arcctg}\, x + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = x \cdot \mathrm{arcctg}\, x + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

4) $\int x^m \log_a^k x\, dx$, $m \neq -1$.

Здесь $u = \log_a^k x$, $dv = x^m dx$, $du = k \cdot \log_a^{k-1} x \cdot \frac{1}{x \ln a} \cdot dx$, $v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$.

Пример. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \begin{bmatrix} u = \ln x; & du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}; & v = 3\sqrt[3]{x} \end{bmatrix} = \ln x \cdot 3\sqrt[3]{x} - \int 3\sqrt[3]{x} \cdot \frac{dx}{x} = 3\sqrt[3]{x} \ln x -$

$$-3\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\sqrt[3]{x} \ln x - 3 \cdot 3\sqrt[3]{x} + C = 3\sqrt[3]{x}\left(\ln x - 3\right) + C.$$

5) $\int e^{ax} \cos bx\, dx$ $\left(\int e^{ax} \sin bx\, dx\right)$.

В интегралах такого типа можно ввести следующие обозначения $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx dx$ $(dv = \sin bx dx)$. Тогда $du = ae^{ax} dx$, $v = \frac{1}{b}\sin bx$ $\left(v = -\frac{1}{b}\cos bx\right)$.

Формула интегрирования по частям применяется дважды, в результате чего получается уравнение, из которого и находится исходный интеграл. Такие интегралы называются «круговыми».

Пример. $\int e^{-2x}\cos 3x\,dx = \begin{bmatrix} u = e^{-2x} \\ dv = \cos 3x\,dx \\ du = -2e^{-2x}\,dx \\ v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{bmatrix} = e^{-2x}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x - \int\frac{1}{3}\sin 3x(-2)e^{-2x}\,dx =$

$$= \frac{1}{3}e^{-2x}\sin 3x + \frac{2}{3}\int e^{-2x}\sin 3x\,dx = \begin{bmatrix} u = e^{-2x} \\ dv = \sin 3x dx \\ du = -2e^{-2x}dx \\ v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}e^{-2x}\sin 3x + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{-2x}\cdot\cos 3x - \int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\left(-2e^{-2x}\right)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{3}e^{-2x}\sin 3x - \frac{2}{9}e^{-2x}\cos x - \frac{4}{9}\int e^{-2x}\cos 3x\,dx.$$

Получили уравнение относительно искомого интеграла:

$$\int e^{-2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}e^{-2x}\sin 3x - \frac{2}{9}e^{-2x}\cdot\cos 3x - \frac{4}{9}\int e^{-2x}\cos 3x\,dx,$$

$$\left(1+\frac{4}{9}\right)\int e^{-2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}e^{-2x}\sin 3x - \frac{2}{9}e^{-2x}\cos 3x.$$

Отсюда найдем интеграл:

$$\int e^{-2x}\cos 3x\,dx = \frac{9}{13}\left(\frac{1}{3}e^{-2x}\sin 3x - \frac{2}{9}e^{-2x}\cos 3x\right) + C = \frac{1}{13}e^{-2x}\left(3\sin 3x - 2\cos 3x\right) + C.$$

Замечание. Можно было получить тот же результат, взяв в качестве u не показательную, а тригонометрическую функцию: $\cos 3x$ или $\sin 3x$, соответственно. Важно оба раза брать функцию одного и того же вида при каждом применении формулы интегрирования по частям.

5.2. Интегрирование подстановкой или заменой переменной

Этот метод основан на свойстве инвариантности формул интегрирования: если справедлива формула $\int f(x)dx = F(x) + C$, то для любой функции $\varphi(t)$, имеющей непрерывную производную, заменяя $x = \varphi(t)$, получаем

$$\int f(\varphi(t))\cdot d(\varphi(t)) = F(\varphi(t)) + C \text{ или } \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Вычислив полученный интеграл относительно новой переменной t, выразим из равенства $x = \varphi(t)$ переменную $t = \psi(x)$ и подставим ее выражение в полученный результат.

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}dx = \begin{bmatrix} t=\sqrt{x} \\ x=t^2 \\ dx=2tdt \end{bmatrix} = \int \frac{t+1}{t-1}\cdot 2t\cdot dt = 2\int \frac{t^2+t}{t-1}dt =$$

$$\begin{array}{r|l} -\ t^2+t & t-1 \\ \hline t^2-t & t+2 \\ \hline -\ 2t & \\ 2t-2 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

[разделим числитель на знаменатель]

$$= 2\int\left(t+2+\frac{2}{t-1}\right)dt = 2\left(\frac{t^2}{2}+2t+2\cdot\ln|t-1|\right)+C = \left[\text{подставим } t=\sqrt{x}\right] =$$

$$= x+4\sqrt{x}+4\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+C.$$

5.3. Интегрирование рациональных функций

Как известно, функция $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – заданные числа, называется многочленом степени n.

Определение. *Отношение двух многочленов*

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$$

называется рациональной функцией или рациональной дробью.

Определение. *Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя: $m < n$, и неправильной, когда $m \geq n$.*

Рассмотрим, как вычисляются интегралы от рациональных дробей, т.е.

$$\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}dx.$$

1. Если дробь $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ неправильная, то следует выделить целую часть (например, разделив числитель на знаменатель столбиком) и представить дробь в виде суммы

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{P_n(x)},$$

где $q(x)$ – частное, $r(x)$ – остаток, причем, степень остатка $r(x)$ меньше степени знаменателя, т.е. дробь $\dfrac{r(x)}{P_n(x)}$ является правильной.

Тогда $\displaystyle\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}dx = \int q(x)dx + \int \frac{r(x)}{P_n(x)}dx$. Первое слагаемое есть интеграл от многочлена $q(x)$ и легко находится, второе слагаемое есть интеграл от правильной дроби. Интегрированием правильной дроби мы и займемся.

2. Среди правильных дробей выделим четыре типа дробей, называемых *простейшими* $\left(A,\ b,\ M,\ N,\ p,\ q \in \mathbb{R},\ D = p^2 - 4q < 0\right)$:

I. $\dfrac{A}{x-b}$. II. $\dfrac{A}{(x-b)^k}$ $(k = 1,2,3,...)$.

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$. IV. $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ $(k = 1,2,3,...)$.

Найдем интегралы этих дробей.

I. $\displaystyle\int \frac{A}{x-b}dx = A \cdot \ln|x-b| + C$.

II. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-b)^k}dx = A\int (x-b)^{-k}dx = A \cdot \frac{(x-b)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{-k+1} \cdot \frac{1}{(x-b)^{k-1}} + C$.

III. $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \underbrace{q - \frac{p^2}{4}}_{a^2}}dx = \begin{bmatrix} t = x + \frac{p}{2} \\ x = t - \frac{p}{2} \\ dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2 + a^2}dt =$$

$$= \int \frac{Mt + N - \frac{Mp}{2}}{t^2 + a^2}dt = M\int \frac{t\,dt}{t^2 + a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2 + a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|t^2 + a^2\right| + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \cdot \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|x^2 + px + q\right| + \frac{N - \frac{M \cdot p}{2}}{a}\operatorname{arctg}\frac{x + \frac{p}{2}}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|x^2 + px + q\right| + \frac{2N - Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{2x + p}{2a} + C.$$

IV. $$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = \begin{bmatrix} t = x + \frac{p}{2} \\ x = t - \frac{p}{2} \\ dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{Mt + N - \frac{Mp}{2}}{\left(t^2 + a^2\right)^k}dt =$$

$$= M\int \frac{t\,dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k}.$$

Вычислим каждый из этих интегралов.

$$\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{2}\frac{\left(t^2+a^2\right)^{-k+1}}{-k+1} + C =$$

$$= -\frac{1}{2(k-1)} \cdot \frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + C = -\frac{1}{2(k-1)} \cdot \frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}} + C.$$

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left(t^2+a^2\right)-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt.$$

К интегралу $\int \frac{t^2\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$ применим метод интегрирования по частям.

$$\int \frac{t^2\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \begin{bmatrix} u = t \\ dv = \dfrac{t\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} \\ du = dt \\ v = \dfrac{-1}{2(k-1)} \cdot \dfrac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2(k-1)} \cdot \frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}.$$

Подставим полученное выражение. После преобразований получим:

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} - \frac{1}{a^2}\left(-\frac{1}{2(k-1)} \cdot \frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2(k-1)a^2} \cdot \frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)\cdot a^2}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}.$$

Если обозначить $J_k = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$, получим формулу

$$J_k = \frac{1}{2(k-1)a^2} \cdot \frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)} \cdot \frac{1}{a^2} J_{k-1}.$$

Эта формула относится к разряду рекуррентных (возвратных) формул, она «возвращает» J_k к J_{k-1}, затем к J_{k-2} и т.д.

3. Вернемся к вычислению интеграла от правильной дроби, т.е.

$$\int \frac{r(x)}{P_n(x)} dx .$$

Разложим знаменатель дроби $P_n(x)$ на множители, среди которых будут множители вида $(x-b)^k$, где b – корень многочлена $P_n(x)$, и вида $\left(x^2+px+q\right)^l$, где $\left(x^2+px+q\right)$ не имеет корней, т.е. $D=p^2-4q<0$. Таким образом, знаменатель $P_n(x)$ будет разложен на множители следующим образом

$$P_n(x)=a_n(x-b_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-b_r)^{k_r}\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s}, \qquad (5.3.1)$$

где $b_1, \ldots, b_r$ – действительные корни многочлена $P_n(x)$, а каждый квадратный трехчлен имеет отрицательный дискриминант.

4. Всякая правильная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей I–IV типов. При этом

– множителю $(x-b)$ в (5.3.1) соответствует в этой сумме простейшая дробь

$$\frac{A}{x-b},$$

где A – некоторый коэффициент;

– множителю $(x-b)^k$ в (5.3.1) соответствует сумма k простейших дробей, имеющая вид

$$\frac{A_1}{(x-b)^k}+\frac{A_2}{(x-b)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_k}{x-b},$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_k$ – некоторые коэффициенты;

– множителю $\left(x^2+px+q\right)$ в (5.3.1) соответствует простейшая дробь вида

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q},$$

где M, N – некоторые коэффициенты;

– множителю $\left(x^2+px+q\right)^l$ соответствует сумма простейших дробей вида

$$\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)^l}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^{l-1}}+\ldots+\frac{M_lx+N_l}{x^2+px+q}.$$

5. Разложив подынтегральную дробь в сумму простейших, находим коэффициенты разложения. Для этого приводим правую часть к общему знаменателю, отбрасываем знаменатели в обеих частях равенства и получаем тождественное равенство, содержащее неизвестные коэффициенты.

