Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра математического анализа

В.А. Могильницкий, С.А. Шунайлова

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Учебное пособие

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2011

УДК 517.2(075.8)
М742

Одобрено
учебно-методической комиссией
механико-математического факультета

Рецензенты:
Макаров А.С., Фёдоров В.Е.

Могильницкий, В.А.

М742 **Производная и ее применение**: учебное пособие / В.А. Могильницкий, С.А. Шунайлова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. – 107 с.

Учебное пособие соответствует программе курса по математике для студентов технических специальностей по дифференциальному исчислению функций одной переменной. По каждой теме приведены примеры с решениями или указаниями для их решения. В конце каждой темы имеются задания для самостоятельной работы, что позволяет студентам проверить степень усвоения пройденного материала.

УДК 517.2(075.8)

I. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ. ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1.1. Начальные сведения о производной

Производная – это скорость. Более конкретно: если некоторый процесс – механический, электрический, химический, тепловой и т.д. – задан функцией (одной переменной), $y = f(x)$, $x \in D$, то скорость протекания этого процесса и есть производная $y' = f'(x)$. Производная также является функцией (той же переменной), которая вычисляется – для данной функции $f(x)$ – по некоторым, однозначно определенным правилам. При этом в каждой фиксированной точке $x \in D$ значение производной выражает так называемую *мгновенную скорость* протекания указанного процесса или, что то же, мгновенную (точечную) скорость, с которой $f(x)$ меняется в этой точке.

Очевидно, что если в данной точке функция возрастает, процесс ускоряется, то производная неотрицательна, если же убывает, то производная неположительна. В случае, когда не имеет место ни то, ни другое, производная либо равна нулю – процесс находится в *стационарно*м (равновесном) состоянии, либо производная не существует, что соответствует критическому (нестационарному, негладкому) состоянию. Простейшие поясняющие эти утверждения чертежи представлены на рис. 1.

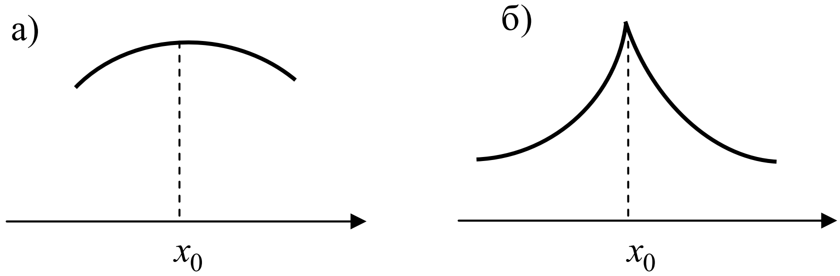

Рис. 1

На рис. 1а слева от точки x_0 функция растет, т.е. изменяется с *положительной скоростью*. Справа от этой точки скорость (производная) *отрицательна*. Переход от возрастания к убыванию в точке x_0 совершается гладким образом, $f'(x_0) = 0$. На рис. 1б изменение характера монотонности происходит не гладко (как при резком торможении, скорость меняется толчком). Здесь нет производной, $f'(x_0)$ не существует.

Механический смысл производной. Таким образом, задача определения производной есть одновременно задача определения скорости. Именно такой подход позволил Ньютону создать *дифференциальное исчисление*, которое легло в основу его механики, объясняющей устройство мира.

Разумеется, было известно и раньше понятие *средней скорости*. Если тело, скажем автомобиль, прошло 60 км за 1 час, то средняя скорость движения равна

1 километр в минуту или $1/60$ км в секунду; аналогично, если температура воздуха понизилась в течение суток на 12°, то можно утверждать, что изменение температуры происходило со средней скоростью –0,5° в час. Но знание средней скорости не позволяет судить, какова была скорость в начале 33-й минуты (не исключено, что в этот момент времени наш автомобиль остановился на заправку), или какой была температура в 6 часов вечера (возможно, выше начальной).

Требовалось ввести понятие *мгновенной скорости*. Для задачи о механическом движении решение выглядит следующим образом.

Пусть известна функция $S = S(t)$, $t \in [t_1; t_2]$, определяющая закон движения тела (t – время, S – путь, $S(t)$ – функция, определяющая для каждого момента между t_1 и t_2 пройденное расстояние). Зафиксируем некоторый момент $t \in [t_1; t_2]$ и дадим ему приращение Δt такое, чтобы также было $t + \Delta t \in [t_1; t_2]$. Заметим, что Δt может быть любого знака. Составим соответствующее приращение функции $S(t)$: $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$. Отношение $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ составляет, очевидно, среднюю скорость движения на промежутке $[t; t + \Delta t]$ и при фиксированном t зависит от Δt. Тогда предел средней скорости при $\Delta t \to 0$ (если он существует) и есть мгновенная скорость в данный момент времени t, что обозначается так:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t) \left(\text{или } \dot{S}(t) \right). \qquad (1.1.1)$$

Одновременно в этой записи $S'(t)$ называют производной функции $S(t)$ в данной точке $t \in [t_1; t_2]$. Но поскольку точка t взята совершенно произвольно, то, предположив, что указанный предел существует для любого $t \in [t_1; t_2]$, мы сразу приходим к определению производной $S'(t)$ как функции, заданной на том же промежутке, что и функция $S(t)$. Тем самым задача определения *мгновенной скорости – производной от пути по времени* – решена для каждой точки отрезка (в нем производная есть некоторое число) и для отрезка в целом, где производная является функцией, поскольку каждому значению $t \in [t_1; t_2]$ поставлено в соответствие по закону (1.1.1) соответствующее значение $v(t) = S'(t)$.

Пример 1. Мгновенная скорость равномерного движения, закон которого $S = S_0 + vt$, $t \in [0; T]$, равна его средней скорости. Действительно, составим для данного промежутка $[t; t + \Delta t] \subset [0; T]$ приращение пути $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t) = S_0 + v(t + \Delta t) - (S_0 + vt) = v\Delta t$. Тогда по формуле (1.1.1)

$$S'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v\Delta t}{\Delta t} = v.$$

Этот элементарный пример, очевидно, допускает следующее обобщение: любой *равномерный процесс*, т.е. задаваемый линейной функцией $Q = Q_0 + \alpha t$, $t \in [t_1; t_2]$, где $\alpha = const$, происходит с постоянной (мгновенной) скоростью α.

Соответственно, производная линейной функции $y = kx + b$ $\left(x \in \mathbb{R}\right)$ равна ее угловому коэффициенту: $y' = \left(kx + b\right)' = k$.

Определение производной функции $y = f\left(x\right)$ $\left(x \in D\right)$ дается по образцу формулы (1.1.1). Для любого промежутка $\left[x; x + \Delta x\right] \subset D$ составляем приращение функции $\Delta y = y\left(x + \Delta x\right) - y\left(x\right)$ и рассматриваем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует (конечный) предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то он называется производной функции $f\left(x\right)$ в точке x: при этом говорят, что функция $f\left(x\right)$ *дифференцируема* в этой точке. Обозначение:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'\left(x\right). \tag{1.1.2}$$

Употребляются также обозначения y', y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$. Заметим, что область определения производной может не совпадать с D. Пример такой ситуации приведен ниже.

Пример 2. Найти по формуле (1.1.2) производную функции $y = \sqrt{x}$. Вычислить значение производной в точках $x_1 = \dfrac{1}{4}$, $x_2 = 16$ и в точке пересечения графиков функции и ее производной с абсциссой x_3.

Решение. Составим приращение функции $y = \sqrt{x}$ при $x \geq 0$: $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$ и рассмотрим предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$, который представляет, очевидно, неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Переводим радикалы в знаменатель и получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x + 0} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Таким образом, $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Видим, что производная существует для всех $x > 0$, но не определена при $x = 0$. Заметим, что если положить в наших вычислениях $x = 0$, то получится предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty$. При $x = x_1 = \dfrac{1}{4}$ имеем: $y'\left(x_1\right) = \dfrac{1}{2 \cdot \dfrac{1}{2}} = 1$, при $x = x_2 = 16$: $y'\left(x_2\right) = \dfrac{1}{2 \cdot 4} = \dfrac{1}{8}$.

Найдем точку пересечения графиков $y=\sqrt{x}$ и $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. При $x>0$ решаем уравнение $\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow x=x_3=\dfrac{1}{2}$. Тогда $y'(x_3)=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. На рис. 2 показаны графики функции $y=\sqrt{x}$ и ее производной $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

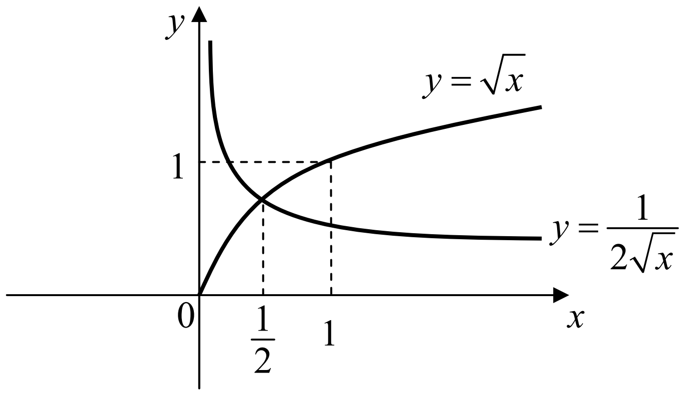

Рис. 2

Упражнение 1. Найдите скорость свободного падения тела в пустоте $S=\dfrac{1}{2}gt^2$, $t\geq 0$. Вычислите мгновенную скорость: а) при $t=3$; б) в момент, когда величина скорости втрое больше пройденного пути.

Упражнение 2. Докажите, используя формулу (1.1.2), что $\left(x^2\right)'=2x$.

Упражнение 3. Найдите с помощью формулы (1.1.2) производную функции $y=\dfrac{1}{x}$.

Упражнение 4. Докажите, что $(\sin x)'=\cos x$ и $\left(e^x\right)'=e^x$. *Указание*. Используйте в доказательстве первый замечательный предел и то, что $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$.

Еще раз напомним, что подобно тому, как задача о нахождении механической скорости приводит к понятию производной (от пути по времени), так каждая задача, в которой ищется скорость изменения величины, заданной функцией от некоторой переменной, приводит к производной данной функции по этой переменной.

Например, если $Q=Q(t)$ – количество вещества, растворившегося в воде (более общим образом – вступившего в реакцию), то скорость растворения (реакции) равна $Q'(t)=\dfrac{dQ}{dt}$. Если вдоль проводника длины L распределен электрический заряд по закону $q = q(l)$, $l \in [0; L]$, то скорость изменения заряда (плотность заряда) есть $\dfrac{dq}{dl}$ и т.д.

Пример 3, имеющий теоретическое значение. Доказать, что функция, имеющая производную в точке, непрерывна в этой точке.

Решение. Известно, что для непрерывной функции $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ (бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции). Пусть функция имеет производную в точке x. Тогда ее приращение в этой точке запишется так: $\Delta y = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$. Переходя к пределу, получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y =$ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$. Что и требовалось доказать.

Это свойство выражает *необходимое условие дифференцируемости* функции: если $f(x)$ дифференцируема (имеет производную) в точке, то она необходимо непрерывна в этой точке. Заметим, что обратное утверждение неверно: функция, непрерывная в точке, может не иметь производной в этой точке. Это показано в примере 2 этого пункта. В следующем пункте встретятся другие примеры подобного рода.

1.2. Геометрический смысл производной. Касательная и нормаль к плоской линии

Скорость изменения функции наглядно иллюстрируется ее графиком. Достаточно взглянуть на рис. 3, чтобы сказать, что функция $g(x)$ вблизи точки x_0 растет быстрее, чем $f(x)$, хотя значения первой функции меньше, чем второй.

Парабола $y = x^3$ при $x \geq 1$ растет быстрее, чем $y = x^2$, а $y = x^2$ при $x \geq 1$ по скорости роста опережает прямую $y = x$, которая, в свою очередь, при тех же x превосходит по скорости логарифм $y = \ln x$.

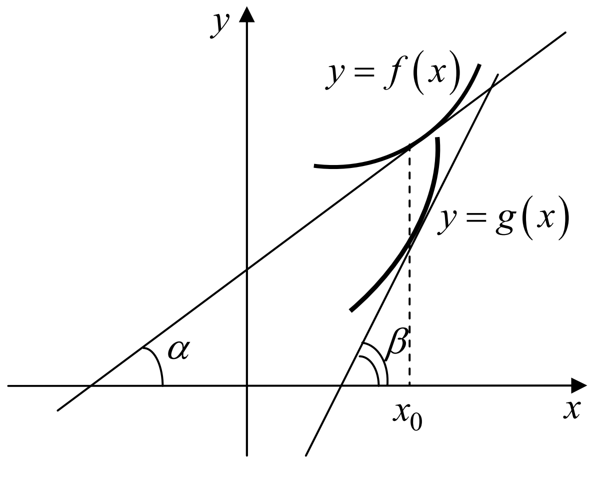

Рис. 3

Человек, который понял, что такое производная, даже не умея ее вычислять, сразу скажет: производная первой функции во всех случаях больше, чем у второй. Полную ясность в данный вопрос вносит *касательная* к графику функции, которая определяется следующим образом (см. рис. 4).