Рассмотрим на примере операцию разложения правильной дроби в сумму простейших дробей.

Пример. Дробь $\dfrac{x^2+2}{x^2(x-1)^2}$ разложить на простейшие. Имеем:

$$\frac{x^2+2}{x^2(x-1)^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

Чтобы найти A, B, C, D приведем правую часть к общему знаменателю и отбросим знаменатели в обеих частях равенства.

$$\frac{x^2+2}{x^2(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)^2+Cx^2+Dx^2(x-1)}{x^2(x-1)^2},$$

$$x^2+2=A(x-1)^2+Bx(x-1)^2+Cx^2+Dx^2(x-1). \qquad (5.3.2)$$

В правой части равенства раскроем скобки, приведем подобные.

$$x^2+2=(B+D)x^3+(A-2B+C-D)x^2+(-2A+B)x+A.$$

Сравним коэффициенты у одинаковых степеней слева и справа:

$$\left.\begin{array}{lcc} x^3 & : & B+D=0 \\ x^2 & : & A-2B+C-D=1 \\ x & : & -2A+B=0 \\ x^0 & : & A=2 \end{array}\right\}$$

Получили систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Решив ее, найдем значения коэффициентов A, B, C, D.

Можно для нахождения коэффициентов разложения применить метод частных значений. Вернемся к равенству (5.3.2):

$$x^2+2=A(x-1)^2+Bx(x-1)^2+Cx^2+Dx^2(x-1).$$

Будем давать x значения, равные корням знаменателя, т.е. числам 0 и 1, которые обратят в нуль множители правой части равенства (5.3.2):

$$\begin{array}{lcl} x=0 & : & 2=A \\ x=1 & : & 3=C \end{array}$$

Сразу нашли два коэффициента, для нахождения двух других коэффициентов достаточно получить только два уравнения, сравнив коэффициенты только у двух одинаковых степеней, например, при x^3 и x:

$$\begin{array}{l} x^3: 0=B+D \Rightarrow D=-B \\ x\ : 0=-2A+B \Rightarrow B=2A=4\ \Rightarrow\ D=-4 \end{array}$$

Получили разложение исходной дроби в сумму простейших дробей:

$$\frac{x^2+2}{x^2(x-1)^2}=\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x}+\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{4}{x-1}.$$

Опишем кратко последовательность действий при интегрировании рациональных дробей. Ищем интеграл $\int\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}dx$:

а) если дробь $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ неправильная, выделяем ее целую часть, делим числитель на знаменатель столбиком, представляем дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби (п. 1)

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{P_n(x)};$$

б) знаменатель правильной дроби $\dfrac{r(x)}{P_n(x)}$ раскладываем на множители (п. 3);

в) представляем правильную дробь в виде суммы простейших дробей (п. 4);

г) находим коэффициенты разложения (п. 5);

д) вычисляем интегралы от каждого слагаемого, находим интеграл от данной дроби (п. 2).

Пример. Вычислить $\displaystyle\int \frac{x^4-3}{x^3+8}dx$.

а) Дробь $\dfrac{x^4-3}{x^3+8}$ неправильная, выделим ее целую часть: $\dfrac{x^4-3}{x^3+8} = x - \dfrac{8x+3}{x^3+8}$.

$$\begin{array}{r|l} x^4 \qquad\quad -3 & x^3+8 \\ \cline{2-2} -\underline{x^4+8x} \qquad\quad & x \\ -8x-3 & \end{array}$$

Тогда $\displaystyle\int \frac{x^4-3}{x^3+8}dx = \int\left(x - \frac{8x+3}{x^3+8}\right)dx = \int x\,dx - \int \frac{8x+3}{x^3+8}dx = \frac{x^2}{2} - \int \frac{8x+3}{x^3+8}dx$.

Ищем интеграл от правильной дроби $\dfrac{8x+3}{x^3+8}$:

б) $\dfrac{8x+3}{x^3+8} = \dfrac{8x+3}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}$;

в) $\dfrac{8x+3}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{Bx+C}{x^2-2x+4}$;

г) $\dfrac{8x+3}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)} = \dfrac{A\left(x^2-2x+4\right)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}$,

$$8x+3 = A\left(x^2-2x+4\right)+(Bx+C)(x+2).$$

Подставим в обе части значение $x=-2$: $-13 = 12A \Rightarrow A = -\dfrac{13}{12}$.

Составим два уравнения для нахождения B и C:

$$\begin{array}{ll} x^2 & : \\ x^0 & : \end{array}\begin{cases} 0 = A + B & \Rightarrow \quad B = -A = \dfrac{13}{12} \\ 3 = 4A + 2C & \Rightarrow \quad C = \dfrac{1}{2}(3 - 4A) = \dfrac{11}{3} \end{cases}$$

Получаем разложение дроби:

$$\frac{8x+3}{x^3+8} = -\frac{13}{12}\cdot\frac{1}{x+2} + \frac{\frac{13}{12}x + \frac{11}{3}}{x^2-2x+4} = -\frac{13}{12}\cdot\frac{1}{x+2} + \frac{1}{12}\cdot\frac{13x+44}{x^2-2x+4}.$$

д) Находим интеграл исходной дроби как сумму интегралов:

$$\int\frac{x^4-3}{x^3+8}dx = \frac{x^2}{2} - \int\frac{8x+3}{x^3+8}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{13}{12}\int\frac{dx}{x+2} - \frac{1}{12}\int\frac{13x+44}{x^2-2x+4}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{13}{12}\ln|x+2| - \frac{13}{24}\ln\left(x^2-2x+4\right) - \frac{19}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$\int\frac{13x+44}{x^2-2x+4}dx = \int\frac{13x+44}{(x-1)^2+3}dx = \begin{bmatrix} x-1=t \\ x=t+1 \\ dx=dt \end{bmatrix} =$$

$$= 13\int\frac{t\,dt}{t^2+3} + 57\int\frac{dt}{t^2+3} = \frac{13}{2}\ln\left(t^2+3\right) + \frac{57}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{13}{2}\ln\left(x^2-2x+4\right) + \frac{57}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

5.4. Интегрирование тригонометрических выражений

1) Интегралы $\int\cos nx\cdot\cos mx\,dx$, $\int\sin nx\cdot\cos mx\,dx$, $\int\sin nx\cdot\sin mx\,dx$.

Чтобы вычислить эти интегралы, следует представить подынтегральное произведение в виде суммы, используя формулы:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right),$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right),$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right).$$

Пример.

$$\int\sin 13x\cdot\cos 5x\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\sin 18x + \sin 8x\right)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{18}\cos 18x - \frac{1}{8}\cos 8x\right) + C.$$

2) Интегралы $\int\sin^m x\cdot\cos^n x\,dx$.

а) m и n – целые неотрицательные, четные. Следует понизить степени путем перехода к двойным углам, т.е. использовать формулы

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},\ \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

Пример. $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx = \int \left(\frac{1}{2}(1+\cos x) \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int \left(1 + 2\cos x + \cos^2 x\right) dx =$

$$= \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos x dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 x dx = \frac{1}{4} x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4} x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{16} \sin 2x + C = \frac{3}{8} x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{16} \sin 2x + C.$$

б) По крайней мере один из показателей степени положительное, целое, нечетное число. Следует применить метод «отщепления», т.е. от нечетной степени «отщепить» один множитель, внести его под знак дифференциала и оставшуюся четную степень преобразовать, используя тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Пример. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{\cos x}} \cdot \sin x \, dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{\cos x}} d(\cos x) =$

$$= -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\sqrt[3]{\cos x}} d(\cos x) = [\cos x = t] = -\int \frac{1 - t^2}{\sqrt[3]{t}} dt = \int \left(\frac{t^2}{\sqrt[3]{t}} - \frac{1}{\sqrt[3]{t}} \right) dt =$$

$$= \int t^{\frac{5}{3}} dt - \int t^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{t^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} - \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{8} \sqrt[3]{\cos^8 x} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{\cos^2 x} + C.$$

в) Похожий прием полезен и в случае, когда хотя бы одно из n и m целое отрицательное нечетное число. Здесь надо вместо «отщепления» делать домножение на функцию, которая стоит в нечетной степени.

Пример. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x \left(1 - \sin^2 x\right)} = [\sin x = t] =$

$$= \int \frac{dt}{t^2 \left(1 - t^2\right)} = \int \frac{\left(1 - t^2\right) + t^2}{t^2 \left(1 - t^2\right)} dt = \int \left(\frac{1 - t^2}{t^2 \left(1 - t^2\right)} + \frac{t^2}{t^2 \left(1 - t^2\right)} \right) dt = \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{1 - t^2} =$$

$$= -\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = -\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C.$$

Замечание. Обозначим через $R(u,v)$ рациональное выражение от функций u и v, т.е. эти функции входят в выражение в целых положительных степенях.

3) Интегралы $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где $R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$.

Если для подынтегральной функции справедливо равенство

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

следует использовать замену

$$t=\mathrm{tg}x \quad \Rightarrow \quad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2x}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\sin x=\cos x\cdot \mathrm{tg}x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример. $\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\left[\begin{array}{c} t=\mathrm{tg}x \\ x=\mathrm{arctg}t \\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{array}\right]=\int\frac{dt}{1+t^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{1+t^2}}=\int\frac{\left(t^2+1\right)dt}{\left(1+t^2\right)\left(t^2+2\right)}=$

$=\int\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{2}}+C.$

Подстановку $t=\mathrm{tg}x$ или $t=\mathrm{ctg}x$ следует использовать и в случаях, когда подынтегральная функция зависит от $\mathrm{tg}x$ или $\mathrm{ctg}x$ соответственно.

Пример. $\int\mathrm{tg}^6x\,dx=\left[\begin{array}{c} t=\mathrm{tg}x \\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{array}\right]=\int t^6\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\left[\begin{array}{c}\text{выделим целую часть} \\ \text{дроби}\end{array}\right]=$

$=\int\left(t^4-t^2+1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+t-\mathrm{arctg}t+C=\frac{\mathrm{tg}^5x}{5}-\frac{\mathrm{tg}^3x}{3}+\mathrm{tg}x-x+C.$

4) Универсальная тригонометрическая подстановка.