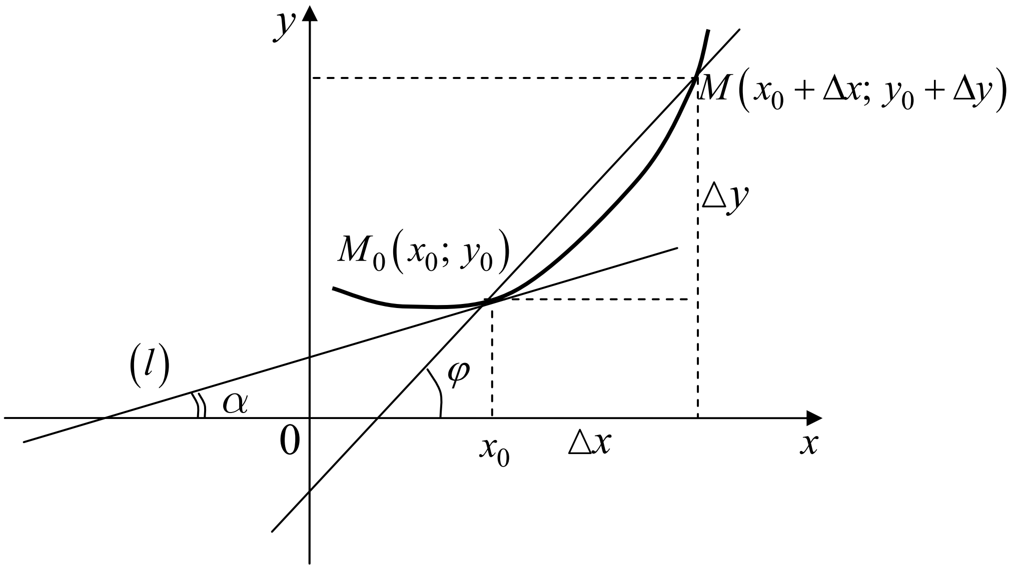

Рис. 4

Возьмем на графике функции $y=f(x)$ какую-нибудь точку $M_0\left(x_0;\, y_0\right)$ и будем рассматривать точки $M\left(x_0+\Delta x;\, y_0+\Delta y\right)$ на том же графике. Хорда M_0M образует с осью OX угол $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (на рис.4 Δx и Δy взяты положительными, хотя в общем случае они могут быть любого знака). Если при $\Delta x\to 0$ существует предельное положение хорды M_0M, то соответствующая прямая (l) и называется касательной к графику в точке M_0 или, как обычно говорят, в точке x_0.

Согласно этому определению, *угловой коэффициент касательной* равен $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\Big|_{x=x_0}$, что, по определению производной, дает $k=f'\left(x_0\right)$.

Последнее равенство и выражает *геометрический смысл производной*: если существует производная функции $f(x)$ в точке $x=x_0$, то существует невертикальная касательная к графику этой функции в его точке с абсциссой x_0 и наоборот. При этом значение производной $f'\left(x_0\right)$ равно угловому коэффициенту касательной, т.е. тангенсу угла, образованного ею с положительным направлением оси OX.

Вспоминая уравнение $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$ прямой с данным угловым коэффициентом k, проходящей через данную точку плоскости $\left(x_0;\, y_0\right)$, получаем *уравнение касательной*

$$y-y_0=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right), \tag{1.2.1}$$

а также уравнение *нормали* – перпендикуляра к касательной в точке касания

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0). \tag{1.2.2}$$

В последнем уравнении предполагается, что $f'(x_0)\neq 0$. Если же $f'(x_0)=0$, то касательная в этой точке горизонтальная, и ее уравнение имеет вид $y=y_0$, а нормаль вертикальная и задается уравнением $x=x_0$.

Пример 1. Составить уравнение касательной и нормали к гиперболе $y=\frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x=1$.

Решение. В уравнениях (1.2.1) и (1.2.2) нужно подставить $x_0=1$ и $y_0=\frac{1}{x_0}=1$. Производная функции $\frac{1}{x}$ равна $-\frac{1}{x^2}$ (упражнение 3, п.1.1). Вычисляем ее значение в точке $x_0=1$: $f'(1)=-1$. Имеем

$$y-1=-1(x-1)\Leftrightarrow x+y=2 \text{ – уравнение касательной,}$$

$$y-1=x-1\Leftrightarrow y=x \text{ – уравнение нормали.}$$

Пример 2. Показать, что отрезок касательной к гиперболе $y=\frac{1}{x}$ в любой ее точке образует с осями координат треугольник постоянной площади.

Решение. Запишем уравнение касательной по образцу (1.2.1):

$$y-y_0=-\frac{1}{x_0^2}(x-x_0).$$

Учитывая, что $y_0=\frac{1}{x_0}$, преобразуем $y-\frac{1}{x_0}=-\frac{x}{x_0^2}+\frac{1}{x_0}\Leftrightarrow x_0^2y+x=2x_0$ и найдем точки пересечения прямой с координатными осями: при $y=0$ имеем $x=a=2x_0$, при $x=0$ $y=b=\frac{2}{x_0}$. Площадь треугольника OAB (см. рис. 5) равна

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}|ab|=\frac{1}{2}\cdot 2x_0\cdot\frac{2}{x_0}=2.$$

Что и требовалось доказать.

Упражнение 4. Покажите, что отрезок касательной к гиперболе (на рис. 5 – отрезок AB) в любой ее точке делится этой точкой пополам.

Замечание. Утверждение примера 3 и упражнения 4 верны также для гиперболы $y=\frac{a}{x}$. Рекомендуем проверить это, зная, что $\left(\frac{a}{x}\right)'=-\frac{a}{x^2}$.

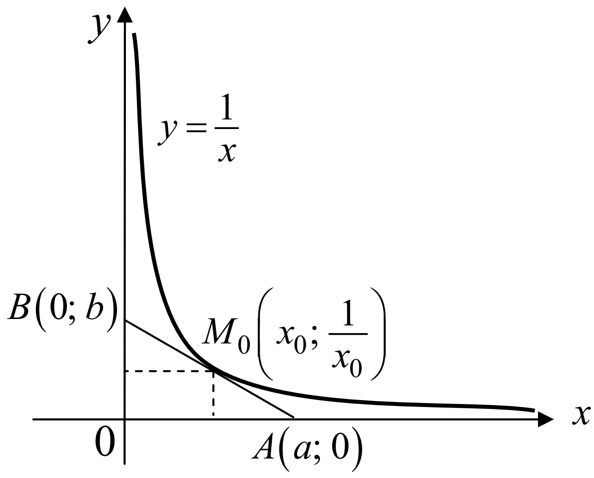

Рис. 5

Упражнение 5. На гиперболе $y=\frac{a}{x}$ взята точка x_0. Как построить касательную в этой точке с помощью линейки, не производя никаких вычислений?