Любой интеграл вида $\int R\left(\sin x,\cos x\right)dx$ может быть сведен к интегралу от рациональной дроби подстановкой, называемой *универсальной*:

$$t=\mathrm{tg}\frac{x}{2},\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+3\sin x}=\left[\begin{array}{cc} t=\mathrm{tg}\frac{x}{2} & \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2} & t_1=\mathrm{tg}0=0 \\ & t_2=\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1 \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} & \end{array}\right]=\int\limits_0^1\frac{1}{2+3\cdot\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}=$

$=\int\limits_0^1\frac{2\,dt}{2t^2+2+6t}=\int\limits_0^1\frac{2\,dt}{2\left(t^2+3t+1\right)}=\int\limits_0^1\frac{dt}{t^2+3t+1}=\int\limits_0^1\frac{dt}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}}\ln\left|\frac{t+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{t+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|\Bigg|_0^1=$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\ln\left|\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\right|-\ln\left|\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right|\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$

5.5. Интегрирование иррациональных выражений

1) Интегралы вида $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ вычисляются так же, как и простейшие дроби III типа: выделяется полный квадрат в подкоренном выражении и полученную в скобках сумму принимают за новую переменную (см. п. 5.3).

2) Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx$ сводятся к интегралу от рациональной дроби заменой переменной

$$t=\sqrt[n]{ax+b}.$$

Если подынтегральная функция содержит несколько корней различных степеней из одного и того же линейного выражения, то за новую переменную t надо взять корень n-й степени из этого выражения, где n – наименьшее общее кратное всех показателей корней, входящих в подынтегральную функцию.

Например,

$$\int \frac{2-\sqrt[3]{2x+3}+\sqrt[4]{2x+3}}{1-2\sqrt{2x+3}}dx, \text{ подстановка } t=\sqrt[12]{2x+3}.$$

3) Интегрирование применением тригонометрических подстановок.

Интегралы вида

$$\int R\left(x;\sqrt{a^2-x^2}\right)dx, \int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx, \int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)dx.$$

сводятся к интегралам от тригонометрических функций применением подстановок, избавляющих подынтегральное выражение от корней. Рассмотрим каждый случай подробно.

а) $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, $x=a\sin t$, $dx=a\cos t dt$,

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)}=\sqrt{a^2\cos^2 t}=a\cos t.$$

б) $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, $x=\frac{a}{\cos t}$, $dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$,

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=\sqrt{a^2\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=\frac{a\sin t}{\cos t}.$$

в) $\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)dx$, $x=a\,\mathrm{tg}t$, $dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt$,

$$\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2\mathrm{tg}^2 t+a^2}=\sqrt{a^2\left(\mathrm{tg}^2 t+1\right)}=\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{\cos^2 t}}=\frac{a}{\cos t}.$$

Пример. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{3+x^2}} = \left[\begin{array}{c} x=\sqrt{3}\cdot \mathrm{tg}t \\ \sqrt{3+x^2}=\frac{\sqrt{3}}{\cos t} \\ dx=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}dt \end{array}\right] = \int \frac{\sqrt{3}\,dt}{\cos^2 t\cdot\left(\sqrt{3}\mathrm{tg}t\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos t}} =$

$$= \int \frac{\cos t\cdot\cos^2 t}{\cos^2 t\cdot 3\cdot\sin^2 t}dt = \frac{1}{3}\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt = \frac{1}{3}\int\frac{d\left(\sin t\right)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sin t}+C = \left[\begin{array}{c} \mathrm{tg}t=\frac{x}{\sqrt{3}} \\ \sin^2 t=\frac{\mathrm{tg}^2 t}{1+\mathrm{tg}^2 t} \\ \sin t=\frac{\mathrm{tg}t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}} \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{x^2}{3}}}{\frac{x}{\sqrt{3}}}+C = -\frac{\sqrt{3+x^2}}{3x}+C.$$

Глава 6. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

6.1. Понятие определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a; b]$ определена функция $f(x)$. Разобьем отрезок $[a; b]$ на более мелкие части точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Будем называть их *точками деления*.

Обозначим $\Delta_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, 2, ..., n$. Величина Δ_k равна длине k-й части отрезка. Обозначим через Δx наибольшую длину отрезка: $\Delta x = \max\limits_{k=1,2,...,n} \{|\Delta_k|\}$.

На каждой k-й части отрезка произвольным образом выберем точку c_k. Назовем точки c_k *точками разметки* (рис. 16).

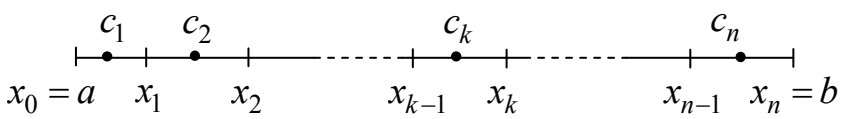

Рис. 16

Далее вычислим значения функции $f(x)$ в точках разметки $f(c_k)$ и составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta_k .$$

Составленная сумма называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Каждому разбиению отрезка $[a; b]$ соответствует определенное значение интегральной суммы, зависящее от выбора точек деления и точек разметки.

Определение. *Если существует предел интегральных сумм при неограниченном измельчении разбиения отрезка $[a; b]$ и величина этого предела не зависит от выбора точек деления и точек разметки, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на $[a; b]$, а этот предел называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a; b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta_k .$$

Замечание 1. Примем *по определению*, что при $a > b$ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, а также, что $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Замечание 2. Достаточным условием существования определенного интеграла служит непрерывность подынтегральной функции, т.е. если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, она интегрируема на этом отрезке.

6.2. Геометрический смысл определенного интеграла. Вычисление площади криволинейной трапеции

Пусть на отрезке $[a; b]$ $(a < b)$ задана непрерывная функция $y = f(x)$, принимающая на $[a; b]$ неотрицательные значения, $f(x) \geq 0$. Часть плоскости, ограниченная сверху линией $y = f(x)$, снизу отрезком $[a; b]$, слева прямой $x = a$, справа прямой $x = b$, будем называть *криволинейной трапецией*.

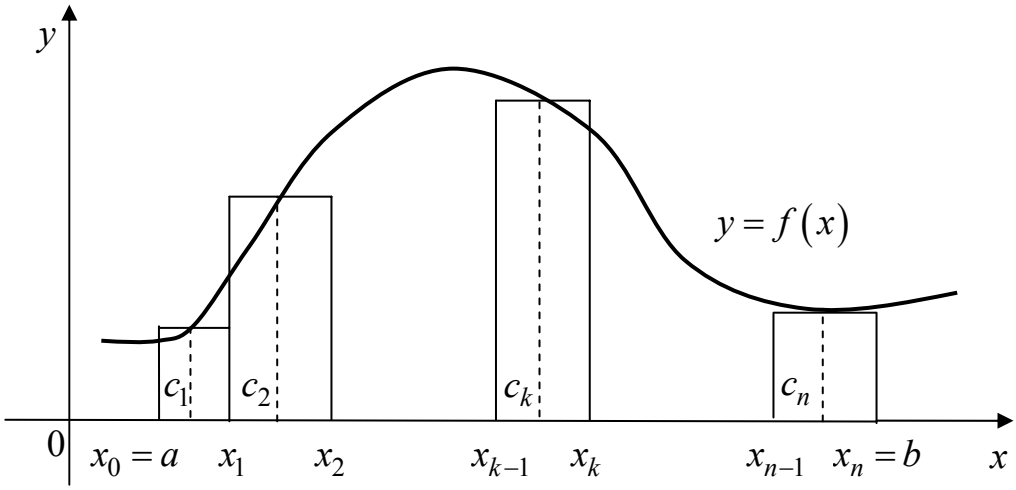

Рис. 17

Разобьем отрезок $[a; b]$ на части точками $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, величина $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ равна длине k-й части отрезка (рис. 17).

Обозначим ΔS_k площадь части криволинейной трапеции, находящейся над k-й частью отрезка $[a; b]$. Ясно, что площадь криволинейной трапеции равна сумме этих частей:

$$S_{крив.тр.} = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k .$$

Выберем на каждой части отрезка произвольным образом точку c_k и заменим площадь ΔS_k площадью прямоугольника с тем же основанием Δ_k и высотой, рав-

ной значению функции $f(x)$ в выбранной точке c_k, т.е. $f(c_k)$. При этом площадь криволинейной трапеции заменится площадью ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников, построенных на каждой из частей данного отрезка $[a; b]$. Выразим площадь построенной ступенчатой фигуры:

$$S_{ст.ф.} = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta_k .$$

И тогда площадь криволинейной трапеции приближенно равняется площади ступенчатой фигуры

$$S_{крив.тр.} \approx S_{ст.ф.} .$$

Это приближенное равенство будет тем точнее, чем мельче разбиение отрезка $[a; b]$. Поэтому за точное значение площади криволинейной трапеции следует принять предел, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры при неограниченном измельчении разбиения отрезка $[a; b]$:

$$S_{крив.тр.} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta_k = \int_a^b f(x)dx .$$

Таким образом, геометрически определенный интеграл от непрерывной неотрицательной функции равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

6.3. Экономический смысл определенного интеграла

Пусть непрерывная функция $z = f(t)$ задает производительность труда на некотором предприятии в момент времени $t \in [0; T]$. Найдем объем продукции, произведенной за весь промежуток времени $[0; T]$.

Разобьем отрезок $[0; T]$ на части точками $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = T$, величина $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ равна длительности k-го промежутка времени, $k = 1, 2, ..., n$.

Обозначим Δu_k объем продукции, произведенной за промежуток времени $[t_{k-1}; t_k]$. Эта величина приближенно равна

$$\Delta u_k \approx f(c_k)\Delta t_k ,$$

где c_k – некоторый момент времени из промежутка $[t_{k-1}; t_k]$.

Вся произведенная продукция примерно равна сумме этих частей:

$$u \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta u_k = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta t_k .$$

Это приближенное равенство будет тем точнее, чем мельче разбиение отрезка $[0; T]$. Поэтому за точное значение объема продукции примем предел, к которому стремится сумма $\sum_{k=1}^{n} \Delta u_k$ при неограниченном измельчении разбиения отрезка:

$$u = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta t_k ,$$

что, согласно определению определенного интеграла, равно

$$u = \int_0^T f(t) dt .$$

Пример. Пусть производительность цеха в течение рабочего дня изменяется в соответствии с функцией $z = f(t) = -0,05t^2 + 0,6t + 14$ (ден. ед./ч.). Начало рабочего дня соответствует $t = 0$ ч.

Тогда стоимость произведенной к моменту времени t ч. продукции (объем произведенной продукции в стоимостном выражении) задается функцией

$$u(t) = \int_0^t f(t) dt = \int_0^t \left(-0,05t^2 + 0,6t + 14\right) dt =$$

$$= \left(-0,05\frac{t^3}{3} + 0,6\frac{t^2}{2} + 14t \right)\Bigg|_0^t = -\frac{t^3}{60} + \frac{3t^2}{10} + 14t .$$

За всю смену рабочий произведет продукции на

$$u(8) = -\frac{8^3}{60} + \frac{3 \cdot 8^2}{10} + 14 \cdot 8 \approx 149,1 \text{ (ден. ед.).}$$

6.4. Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx .$

2. $\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx .$

Для доказательства этих свойств нужно представить каждый из интегралов, стоящих в левой части, как предел интегральной суммы и воспользоваться свойствами пределов.