Пример 3. Составить уравнения касательной и нормали к параболе $y=x^2$ в точках ее пересечения с прямой $x+y=6$.

Решение. Найдем точки пересечения параболы и прямой, решив систему из уравнений этих линий: $\begin{cases} y=x^2, \\ x+y=6; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x^2, \\ x^2+x-6=0; \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=-3, \\ y_1=9; \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=2, \\ y_2=4. \end{cases} \end{array} \right.$

Получили точки $M_1(-3;9)$ и $M_2(2;4)$. Учитывая, что $\left(x^2\right)'=2x$ (см. упражнение 2 п.1.1), найдем значение производной в точке $x_1=-3$: $f'(-3)=-6$. Тогда по образцу (1.2.1) имеем

$$y-9=-6(x+3) \Leftrightarrow y=-6x-9 \text{ – уравнение касательной в точке } M_1,$$

$$y-9=\frac{1}{6}(x+3) \Leftrightarrow y=\frac{x}{6}+\frac{19}{2} \text{ – уравнение нормали в той же точке.}$$

Аналогично, для точки M_2 эти уравнения имеют вид $y=4x-4$ и $x+4y=18$.

Пример 4. Найти точку пересечения двух касательных к параболе $y=x^2$, одна из которых параллельна прямой $2x-y=5$, а другая перпендикулярна прямой $x-3y=0$.

Решение. Найдем точку касания $\left(x_0;x_0^2\right)$ первой касательной из условия параллельности прямых с угловыми коэффициентами k_1 и k_2: $k_1=k_2$. Угловой коэффициент данной прямой $y=2x+5$ равен $k_1=2$. С другой стороны, угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой x_0 равен значению производной в этой точке: $k_1=2x_0$. Тогда $2x_0=2$ и $x_0=1$, а также $y_0=1$. Составляем уравнение первой касательной

$$y-1=2(x-1)\Leftrightarrow 2x-y=1.$$

Подобным образом точку касания для второй касательной найдем из условия перпендикулярности: $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$. Из уравнения второй из данных прямых находим $k_1=\dfrac{1}{3}$. Тогда $k_2=-3=2x_0$, откуда $x_0=-\dfrac{3}{2}$. При этом $y_0=\dfrac{9}{4}$. Записываем уравнение второй касательной: $y-\dfrac{9}{4}=-3\left(x+\dfrac{3}{2}\right)\Leftrightarrow 3x+y=\dfrac{27}{4}$.

Точку пересечения касательных находим, решая систему

$$\begin{cases}2x-y=1,\\ 3x+y=\dfrac{27}{4};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-1,\\ 5x=\dfrac{31}{4}.\end{cases}\quad \text{Ответ. } \left(\frac{31}{20};\frac{21}{10}\right).$$

Упражнение 6. Покажите, что касательная к параболе $y=x^2$ в любой ее точке пересекает ось OX в середине отрезка $[0;x_0]$, где x_0 – абсцисса точки касания.

Упражнение 7. Покажите, что касательная к графику функции $y=\sin x$ в начале координат есть биссектриса координатного угла (см. упражнение 4 п.1.1).

Упражнение 8. Найдите уравнение касательной к графику функции $y=e^x$ в точке ее пересечения с осью OY (см. упражнение 4 п.1.1).

Еще раз напомним, что существование невертикальной касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0 равносильно существованию производной $y'(x_0)$. Если нет производной, то нет и касательной – как на рис. 1б, где характерный излом кривой в точке x_0 свидетельствует о нарушении плавного хода функции, «скачкообразном» изменении скорости. В математике для описания такой ситуации употребляются термины «гладкая» и «негладкая» функции. Гладкая функция имеет непрерывную производную. Пример 2 п.1.1 показывает, что производная может быть бесконечной (производная $\sqrt{x}$ в точке $x=0$). Приведем еще пример общего характера.

Пример 5. Пусть функция $y=f(x)$ равна нулю в точке x_0 и имеет в этой точке производную $f'(x_0)$, отличную от нуля. Тогда функция $y=|f(x)|$ не имеет производной в этой точке.

Будем для определенности считать, что x_0 – единственная точка – корень функции $f(x)$ с таким свойством (см. рис. 6а). Тогда график пересекает ось абсцисс в точке x_0 и имеет в этой точке касательную с угловым коэффициентом $\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)\neq 0$. Тогда график функции $y=|f(x)|$ разбивается на две части, одна из которых совпадает с графиком $y=f(x)$ $(\text{при } x\ge x_0)$, а вторая представляет график $y=-f(x)$ $(\text{при } x\le x_0)$. График изображен на рис. 6б.

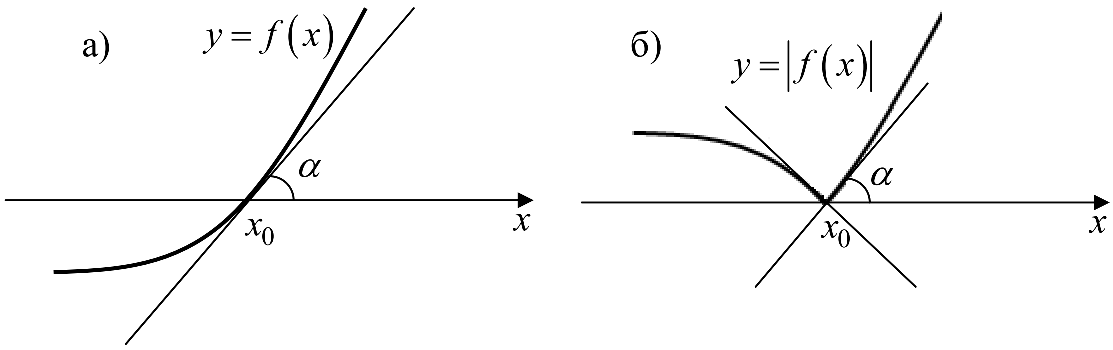

Рис. 6

Ясно, что у этих частей в общей точке x_0 различные производные: $f'(x_0+0)=\operatorname{tg}\alpha$ и $f'(x_0-0)=\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$ и, соответственно, разные касательные.

Упражнение 9. Постройте графики функций $y=f(x)$ и графики ее производной, если: а) $y=|x|$; б) $y=|\sin x|$; в) $y=\left|x^2-1\right|$.

Указание. При решении учтите известные из школьного курса свойства производной: $(-f(x))'=-f'(x)$ и $(f(x)+C)'=f'(x)$.