Докажем свойство 2.

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} \lambda \cdot f(c_k) \Delta_k = \lambda \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta_k = \lambda \int_a^b f(x) dx .$$

3. $\int_a^b dx = b - a .$

Доказательство. $\int_a^b dx = \int_a^b 1 \cdot dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta_k = \lim_{\Delta x \to 0} (b - a) = b - a .$

4. Свойство аддитивности

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$. При любом расположении точек a, b, c справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. Сначала будем считать, что $a < c < b$ (рис. 18).

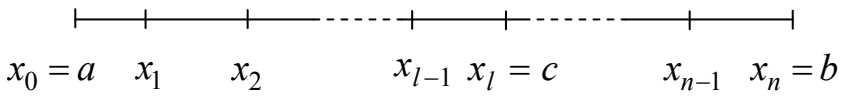

Рис. 18

Разобьем отрезок $[a;b]$ на мелкие части так, чтобы точка c являлась одной из точек деления, запишем интеграл:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta_k .$$

Разобьем интегральную сумму на две части так, чтобы $x_l = c$. В первую сумму сгруппируем все слагаемые, относящиеся к отрезку $[a;c]$, во вторую – относящиеся к отрезку $[c;b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta_k = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sum_{k=1}^{l} f(c_k)\Delta_k + \sum_{k=l+1}^{n} f(c_k)\Delta_k \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{l} f(c_k)\Delta_k + \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=l+1}^{n} f(c_k)\Delta_k = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Пусть теперь точки расположены иначе, например, $b < a < c$ (рис. 19).

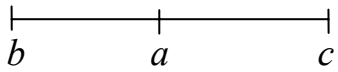

Рис. 19

По доказанному, $\int_b^c f(x)dx = \int_b^a f(x)dx + \int_a^c f(x)dx$. Поменяем местами пределы интегрирования и перенесем первые слагаемые из одной части равенства в другую:

$$-\int_c^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx, \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Свойства определенного интеграла, выражаемые неравенствами

В свойствах, приведенных в этом разделе, будем предполагать, что $a < b$.

Сохранение знака интеграла. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ и неотрицательна на нем, то интеграл от функции $f(x)$ по этому отрезку неотрицателен, т.е. если $f(x) \geq 0$ при всех $x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Доказательство. $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta_k$. Так как $f(c_k) \geq 0$, $\Delta_k \geq 0$, то $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta_k \geq 0$, поэтому $\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta_k \geq 0$ по свойству предела.

Интегрирование неравенств. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a; b]$ и $f(x) \geq g(x)$ для всех $x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Функция $f(x) - g(x)$ неотрицательна на $[a; b]$. По предыдущему свойству $\int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0$. Применяя свойства 1 и 2, получаем

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0, \text{ т.е.}$$

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Оценка определенного интеграла. Пусть $f(x)$ непрерывна (значит и интегрируема) на $[a; b]$, пусть M, m соответственно наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Тогда

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Доказательство. Так как M и m – наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ на $[a; b]$, то для любой точки x отрезка $[a; b]$ выполняется неравенство

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Проинтегрировав это неравенство, получаем

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx, \; m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Замечание. Геометрический смысл оценки.
Площадь криволинейной трапеции заключена между площадями S_1 и S_2 двух прямоугольников (рис. 20).

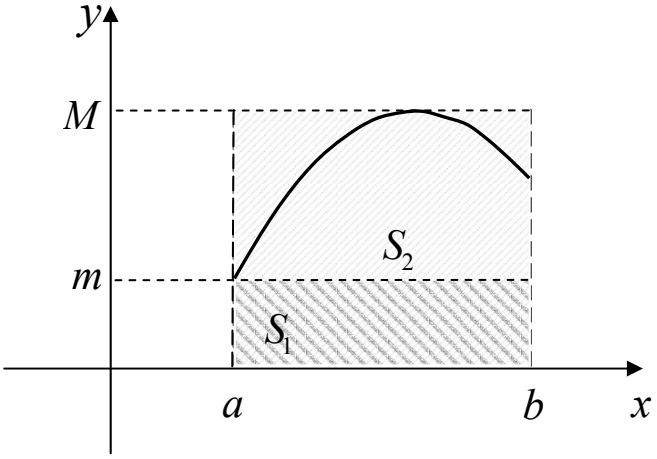

Рис. 20

Теорема о среднем интегральном значении. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то на этом отрезке существует такая точка c, что выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Доказательство. Из полученной оценки следует

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

В средней части неравенства стоит некоторое число, заключенное между наименьшим и наибольшим значениями функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, на отрезке существует некоторая точка c, в которой функция $f(x)$ принимает именно это значение

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,\ c \in [a; b].$$

Умножив обе части на $(b-a)$, получим требуемое равенство

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Замечание. Число $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется *средним интегральным значением функции* $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

6.5. Вычисление определенного интеграла

Удобное правило для вычисления определенного интеграла дается теоремой Ньютона-Лейбница. Чтобы доказать эту основную теорему интегрального исчисления, рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Рассмотрим интеграл от функции $f(t)$ в пределах от точки $t=a$ до произвольной точки x отрезка $[a;b]$. Этот интеграл представляет собой функцию своего верхнего предела. Обозначим эту функцию $\Phi(x)$: $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$.

Теорема (о производной интеграла с переменным верхним пределом). *Производная определенного интеграла от непрерывной функции по его переменному верхнему пределу равна значению подынтегральной функции в точке верхнего предела, т.е.*

$$\Phi'(x)=\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'=f(x).$$

Доказательство. Вычислим требуемую производную согласно определению производной и покажем геометрический смысл произведенных вычислений (рис. 21)

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}.$$

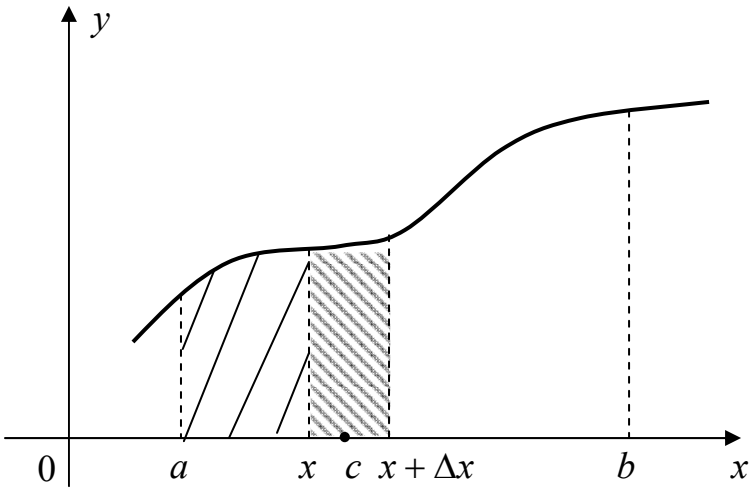

Рис. 21

Вычислим выражение, стоящее в числителе:

$$\Phi(x+\Delta x)=\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int\limits_a^x f(t)dt+\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt,\ \Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt,$$

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(c)\big((x+\Delta x)-x\big)=f(c)\cdot\Delta x,$$

$c\in[x;\,x+\Delta x]$ (по теореме о среднем интегральном значении).

Вычислим производную $\Phi'(x)$:

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)=\lim_{c\to x} f(c)=f(x),$$

так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\,b]$.

Замечание. В теореме доказано, что интеграл с переменным верхним пределом является одной из первообразных для подынтегральной функции.

Теорема Ньютона-Лейбница. *Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\,b]$, а $F(x)$ – одна из ее первообразных. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)\ (\textit{формула Ньютона-Лейбница}).$$

Доказательство. Согласно предыдущей теореме, функция $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ является одной из первообразных для функции $f(t)$, следовательно, $\Phi(x)$ и $F(x)$, как две первообразные, отличаются друг от друга на постоянную, т.е.

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x)+C,\ C=\text{const}.$$

Найдем значение C, подставляя вместо x значение a в обе части равенства и используя равенство $\int_a^a f(t)\,dt=0$: $0=F(a)+C$, откуда $C=-F(a)$, т.е.

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x)-F(a).$$

Заменим в этом равенстве x на b, переменную t переобозначим на x и получим формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

Это равенство записывают в виде $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$.

Замечание. Формула Ньютона-Лейбница – основная формула в интегральном исчислении, она приводит вычисление определенного интеграла от непрерывной функции $f(x)$ к отысканию первообразной $F(x)$ для данной функции $f(x)$.

Пример. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sqrt{9+7\cos x}} = -\frac{1}{7}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(9+7\cos x\right)}{\sqrt{9+7\cos x}} = -\frac{1}{7}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(9+7\cos x\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(9+7\cos x\right) =$

$$= -\frac{2}{7}\sqrt{9+7\cos x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{7}\left(\sqrt{9}-\sqrt{16}\right) = -\frac{2}{7}\left(3-4\right) = \frac{2}{7}.$$

Пример. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right) dx =$

$$= \frac{1}{4}\left(x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x\, dx \right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\sin\pi - \sin 0\right) + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos 4x\right) dx \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}\left(\sin 2\pi - \sin 0\right) \right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\pi = \frac{3}{16}\pi.$$

Для определенных интегралов **формула интегрирования по частям** имеет вид

$$\int\limits_a^b u dv = uv\Bigg|_a^b - \int\limits_a^b v du.$$

Пример.

$$\int\limits_1^e x^2 \ln^2 x\, dx = \begin{bmatrix} u = \ln^2 x \\ dv = x^2 dx \\ du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix} = \frac{x^3 \ln^2 x}{3}\Bigg|_1^e - \frac{2}{3}\int\limits_1^e x^2 \ln x\, dx = \begin{bmatrix} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \\ du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{e^3 \ln^2 e - 1^3 \cdot \ln^2 1}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3 \cdot \ln x}{3}\Bigg|_1^e - \frac{1}{3}\int\limits_1^e x^2\, dx \right) = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{e^3 \ln e - 1^3 \cdot \ln 1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^e \right) =$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} \right) = \frac{5e^3 - 2}{27}.$$

При **замене переменной** в определенном интеграле одновременно с заменой подынтегрального выражения следует пересчитать пределы интегрирования:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{bmatrix} x=\varphi(t) \\ \alpha \le t \le \beta \end{bmatrix} = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Новые пределы α и β получаем из уравнений: $\varphi(t)=a$, корень $t=\alpha$ дает нижний предел, $\varphi(t)=b$, корень $t=\beta$ дает верхний предел.