1.3. Производные основных элементарных функций. Простейшие правила дифференцирования

№	Функция	Производная	№	Функция	Производная
1	$y=C$	$y'=0$	7	$y=\operatorname{tg}x$	$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
2	$y=x^s,\ s\in\mathbb{R}$	$y'=sx^{s-1}$	8	$y=\operatorname{ctg}x$	$y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
3	$y=a^x$	$y'=a^x\ln a$	9	$y=\arcsin x$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$	10	$y=\arccos x$	$y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$y=\sin x$	$y'=\cos x$	11	$y=\operatorname{arctg}x$	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$
6	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$	12	$y=\operatorname{arcctg}x$	$y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Отметим часто встречающиеся частные случаи.

Формула 2: $s=n\in\mathbb{N}$, $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$ (например, $(x)'=1$, $\left(x^2\right)'=2x$ и т.д.);

$s=\frac{1}{2}$, $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

$s=-1$, $\left(x^{-1}\right)'=\left(\frac{1}{x}\right)'=-1\cdot x^{-1-1}=-1\cdot x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$.

Формула 3: $a=e$, $\left(e^x\right)'=e^x$, т.к. $\ln e=1$.

Формула 4: $a=e$, $\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$ по той же причине.

Пример 1. Вывести формулу 2) $\left(x^s\right)'=sx^{s-1}$.

Решение. Пусть $x\neq 0$. Дадим x приращение Δx и составим приращение функции $\Delta y=\left(x+\Delta x\right)^s-x^s$. По определению $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x+\Delta x\right)^s-x^s}{\Delta x}$.

Преобразуем числитель, вынеся за скобки x^s: $x^s\left(\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^s-1\right)=$ $=x^s\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^s-1\right)$. Т.к. величина под знаком предела зависит от Δx, а значение x фиксировано, то x^s можно вынести за знак предела. Тогда

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^s\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^s-1\right)}{\Delta x}=x^s\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^s-1}{\Delta x}=$$

$$=x^s\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^s-1}{\frac{\Delta x}{x}\cdot x}=\frac{x^s}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^s-1}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Обозначим $\frac{\Delta x}{x}=\alpha\to 0$ и получим $y'=x^{s-1}\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\left(1+\alpha\right)^s-1}{\alpha}$. Предел является следствием второго замечательного предела и равен s. Таким образом, $y'=sx^{s-1}$.

Пример 2. Вывести формулу 4) $\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\ln a}$.

Решение. Фиксируем $x>0$ и даем приращение Δx так, чтобы было и $x+\Delta x>0$. Приращение функции $\log_a x$ равно $\Delta y=\log_a\left(x+\Delta x\right)-\log_a x=$ $=\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$. Тогда $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}\cdot x}=$

$$=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha},$$ где $\frac{\Delta x}{x}=\alpha\to 0$. Также по следствию из второго замечательного предела $y'=\frac{1}{x}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha}=\frac{1}{x\ln a}$.

Окончательно имеем $\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\ln a}$.

Упражнение 10. Выведите формулу 7) $\left(\mathrm{tg}x\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}$, используя формулу разности тангенсов $\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ и первый замечательный предел.

О выводе формул 9)–12) речь пойдет в следующем пункте.

К простейшим правилам дифференцирования обычно относят правила вычисления производных суммы, разности, произведения, частного двух функций и следствия из них.

Если $u=u(x)$, $v=v(x)$ – дифференцируемые функции, то

I. $(Cu)'=Cu'$, C – постоянная.

II. $(u+v)'=u'+v'$.

III. $(uv)'=u'v+uv'$.

IV. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$, $v\neq 0$.

Упражнение 11. Выведите правила I и II. Проверьте, что если $u_1, u_2, ..., u_n$ – дифференцируемые функции, а $C_1, C_2, ..., C_n$ – постоянные, то

$\left(C_1u_1+C_2u_2+...+C_nu_n\right)'=C_1u_1'+C_2u_2'+...+C_nu_n'$ (линейность производной).

Пример 3. Вывести правило IV.

Решение. Пусть $y=\frac{u}{v}$. Дадим аргументу x приращение Δx и найдем приращение функции y: $\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}$, которое далее преобразуем

$$\Delta y=\frac{v(u+\Delta u)-u(v+\Delta v)}{v(v+\Delta v)}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v^2+v\Delta v}.$$

Тогда $\left(\frac{u}{v}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\Delta u-u\Delta v}{\Delta x\left(v^2+v\Delta v\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\Delta v}$. Т.к. $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'$, $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'$, а $\Delta v\to 0$, поскольку дифференцируемая функция v также и непрерывна (см. пример 3 п.1.1), то $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\Delta v}=\frac{u'v-uv'}{v^2}$. Что и требовалось доказать.

Пример 4. Вычислить производные функций: а) $y = ax^2 + bx + c$; б) $y = \dfrac{\left(2\sqrt{x} - 5\right)^2}{x}$.

Решение. а) $y' = a\left(x^2\right)' + b\left(x\right)' + c' = 2ax + b$. Использованы правила I и II, а также формулы 1) и 2) таблицы.

б) Здесь можно применить правило IV, но целесообразно сначала раскрыть скобки в числителе и выполнить почленное деление: $y = \dfrac{4x - 10\sqrt{x} + 25}{x} = 4 - \dfrac{10}{\sqrt{x}} + \dfrac{25}{x}$. Теперь дифференцируем сумму (по правилам I и II), применяя формулу 2) таблицы при $s = -\dfrac{1}{2}$ и $s = -1$ и формулу 1) таблицы:

$$y' = \left(4\right)' - 10\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' + 25\left(x^{-1}\right)' = -10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} + 25\left(-x^{-2}\right) = \frac{5}{x\sqrt{x}} - \frac{25}{x^2} = \frac{5\left(\sqrt{x} - 5\right)}{x^2}.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = e^x\left(a\sin x + b\cos x\right)$.

Решение. По правилам I, II, III и формулам 3), 5), 6) таблицы имеем:

$$y' = \left(e^x\right)'\left(a\sin x + b\cos x\right) + e^x\left(a\sin x + b\cos x\right)' =$$

$$= e^x\left(a\sin x + b\cos x + a\cos x - b\sin x\right) = e^x\left(\left(a - b\right)\sin x + \left(a + b\right)\cos x\right).$$

Пример 7. Найти производную функции $y = \dfrac{\ln x}{12x} + \dfrac{4\left(x^2 + 1\right)}{5\operatorname{arcctg} x}$.

Решение. По правилам I, II, IV и формулам 2), 4), 12) таблицы:

$$y' = \frac{1}{12}\left(\frac{\ln x}{x}\right)' + \frac{4}{5}\left(\frac{x^2 + 1}{\operatorname{arcctg} x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{\left(\ln x\right)' \cdot x - \ln x \cdot \left(x\right)'}{x^2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{\left(x^2 + 1\right)' \cdot \operatorname{arcctg} x - \left(x^2 + 1\right)\left(\operatorname{arcctg} x\right)'}{\left(\operatorname{arcctg} x\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{12}\frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2x \cdot \operatorname{arcctg} x - \left(x^2 + 1\right)\left(-\frac{1}{1 + x^2}\right)}{\left(\operatorname{arcctg} x\right)^2} =$$

$$= \frac{1 - \ln x}{12x^2} + \frac{4\left(2x \cdot \operatorname{arcctg} x + 1\right)}{5\operatorname{arcctg}^2 x}.$$

Обратите внимание на культурное применение правила I: постоянные множители $\left(\dfrac{1}{12} \text{ и } \dfrac{4}{5}\right)$ выносятся за знак производной и в дальнейшем в дифференцировании не участвуют. Записи типа $\left(\frac{\ln x}{12x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot (12x) - \ln x \cdot (12x)'}{144x^2}$ являются вульгарными и правильность полученного ответа не служит здесь оправданием: речь идет не об ответах, а о том, чтобы научиться правильно и грамотно дифференцировать, приобретая навыки и постепенно сокращая количество очевидных, повторяющихся от примера к примеру записей, преобразований и т.п.

Пример 8. $y = \frac{\pi \cos x + x}{\pi \sin x - 1}$. Вычислить $y'(\pi)$.

Решение. Найдем производную в произвольной точке:

$$y' = \frac{(\pi \cos x + x)'(\pi \sin x - 1) - (\pi \cos x + x)(\pi \sin x - 1)'}{(\pi \sin x - 1)^2} =$$

$$= \frac{(-\pi \sin x + 1)(\pi \sin x - 1) - (\pi \cos x + x)\pi \cos x}{(\pi \sin x - 1)^2}.$$

Подставив $x = \pi$, получим

$$y'(\pi) = \frac{(-\pi \sin \pi + 1)(\pi \sin \pi - 1) - (\pi \cos \pi + \pi)\pi \cos \pi}{(\pi \sin \pi - 1)^2} = \frac{-1-0}{(-1)^2} = -1.$$

Упражнение 11. Составить уравнение нормали к кривой, заданной уравнением из примера 8 в точке $x = \pi$.

Упражнение 12. Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ – дифференцируемые функции. Выведите формулу $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

Пример 9. Найти производную функции $f(x) = 0{,}5 \cdot 3^x \left(4 - x^3\right) \operatorname{tg} x$. Вычислите $f'(0)$.

Решение. $$f'(x) = 0{,}5\left(\left(3^x\right)'\left(4 - x^3\right)\operatorname{tg} x + 3^x\left(4 - x^3\right)'\operatorname{tg} x + 3^x\left(4 - x^3\right)(\operatorname{tg} x)'\right) =$$

$$= 0{,}5\left(3^x \ln 3\left(4 - x^3\right)\operatorname{tg} x + 3^x\left(-3x^2\right)\operatorname{tg} x + 3^x\left(4 - x^3\right)\frac{1}{\cos^2 x}\right).$$ Т.к. $3^0 = 1$, $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, подставив $x = 0$, получим $f'(0) = 0{,}5(0 - 0 + 4) = 2$.

Упражнение 13. Найдите производные функций:

а) $y = \frac{x^2}{2} + 2^x$; б) $y = \frac{(x+2)\left(2\sqrt{x} - 1\right)}{x}$; в) $y = x(\ln x - 1)$; г) $y = \frac{e^x - 2e^{-1}}{2\sqrt{x}}$;

д) $y = \frac{ax+1}{2-bx}$; е) $y = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)\cos x$; ж) $y = 2e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; з) $y = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$;

и) $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}$; к) $y = \left(1 + x^2\right)\operatorname{arctg} x - \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}$; л) $y = \frac{2^{x+1} \cdot 3^{x+1} \cdot 4^{x+1}}{24\sqrt{x}}$;

м) $y = 2xe^x \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

Упражнение 14. Тело движется по закону $s=\frac{1}{6}\left(2t^3-27t^2+84t+12\right)$, $t\in[0;10]$ $(s$ в метрах, t в секундах$)$. Определите начальную скорость. В какие моменты времени тело находилось в состоянии покоя (имело нулевую скорость)?

Упражнение 15. Составьте уравнение касательной к гиперболе $y=\frac{3-2x}{x-1}$ в точках ее пересечения с осями координат.

Упражнение 16. Найдите угловой коэффициент нормали к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x)=x\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{2x^2}$, $x_0=-1$; б) $f(x)=x\ln\frac{x}{e}$, $x_0=1$; в) $f(x)=\sqrt{x}e^x$, $x_0=0$;

г) $f(x)=\frac{x}{\pi}(\sin x-\cos x)$, $x_0=\frac{\pi}{4}$; д) $f(x)=\frac{x}{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}$, $x_0=\frac{\pi}{4}$;

е) $f(x)=\left(x^2-x\right)\arcsin x$, $x_0=\frac{1}{2}$; ж) $f(x)=\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}$, $x_0=0$.

Приведем, наконец, полезное *правило дифференцирования обратной функции*: если функция $y=f(x)$ имеет обратную $x=\varphi(y)$, для которой в точке y существует производная $x'_y=\varphi'(y)$, отличная от нуля, то в соответствующей точке x существует производная функции $y=f(x)$, равная

$$\text{V. } f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Действительно, в этом случае предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ может быть переписан так: $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$ (поскольку обратная функция $x=\varphi(y)$ имеет производную в точке y, то она непрерывна в этой точке, и $\Delta x\to 0$ при $\Delta y\to 0$ (и обратно). Предел $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}$ равен, по условию, $\varphi'(y)\neq 0$, откуда следует наше утверждение. Разумеется, выполнив дифференцирование $\varphi'(y)$, нужно затем в формуле V заменить y на $f(x)$, и выполнить соответствующие преобразования.

Пример 10. Найти по правилу V производную функции $f(x)=\ln x$.

Решение. Обратной для функции $f(x)=\ln x$ служит $x=\varphi(y)=e^y$. Считая известным, что $\left(e^y\right)'_y=e^y$, получаем по правилу V $f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{\varphi'(y)}=\frac{1}{e^y}$. Поскольку в нашем случае $e^y=x$, приходим к формуле 4 таблицы производных при $a=e$: $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

Пример 11. Вывести формулу 9) производной функции $y = \arcsin x$.