Пример. $$\int_0^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \begin{bmatrix} t=\sqrt{e^x+1} & dx=\dfrac{2t}{t^2-1}dt \\ e^x=t^2-1 & \alpha=\sqrt{e^0+1}=\sqrt{2} \\ x=\ln(t^2-1) & \beta=\sqrt{e^{\ln 3}+1}=2 \end{bmatrix} = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{2t\cdot dt}{(t^2-1)t} = 2\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2} = \ln\frac{1}{3} - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \ln\frac{\sqrt{2}+1}{3(\sqrt{2}-1)}.$$

Пример.

$$\int_{-2}^{1} \sqrt{5-4x-x^2}\,dx = \int_{-2}^{1} \sqrt{9-(x+2)^2}\,dx = \begin{bmatrix} x+2=3\sin t & t_1: -2+2=3\sin t \\ & t_1=0 \\ \sqrt{9-(x+2)^2}=3\cos t & t_2: 1+2=3\sin t \\ dx=3\cos t\cdot dt & t_2=\dfrac{\pi}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t\cdot 3\cos t\,dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{9}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{4}.$$

Глава 7. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

7.1. Интегралы по неограниченному промежутку

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a; b]$, где $b > a$.

Определение. *Несобственным интегралом* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *называется предел* $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, *т.е.*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если этот предел существует, то интеграл называется сходящимся, если не существует, то интеграл называется расходящимся.

Аналогично определяется $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$:

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ определяется через два предыдущих $(c$ – любое число$)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

Последний интеграл является сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части равенства. Если хотя бы один из них расходится, то и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ является расходящимся. Интеграл по неограниченному промежутку называют *несобственным интегралом I рода*.

Пример. Пусть p – любое число. Рассмотрим $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$.

а) $p = 1$, $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}(\ln b - \ln 1) = +\infty$. Интеграл расходится.

б) $p \neq 1$, $\int\limits_1^b\frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to+\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}\left(b^{1-p} - 1\right)$.

Если $p<1$, то $1-p>0$ и $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}\left(b^{1-p}-1\right)=+\infty$. Интеграл расходится.

Если $p>1$, то $1-p<0$ и $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}\left(b^{1-p}-1\right)=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right)=$ $=\frac{1}{1-p}(0-1)=\frac{1}{p-1}$. Интеграл сходится.

Таким образом,

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}\ \begin{cases}\text{сходится при } & p>1,\\ \text{расходится при } & p\le 1.\end{cases}$$

Геометрический смысл несобственного интеграла I рода

Пусть функция $f(x)$ положительна при $x\in[a;+\infty)$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx$ выражает площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$. Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ выражает площадь неограниченной области, лежащей между линиями $y=f(x)$, $x=a$, $y=0$ (рис. 22).

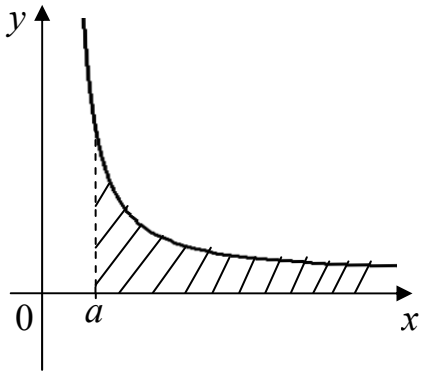

Рис. 22

Замечание. Несобственный интеграл можно находить, применяя формулу Ньютона–Лейбница. Обозначим $\lim\limits_{b\to+\infty}F(b)=F(+\infty)$, $\lim\limits_{b\to-\infty}F(b)=F(-\infty)$. Тогда

$$\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}F(x)\Big|_a^b=\lim_{b\to+\infty}\left(F(b)-F(a)\right)=$$

$$=F(+\infty)-F(a)=F(x)\Big|_a^{+\infty},\ \int\limits_{-\infty}^b f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^b \text{ и } \int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

Пример. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2e^{2x}}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$. Интеграл сходится и равен $\frac{1}{2}$.

Пример. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$. Интеграл сходится и равен π.

7.2. Интеграл от неограниченной функции

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале $[a; b)$, а в точке $x = b$ имеет бесконечный разрыв (рис. 23), т.е. $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$. Пусть $\varepsilon > 0$ – некоторое число.

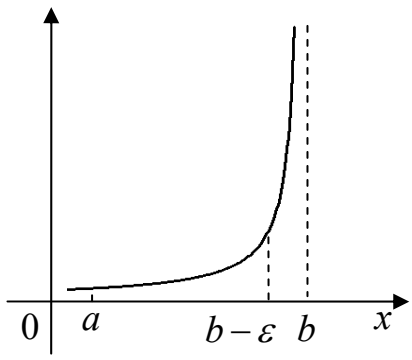

Рис. 23

Рассмотрим отрезок $[a; b-\varepsilon]$. На нем функция $f(x)$ непрерывна, интеграл от $f(x)$ по отрезку $[a; b-\varepsilon]$ существует и зависит от числа ε:

$$J(\varepsilon) = \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Определение. *Несобственным интегралом по отрезку* $[a; b]$ *от функции, имеющей бесконечный разрыв в точке* b*, называется предел*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Если этот предел существует, интеграл называется сходящимся, если предел не существует, интеграл называют расходящимся.

Обозначают:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Аналогично определяется $\int\limits_a^b f(x)dx$, если $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке a (рис. 24):

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

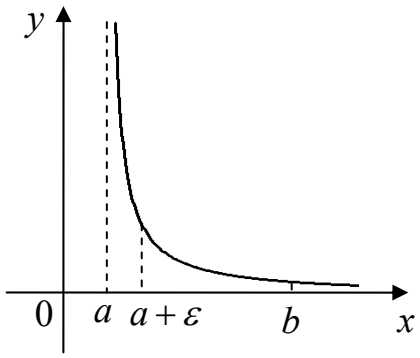

Рис. 24

Если $f(x)$ имеет бесконечный разрыв во внутренней точке отрезка (рис. 25), то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx.$$

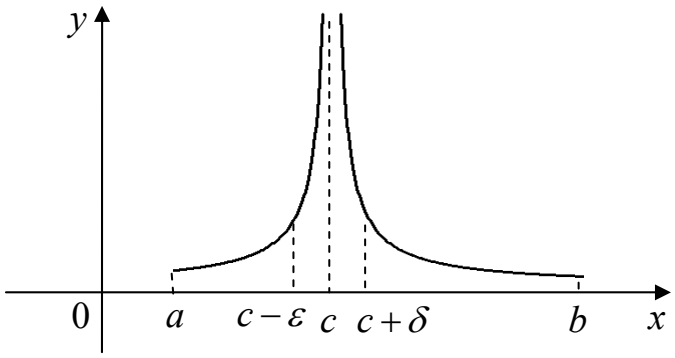

Рис. 25

Пример. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-2)^4} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{2-\varepsilon}\frac{dx}{(x-2)^4} = \left(\begin{array}{c}\text{функция имеет}\\ \text{бесконечный разрыв}\\ \text{в точке } x=2\end{array}\right) =$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{3(x-2)^3}\Bigg|_0^{2-\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{3(-\varepsilon)^3}+\frac{1}{3\cdot(-2)^3}\right) = \infty$. Интеграл расходится.

Пример. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$.

1) $p=1$, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \ln x\Big|_{\varepsilon}^{1} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\ln 1 - \ln\varepsilon\right) = +\infty$. Интеграл расходится.

2) $p\neq 1$, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_{\varepsilon}^{1} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{1-p} - \frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p}\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & p<1, \\ \infty, & p>1. \end{cases}$

Получили:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} \begin{cases} \text{сходится при } p<1, \\ \text{расходится при } p\geq 1. \end{cases}$$

Глава 8. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

8.1. Вычисление площадей плоских фигур

1) Если на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $f(x)$, $f(x)\geq 0$ для всех $x\in[a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ выражает площадь криволинейной трапеции (см. п. 5.2 и рис. 26). Тогда

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx.$$

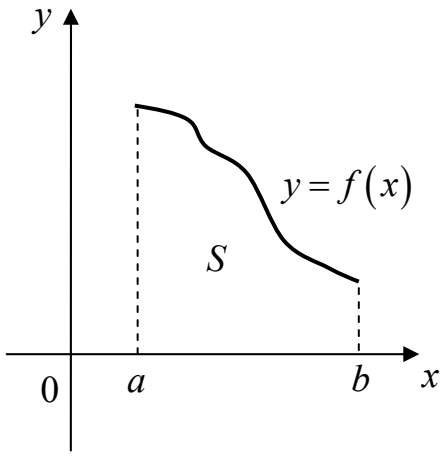

Рис. 26

2) Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $f(x)\leq 0$ на $[a;b]$ (рис. 27), то $S=-\int\limits_a^b f(x)dx$.

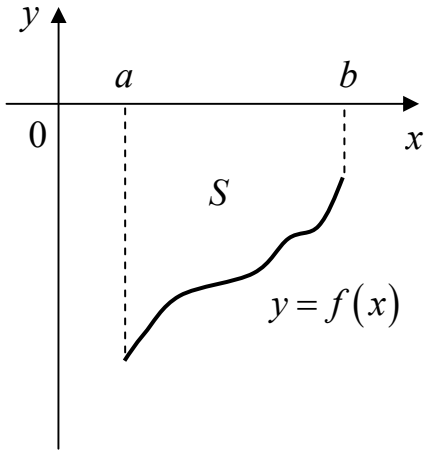

Рис. 27

3) Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и меняет на нем знак, то $S=\int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Например, $S=S_1+S_2+S_3=-\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_b^c f(x)dx-\int\limits_c^d f(x)dx$ (рис. 28).