Решение. Известно, что функция, обратная $y = \arcsin x$, есть $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$. Ее производная равна $x'_y = \cos y$. По правилу V имеем: $f'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y}$. При этом должно быть $\cos y \neq 0$. Т.к. $\sin y = x$, то, с учетом условия $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, и тогда $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, где $x \in (-1; 1)$. Здесь мы привели пример, когда функция определена на отрезке $x \in [-1; 1]$, а ее производная – лишь в интервале $x \in (-1; 1)$. На концах отрезка график арксинуса имеет вертикальную касательную.

Упражнение 17. Выведите формулу $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$.

Упражнение 18. Найдите по правилу V производную функции $y = x^{\frac{1}{3}}$, считая известной производную обратной функции $x = y^3$: $\left(y^3\right)' = 3y^2$.

1.4. Дифференцирование сложной функции

Пусть дана сложная функция $y = f(u(x))$. Зафиксируем значение x и дадим ему приращение Δx. Тогда соответствующее значение $u = u(x)$ получит приращение Δu, которое, в свою очередь, вызовет приращение Δy функции y. Отношение приращений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ запишем в виде

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}, \tag{1.4.1}$$

считая, что $\Delta u \neq 0$. Тогда, при условии, что в заданной точке x существует производная $u'(x)$, а в соответствующей точке $u = u(x)$ – производная $f'(u)$, переходя к пределу в равенстве (1.4.1) при $\Delta x \to 0$ (тогда, как известно, и $\Delta u \to 0$), получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

откуда следует правило

$$\text{VI. } f'(x) = f'(u) \cdot u'(x).$$

Эта формула и выражает *правило дифференцирование сложной функции*. Можно показать, что если сложная функция образована суперпозицией нескольких (более, чем двух) функций, то правило дифференцирования останется прежним. Скажем, если $y = f(u)$, $u = u(v)$, $v = v(t)$, $t = t(x)$, то

$$f'_x\Big(u\big(v\big(t(x)\big)\big)\Big)=f'(u)\cdot u'(v)\cdot v'(t)\cdot t'(x). \qquad (1.4.2)$$

Конечно, предполагается, что все вычисленные в правой части производные существуют. Это правило – важнейшее (и, вместе с тем, наиболее трудное) в технике дифференцирования, и требует решения достаточно большого количества примеров для выработки твердого навыка в его применении.

Пример 1. Найти производную функций: а) $y=\sqrt{x+b}$; б) $y=\dfrac{1}{4x-1}$; в) $y=(ax+b)^s$, $s\in\mathbb{R}$.

Решение. а) Здесь $u(x)=x+b$, а $y=f(u)=\sqrt{u}$. Зная, что $\left(\sqrt{u}\right)'_u=\left(u^{\frac{1}{2}}\right)'=$ $=\dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ (частный случай формулы 5) таблицы производных), и $(x+b)'_x=1$. По формуле VI получаем $\left(\sqrt{x+b}\right)'_x=\left(\sqrt{u}\right)'_u\cdot u'_x=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+b}}$.

б) Здесь, аналогично, $u=4x-1$, $f(u)=\dfrac{1}{u}$. Поскольку $f'(u)=\left(\dfrac{1}{u}\right)'_u=-\dfrac{1}{u^2}$, а $u'_x=(4x-1)'=4$, то по формуле VI имеем $\left(\dfrac{1}{4x-1}\right)'=-\dfrac{1}{u^2}\cdot 4=-\dfrac{4}{(4x-1)^2}$.

в) Здесь $u=ax+b$, $f(u)=u^s$. По таблице $f'(u)=su^{s-1}$, $u'_x=(ax+b)'=a$. Поэтому $\left((ax+b)^s\right)'_x=s(ax+b)^{s-1}\cdot a=as(ax+b)^{s-1}$.

Упражнение 19. Найдите производные следующих функций: а) $f(x)=(7x-2)^7$; б) $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$; в) $f(x)=x^2\sqrt{x^2+1}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x+3}}$.

Пример 2. Найти производные функций: а) $f(t)=e^{-\frac{(t-a)^2}{2}}$; б) $f(x)=x\sqrt{\ln x}$.

Решение. а) Имеем функцию $f(u)=e^u$, где $u(t)=-\dfrac{(t-a)^2}{2}$. По правилу VI

$$y'_t=y'_u\cdot u'_t=e^u\left(-\frac{(t-a)^2}{2}\right)'=e^{-\frac{(t-a)^2}{2}}\left(-\frac{1}{2}\cdot 2(t-a)\right)=-(t-a)e^{-\frac{(t-a)^2}{2}}.$$

б) Здесь нужно взять производную произведения, второй множитель которого является сложной функцией, представляемой в виде $v=\sqrt{z}$, $z=\ln x$. Имеем последовательно

$$f'(x)=x'\sqrt{\ln x}+x\left(\sqrt{\ln x}\right)'=\sqrt{\ln x}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{z}}\cdot z'_x=\sqrt{\ln x}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}=$$

$$=\sqrt{\ln x}+\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}=\frac{2\ln x+1}{2\sqrt{\ln x}}.$$

Упражнение 20. Проверьте равенства $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$.

Упражнение 21. Продифференцируйте функции:

а) $f(x)=\left(\operatorname{sh}^2 px\right)=\left(\frac{e^{px}-e^{-px}}{2}\right)^2$; б) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; в) $f(t)=2^{\sin t+\cos t}$;

г) $\varphi(s)=\ln(\sin s)+\ln(\cos s)$.

Пример 3. Найти производную функции $f(x)=\frac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos x}}$.

Решение. Числитель и знаменатель являются сложными функциями. Числитель можно представить как $y=u^2$, $u=\sin x$, а знаменатель как $y=\sqrt{v}$, $v=\cos x$. Найдем производную числителя:

$$y'_x=\left(u^2\right)'_u\cdot(\sin x)'_x=2u\cdot\cos x=2\sin x\cos x=\sin 2x.$$

Производная знаменателя: $y'_x=\left(\sqrt{v}\right)'_v\cdot(\cos x)'_x=\frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot(-\sin x)=-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$.

Далее, по формуле производной частного, имеем

$$f'(x)=\frac{\left(\sin^2 x\right)'\sqrt{\cos x}-\sin^2 x\left(\sqrt{\cos x}\right)'}{\left(\sqrt{\cos x}\right)^2}=\frac{\sin 2x\sqrt{\cos x}-\sin^2 x\left(-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\right)}{\cos x}=$$

$$=\frac{4\sin x\cos^2 x+\sin^3 x}{2\cos x\sqrt{\cos x}}=\frac{\operatorname{tg} x\left(4\cos^2 x+\sin^2 x\right)}{2\sqrt{\cos x}}=\frac{\operatorname{tg} x\left(1+3\cos^2 x\right)}{2\sqrt{\cos x}}.$$

Упражнение 22. Найдите производные функций: а) $y=\sin^3 x+\cos^3 x$; б) $y=e^{-\cos\frac{x}{2}}\sin e^{-\frac{x}{2}}$; в) $s=\frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{\operatorname{ctg}\sqrt{x}}$.