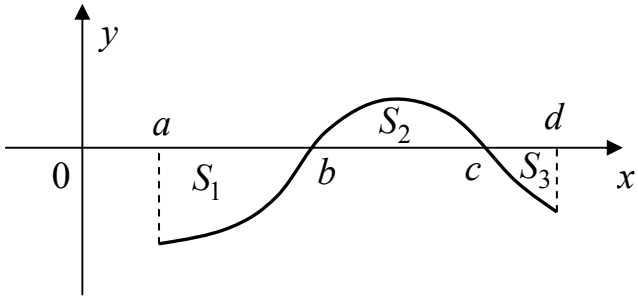

Рис. 28

4) Если площадь ограничена сверху и снизу линиями $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ соответственно (рис. 29), то

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx .$$

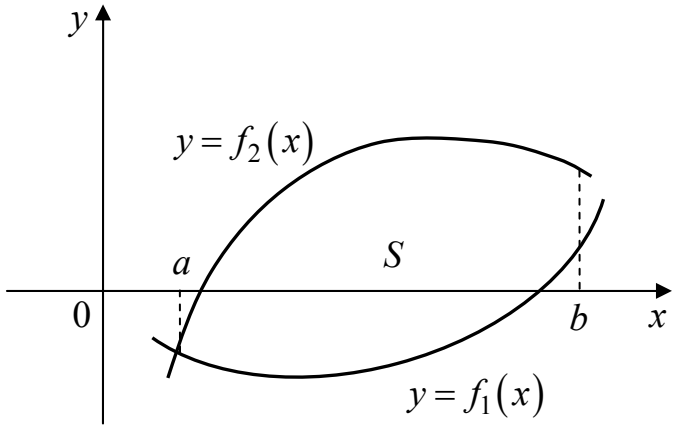

Рис. 29

5) Если фигура не является криволинейной трапецией, ее разбивают на части и находят площадь как сумму площадей отдельных частей. Например (рис. 30):

$$S = S_1 + S_2, \;\; S = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x) \right) dx + \int_b^c \left(f_3(x) - f_2(x) \right) dx .$$

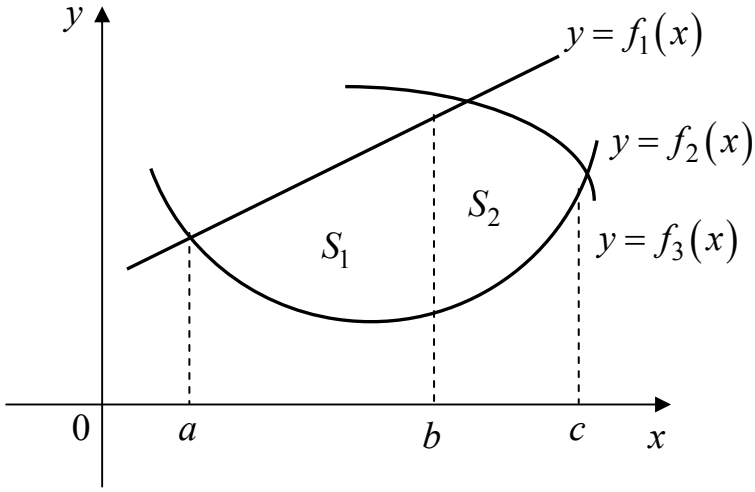

Рис. 30

6) Если фигура ограничена линиями $x = g(y)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$ (рис. 31), то:

$$S = \int_c^d g(y)\,dy.$$

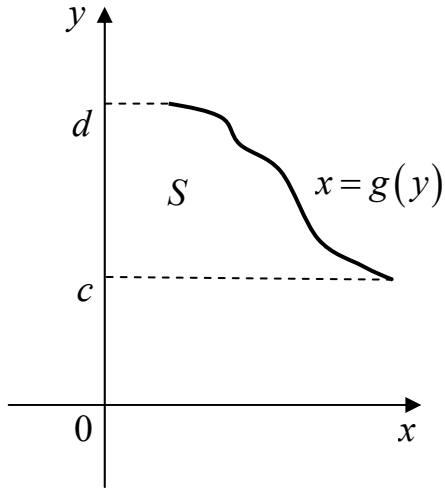

Рис. 31

7) Если линия на плоскости задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t_1 \le t \le t_2,$$

в формуле $S = \int_a^b f(x)\,dx$ сделаем замену: $f(x) = y = y(t)$, $dx = d(x(t)) = x'(t)\,dt$, $t_1 \le t \le t_2$.

Получим формулу для вычисления площади в случае параметрического задания линии: $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)\,dt$.

Пример. Найти площадь эллипса с полуосями a и b (рис. 32).

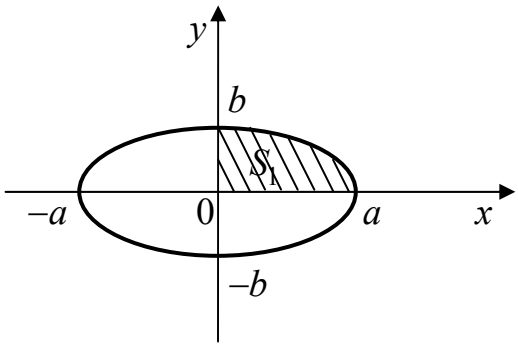

Рис. 32

Уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ зададим параметрически: $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

Эллипс – симметричная относительно осей координат фигура, поэтому найдем его площадь как учетверенную площадь части, лежащей в 1-й четверти, т.е. $S_{\text{элл}} = 4S_1$. Выразим площадь S_1: при изменении параметра от $t_1 = \frac{\pi}{2}$ до $t_2 = 0$ точка пробегает линию в направлении от $x = 0$ до $x = a$, т.е. в направлении роста переменной x, так что приращение dx является положительным.

$$S_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t \cdot \left(a\cos t\right)' dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\left(-a\sin t\right)dt = -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\, dt =$$

$$= -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = -\frac{ab}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{-ab}{2}\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi ab}{4},$$

$$S_{\text{элл}} = 4S_1 = \pi ab.$$

8) Вычисление площади в полярных координатах, площадь криволинейного сектора.

Определение. *Криволинейным сектором называется плоская фигура, ограниченная непрерывной кривой, заданной уравнением в полярных координатах* $r = r(\varphi)$, и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ (рис. 33).

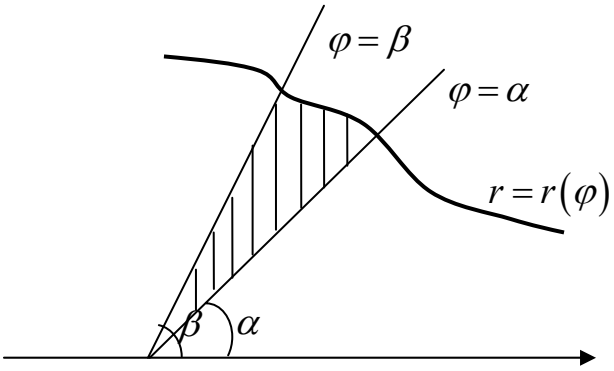

Рис. 33

Докажем, что площадь криволинейного сектора выражается формулой

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

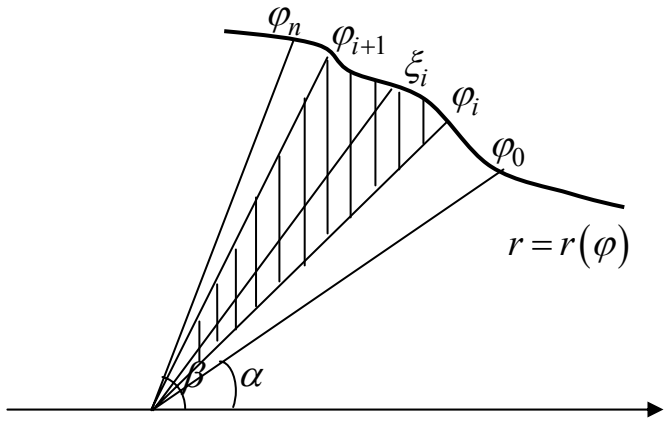

Рис. 34

Для доказательства:

а) разобьем криволинейный сектор на n секторов лучами $\varphi = \varphi_i$ $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < ... < \varphi_n = \beta$;

б) на каждом частичном сегменте $[\varphi_i; \varphi_{i+1}]$ возьмем произвольную точку ξ_i, $\varphi_i < \xi_i < \varphi_{i+1}$, под углом ξ_i проведем луч длиной $r_i = r(\xi_i)$ и заменим i-й криволинейный сектор круговым сектором радиуса $R = r_i$ (рис. 34);

в) вычислим площадь каждого i-го кругового сектора, применяя формулу $S_{\text{сект.}} = \frac{1}{2}R^2 \cdot \alpha$: $\Delta S_i = \frac{1}{2}r_i^2 \cdot \Delta\varphi_i$, здесь $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$;

г) найдем площадь криволинейного сектора:

$$S_{\text{крив.сект.}} \approx \sum_{i=0}^{n-1} \Delta S_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} r_i^2 \cdot \Delta\varphi_i,$$

$$S_{\text{крив.сект.}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} r_i^2 \cdot \Delta\varphi_i.$$

Так как по условию функция $r(\varphi)$ непрерывна, этот предел существует и равен определенному интегралу:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} r_i^2 \cdot \Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi$$

Получили формулу для вычисления площади криволинейного сектора

$$S_{\text{крив.сект.}} = \frac{1}{2}\int_{a}^{b} r^2(\varphi)\,d\varphi$$

Пример. Найти площадь лемнискаты Бернулли $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right)$ (рис. 35). Перейдем к полярным координатам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 .$$

$$r^4 = 2a^2 \cdot r^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right),\ r^2 = 2a^2\cos 2\varphi .$$

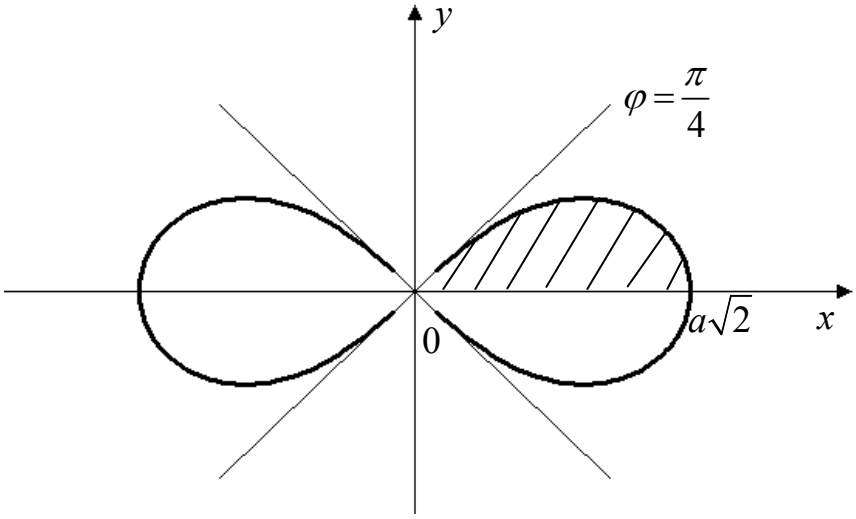

Рис. 35

Найдем область определения этой функции:

$$\cos 2\varphi \ge 0,\ 2\pi n - \frac{\pi}{2} \le 2\varphi \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;\ \pi n - \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$$

Фигура симметрична относительно центра и осей координат, $S = 4S_1$.

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2(\varphi)\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2\cos 2\varphi\,d\varphi = 4a^2 \cdot \left.\frac{\sin 2\varphi}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = 4a^2 \cdot \frac{1}{2} = 2a^2 .$$

8.2. Вычисление объемов тел по известным площадям поперечных сечений

Поставим задачу: найти объем тела V, если известна площадь его сечения плоскостью, проводимой перпендикулярно оси OX при любом x (такое сечение называют поперечным), т.е. эта площадь является известной функцией $S(x)$, причем $S(x)$ непрерывна на $[a; b]$.

Для решения задачи сделаем следующее (рис. 36):

1) возьмем произвольную точку x_i и проведем плоскость $x = x_i$;

2) дадим x_i приращение $\Delta x_i \ne 0$, проведем плоскость $x = x_i + \Delta x_i$;

3) из данного тела этими плоскостями вырезан слой, объем которого ΔV_i приближенно равен объему цилиндра с площадью основания $S(x_i)$ и высотой Δx_i, т.е. $\Delta V_i \approx S(x_i) \cdot \Delta x_i$;

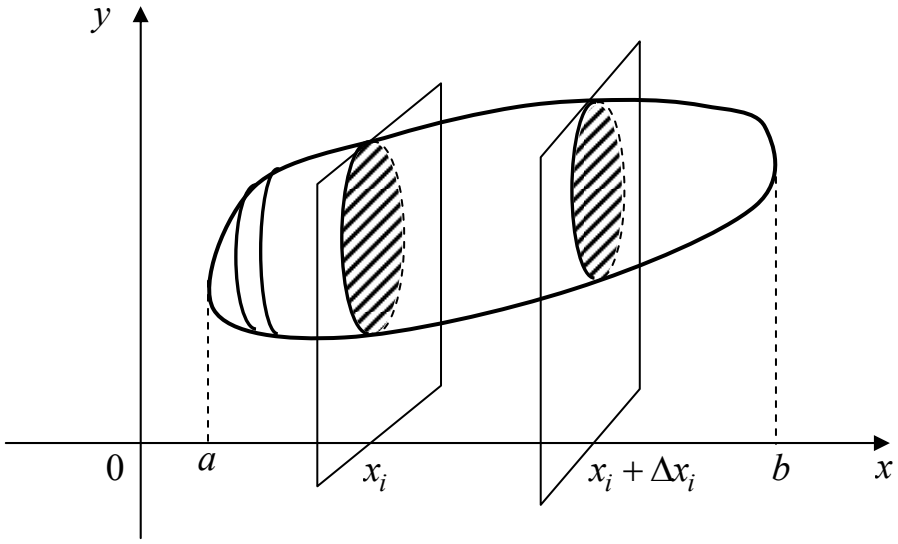

Рис. 36

4) объем тела ΔV приближенно равен сумме объемов ΔV_i:

$$\Delta V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} S(x_i) \cdot \Delta x_i .$$

5) точное значение объема тела найдем, переходя к пределу при $n \to \infty$, который существует, т.к. $S(x)$ непрерывна, и равен интегралу от $S(x)$ по отрезку $[a; b]$:

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} S(x_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b S(x) dx .$$

Получили формулу для вычисления объема:

$$V = \int_a^b S(x) dx ,$$

где $S(x)$ – площадь поперечного сечения.

Используя полученную формулу, вычислим объем тела вращения.

Пусть криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y = f(x)$ $\left(f(x)\right.$ непрерывна на $\left.[a; b]\right)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, вращается вокруг оси OX, найдем объем полученного при этом тела (рис. 37).

Поперечное сечение здесь – круг, его площадь

$$S(x) = \pi y^2 = \pi \left(f(x) \right)^2 .$$

Поперечное сечение здесь – круг, его площадь

$$S(x) = \pi y^2 = \pi \left(f(x) \right)^2 .$$

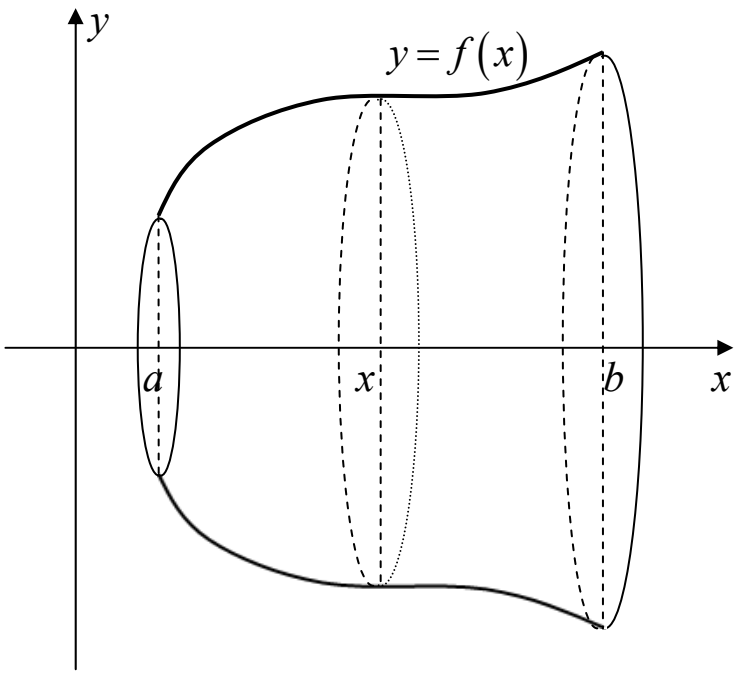

Рис. 37

Поперечное сечение здесь – круг, его площадь

$$S(x) = \pi y^2 = \pi\left(f(x)\right)^2.$$

Если криволинейная трапеция, ограниченная линиями $x = \varphi(y)$ $\left(\varphi(y)\right.$ непрерывна на $\left.[c; d]\right)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$, вращается вокруг оси OY, получаем другую формулу для вычисления объема тела вращения:

$$V_{OY} = \int_c^d \pi x^2\, dy = \pi \int_c^d \left(\varphi(y)\right)^2 dy.$$

8.3. Вычисление длины дуги плоской кривой

Определение. *Непрерывной кривой называется кривая, заданная уравнением* $y = f(x)$*, где* $f(x)$ *непрерывна на* $[a; b]$.

Определение. *Кривая называется гладкой, если она задается уравнением* $y = f(x)$*, где* $f(x)$ *и ее производная* $f'(x)$ *непрерывны на* $[a; b]$.

а) Пусть гладкая кривая AB задается уравнением в декартовой системе координат:

$$y = f(x),\ a \le x \le b.$$

1) Разобьем кривую AB на n частей произвольным образом и впишем в нее ломаную линию (рис. 38), соединив точки M_i отрезками. Обозначим длину i-го звена ломаной

$$M_i M_{i+1} = \Delta l_i.$$

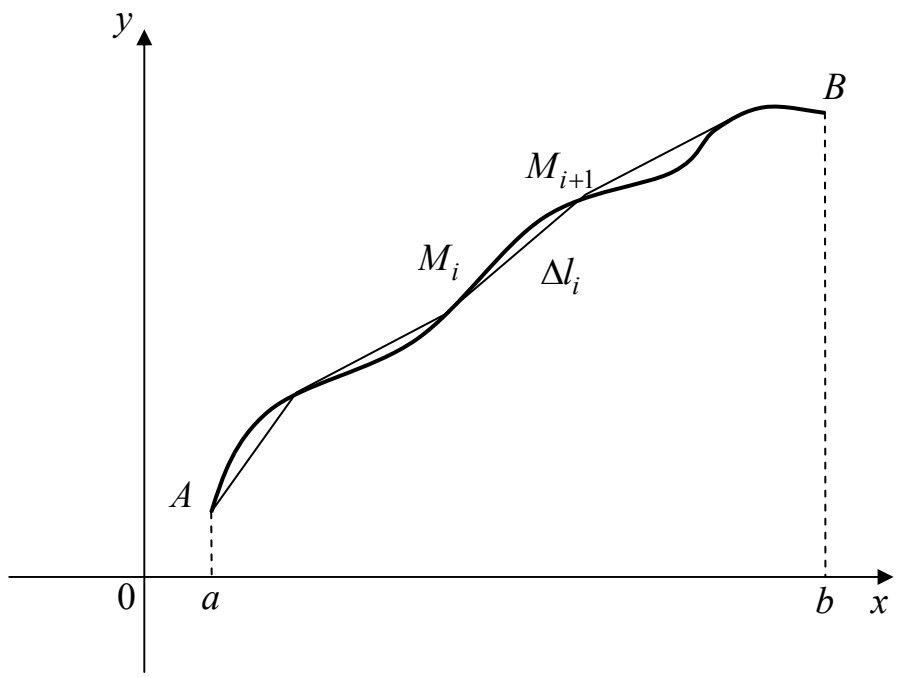

Рис. 38

2) За длину кривой AB примем предел, к которому стремится длина вписанной ломаной линии при стремлении $\max \Delta l_i \to 0$ или $n \to \infty$ (n – число звеньев ломаной линии).

3) Найдем длину i-го звена $\Delta l_i = M_i M_{i+1}$. Пусть $M_i(x_i; y_i)$, $M_{i+1}(x_{i+1}; y_{i+1})$,

$$M_i M_{i+1} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}\,.$$

Обозначим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, выразим разность $y_{i+1} - y_i$, используя формулу Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$, c лежит между x_1 и x_2. Получим $y_{i+1} - y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(c_i)(x_{i+1} - x_i) = f'(c_i) \cdot \Delta x_i$, $c \in (x_i; x_{i+1})$. Тогда

$$M_i M_{i+1} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(c_i))^2 \cdot (\Delta x_i)^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 \cdot (1 + (f'(c_i)))^2} = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i\,.$$

4) Найдем длину кривой AB:

$$L_{AB} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta l_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\,.$$

(предел существует, так как по условию AB – гладкая кривая, $f'(x)$ непрерывна на $[a; b]$). Итак,

$$L_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\,.$$

Если гладкая кривая задана уравнением $x = \varphi(y)$ на отрезке $[c; d]$, то

$$L_{AB} = \int_c^d \sqrt{1+\left(\varphi'(y)\right)^2}\, dy.$$

б) Пусть гладкая кривая задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_1; t_2].$$

функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[t_1; t_2]$. Вычислим длину кривой, используя формулу для производной функции, заданной параметрически:

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

$$L_{AB} = \int_a^b \sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}\, dx = \left[\begin{array}{ll} x = x(t) & \\ y = y(t) & \\ dx = x'(t)dt & t_1 \le t \le t_2 \\ y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} & \end{array}\right] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} \cdot x'(t)dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{x'(t)} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} \cdot x'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt.$$

Получили

$$L_{AB} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt.$$

в) Пусть гладкая кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, где функция $\rho(\varphi)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\varphi_1; \varphi_2]$. Вычислим длину кривой, используя формулу для параметрически заданной линии и считая угол φ параметром:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi = \rho(\varphi)\cdot\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi = \rho(\varphi)\cdot\sin\varphi, \end{cases} \quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2;\ L_{AB} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(x'(\varphi)\right)^2 + \left(y'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi.$$

Вычислим подкоренное выражение:

$$x'(\varphi) = \left(\rho(\varphi)\cos\varphi\right)' = \rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi,$$

$$y'(\varphi) = \left(\rho(\varphi)\sin\varphi\right)' = \rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi,$$

$$\left(x'(\varphi)\right)^2 + \left(y'(\varphi)\right)^2 = \left(\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi\right)^2 + \left(\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi\right)^2 =$$

$$= \left(\rho'\right)^2\cos^2\varphi - 2\rho'\rho\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin^2\varphi + \left(\rho'\right)^2\sin^2\varphi + 2\rho'\rho\sin\varphi\cos\varphi + \rho^2\cos^2\varphi =$$

$$= \left(\rho'\right)^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + \rho^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) = \left(\rho'\right)^2 + \rho^2.$$

Получили формулу

$$L_{AB} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi .$$

Пример. Вычислить длину первой арки циклоиды (рис. 39)

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi .$$

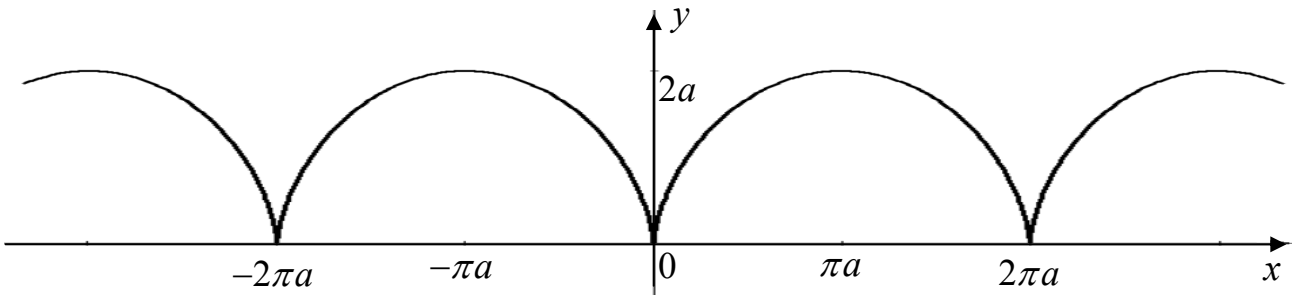

Рис. 39

Используем формулу $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt$. Вычислим подкоренное выражение:

$$x'(t) = a(t - \sin t)' = a(1 - \cos t),\ y'(t) = a(1 - \cos t)' = a \sin t ,$$

$$\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 = a(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = a^2\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t\right) =$$

$$= a^2(2 - 2\cos t) = 2a^2(1 - \cos t) = 2a^2 \cdot 2\sin^2\frac{t}{2} = 4a^2 \sin^2\frac{t}{2}.$$

Подставим в интеграл:

$$L_{AB} = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2\frac{t}{2}}\, dt = \int_0^{2\pi} 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right| dt =$$

$$= \left(\left|\sin\frac{t}{2}\right| = \sin\frac{t}{2}, \text{ так как } \sin\frac{t}{2} \ge 0 \text{ при } 0 \le t \le 2\pi\right) =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 2a\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a .$$

8.4. Примеры применения определенного интеграла в экономике

Пусть спрос задан функцией $P = P(Q)$. Обозначим через P_0 равновесную цену, через Q_0 – реализуемое по этой цене количество товара. Под *излишком потребителя* (*добавочной выгодой потребителя*) понимают разность между гипотетическими затратами потребителя и реальными затратами в условиях рынка, равными P_0Q_0. Тогда излишек потребителя CS вычисляется по формуле

$$CS = \int_0^{Q_0} P(Q)\,dQ - P_0Q_0 .$$

Пример. Пусть функция спроса имеет вид $P = 48 - 4Q^2$, а равновесное количество товара равно $Q_0 = 3$. Найдите излишек потребителя.

Решение. Найдем равновесную цену: $P_0 = 48 - 4Q_0^2 = 48 - 4 \cdot 9 = 12$.

Тогда $CS = \int_0^3 \left(48 - 4Q^2\right) dQ - 12 \cdot 3 = 48Q\Big|_0^3 - 4 \cdot \frac{Q^3}{3}\Big|_0^3 - 36 = 144 - 36 - 36 = 72$.

Если функция $P = P(Q)$ задает предложение некоторого товара, то по формуле

$$PS = P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} P(Q)\,dQ$$

вычисляется *добавочная выгода* (*излишек*) производителя.

Пример. Пусть функция предложения имеет вид $P = 12 + Q^2$, а равновесное количество товара равно $Q_0 = 3$. Найдите излишек производителя.

Решение. Найдем равновесную цену: $P_0 = 12 + Q_0^2 = 12 + 9 = 21$.

Тогда $PS = 21 \cdot 3 - \int_0^3 \left(12 + Q^2\right) dQ = 63 - 12Q\Big|_0^3 - \frac{Q^3}{3}\Big|_0^3 = 63 - 36 - 9 = 18$.

Для выражения уровня неравенства в распределении доходов населения в определенном регионе применяют *индекс* (*коэффициент*) *Джини*, который вычисляется как отношение площади фигуры, находящейся между биссектрисой первой четверти и кривой Лоренца, к площади треугольника под биссектрисой, т.е. к $\frac{1}{2}$ (рис. 40).

При этом по оси OX отложена доля доходов, по оси OY – доля населения. *Кривая Лоренца* выражает долю населения, имеющую данную долю общего дохода.

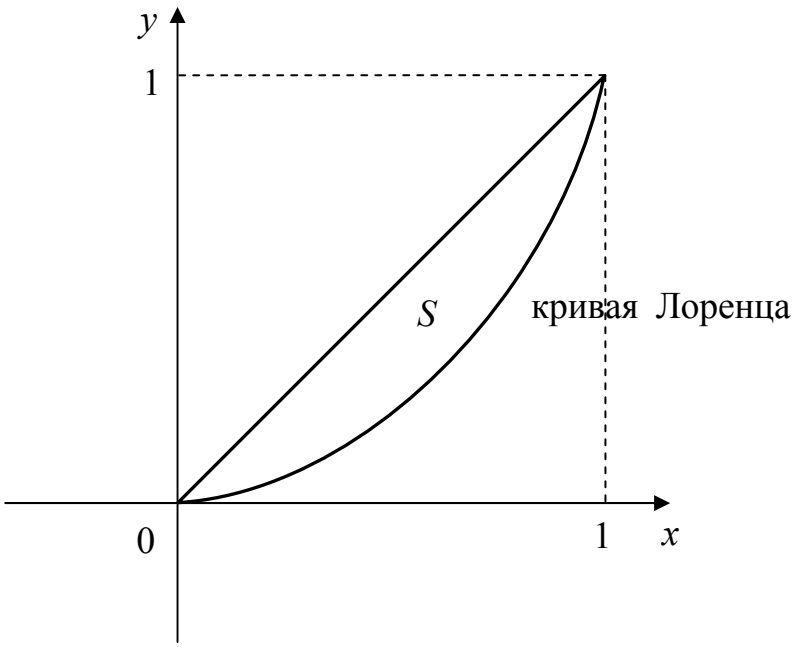

Рис. 40

Пример. Пусть формула, задающая приближенно кривую Лоренца для некоторого региона имеет вид $y = \dfrac{x^3 + x}{2}$.

Тогда индекс Джини равен

$$k = 2 \cdot \int_0^1 \left(x - \frac{x^3 + x}{2} \right) dx = 2 \cdot \int_0^1 \left(\frac{x - x^3}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(x - x^3 \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Высшая математика для экономистов: учебное пособие для экон. спец. вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008. – 478 с.

2. Замков, О.О. Математические методы в экономике: учебник / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М.: Изд-во «Дис», 1997. – 386 с.

3. Колесников, А.Н. Краткий курс математики для экономистов: учебное пособие / А.Н. Колесников. – М.: ИНФРА-М, 2000. – 208 с.

4. Общий курс высшей математики для экономистов: учебник / под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2005. – 656 с.

5. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие / под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 575 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. ПРОИЗВОДНАЯ
1.1. Определение производной ... 3
1.2. Механический и экономический смысл производной ... 5
1.3. Геометрический смысл производной ... 6
1.4. Уравнение касательной и нормали к кривой ... 8
1.5. Дифференцируемость функций ... 8
1.6. Основные правила дифференцирования ... 10
1.7. Производная обратной функции ... 12
1.8. Производная сложной функции ... 13
1.9. Производные элементарных функций ... 15
1.10. Таблица основных формул дифференцирования ... 17
1.11. Логарифмическое дифференцирование ... 18
1.12. Производная функции, заданной параметрически ... 19
1.13. Неявная функция и ее производная ... 19
1.14. Предельные величины и эластичность функции ... 20
1.15. Производные высших порядков ... 22
1.16. Производные высших порядков от неявных функций и функций, заданных параметрически ... 23
Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ
2.1. Определение и геометрический смысл дифференциала ... 25
2.2. Свойства дифференциала ... 26
2.3. Дифференциалы высших порядков ... 27
Глава 3. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ
3.1. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях ... 28
3.2. Правило Лопиталя ... 32
3.3. Формула Тейлора ... 36
3.4. Исследование функций ... 39
3.5. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке ... 52
Глава 4. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ
4.1. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла ... 54
4.2. Основные свойства неопределенного интеграла ... 55
4.3. Таблица неопределенных интегралов ... 56
4.4. Простейшие методы интегрирования ... 57
Глава 5. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ
5.1. Интегрирование по частям ... 61
5.2. Интегрирование подстановкой или заменой переменной ... 63
5.3. Интегрирование рациональных функций ... 64
5.4. Интегрирование тригонометрических выражений ... 70
Глава 6. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ
6.1. Понятие определенного интеграла ... 75
6.2. Геометрический смысл определенного интеграла. Вычисление площади криволинейной трапеции ... 76

6.3. Экономический смысл определенного интеграла 77
6.4. Свойства определенного интеграла 78
6.5. Вычисление определенного интеграла 82
Глава 7. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
7.1. Интегралы по неограниченному промежутку 86
7.2. Интеграл от неограниченной функции 88
Глава 8. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА
8.1. Вычисление площадей плоских фигур 91
8.2. Вычисление объемов тел по известным площадям поперечных сечений 96
8.3. Вычисление длины дуги плоской кривой 98
8.4. Примеры применения определенного интеграла в экономике 102
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 104