Пример 4. Найти производные функций: а) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$; б) $f(x)=\arccos\sqrt{1-e^{-x}}$.

Решение. Имеем $f(u)=\operatorname{arctg} u$, $u=\frac{1}{x}$. Тогда $f'(x)=f'_u\cdot u'_x=\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{-1}{x^2}=$

$$=-\frac{1}{x^2\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)}=-\frac{1}{x^2+1}.$$

Получается, как видим, производная функции $\operatorname{arcctg} x$. Эта функция при $x \in (0; +\infty)$ совпадает с функцией $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, а при $x \in (-\infty; 0)$ отличается от нее на постоянное слагаемое π.

б) Здесь суперпозиция четырех функций: $y = \arccos u$, $u = \sqrt{v}$, $v = 1 - e^t$, $t = -x$. Отметим, что область определения задается неравенством $0 \le 1 - e^{-x} \le 1 \Leftrightarrow x \ge 0$. Последовательно применяя правило (1.4.2), получим

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{1 - e^{-x}}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{-x}}} \cdot \left(-e^{-x}\right) \cdot (-1) = -\frac{e^{-x}}{2\sqrt{e^{-x}}\sqrt{1 - e^{-x}}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}}.$$

Пример 5. Найти производную функции $y = x^x$.

Решение. Это частный случай *степенно-показательной* функции вида $f(x) = (u(x))^{v(x)}$ $(u(x) > 0)$, производная которой может быть вычислена по правилу дифференцирования сложной функции после предварительного преобразования ее к виду $u^v = e^{\ln\left(u^v\right)} = e^{v \ln u}$ с помощью логарифмического тождества $b = e^{\ln b}$, $b > 0$ и формулы логарифма степени. Тогда правило VI дает

$$\left(u^v\right)'_x = \left(e^{v \ln u}\right)'_x = e^{v \ln u}(v \ln u)'_x = e^{v \ln u}\left(v' \ln u + v(\ln u)'\right) = u^v\left(v' \ln u + \frac{v u'}{u}\right) =$$

$$= v u^{v-1} \cdot u' + u^v \ln u \cdot v'.$$

Эта формула легко запоминается, если заметить, что первое слагаемое в правой части есть результат дифференцирования u^v как степенной функции (рассматриваемой при постоянном показателе v), а второе получается при дифференцировании ее же как показательной (при постоянном основании u). Мы для решения примера проведем все выкладки заново:

$$\left(x^x\right)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = e^{x \ln x}(\ln x + 1).$$

Упражнение 23. Продифференцируйте функции: а) $y = x \operatorname{arctg}(\ln x)$; б) $y = (1 + x)^{\operatorname{tg} x}$; в) $y = (\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

Упражнение 24. Продифференцируйте функции:

а) $y = \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}}$; б) $y = \sqrt{a^2 - x^2} \arcsin \frac{x}{a}$; в) $y = \frac{1}{x}\sin^2 \frac{\pi}{x}$; г) $y = a e^{-pt} \sin(\omega t + \varphi)$;

д) $y = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln \cos x$; е) $y = 3^{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}}$; ж) $y = \frac{1}{\sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x}}}$;

з) $y = \left(x^2 + 1\right)^{\operatorname{arctg} x}$; и) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Упражнение 25. Проверьте, что функция $y=f(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению: а) $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $xy'=\left(1-x^2\right)y$; б) $y=\dfrac{x-e^{-x^2}}{2x^2}$, $xy'+2y=e^{-x^2}$.

1.5. Дифференцирование неявной функции

Напомним, что неявной функцией одной переменной называется функция, определяемая уравнением $F(x;\, y)=0$ (не разрешенным относительно y). Следует понимать, что не всякое уравнение такого вида определяет неявную функцию. Примерами могут служить уравнения $x^2+y^2+1=0$ или $e^{\frac{x}{y}}=0$, которые, очевидно, не имеют решений. С другой стороны, уравнение $F(x;\, y)=0$ может задавать несколько и даже бесконечно много функций. Например, уравнение $x^2+y^2-1=0$ определяет две функции, которые в явном виде задаются уравнениями $y=\sqrt{1-x^2}$ и $y=-\sqrt{1-x^2}$, а уравнение $\cos(x+y)=y$ – бесконечное множество функций (равносильная форма записи $x+y=\pm\arccos y+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$), $|y|\le 1$.

Условия существования и единственности неявной функции рассматриваются в разделе «Функции нескольких переменных», который изучается в курсе математики немного позже. В этом пункте рассматриваются стандартные приемы дифференцирования неявной функции, заданной уравнением $F(x;\, y)=0$. При этом всегда предполагается, что такая (неявная) функция $y=y(x)$ существует в некоторой окрестности точки x, где ищется производная.

Пример 1. Найти производную функции, заданной неявно уравнением $7x-2y+9=0$.

Решение. Рассматривая данное равенство как *тождество*, дифференцируем его почленно: равные тождественно функции имеют равные производные. Тогда

$$7-2y'+0=0,$$

откуда $y'=\dfrac{7}{2}$ (угловой коэффициент прямой, определяемой уравнением).

Конечно, тот же результат получится, если переписать уравнение в явной форме $y=-\dfrac{7}{2}x-\dfrac{9}{2}$. Но не всегда это бывает выгодно, не говоря о том, что далеко не каждое уравнение вида $F(x;\, y)=0$ разрешимо относительно y.

Пример 2. Найти производную функции, заданной неявно уравнением $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-1=0$ (эллипс с полуосями $a=4$, $b=3$).

Решение. Решаем аналогично предыдущему примеру. При дифференцировании второго слагаемого следует применить правило нахождения производной сложной функции: если $y=y(x)$, то $\left(y^2\right)'=2y\cdot y'$. С учетом этого замечания, имеем $\frac{1}{16}\cdot 2x+\frac{1}{9}\cdot 2y\cdot y'=0$, откуда $y'=-\frac{9x}{16y}$.

Видим, что найденная производная зависит и от x и от y. Это «типичное явление» при дифференцировании неявных функций. Рассмотрим ситуацию для нашего примера подробнее.

Разрешим уравнение относительно y: $y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$. Получили две функции – знак «+» соответствует верхней половине эллипса, знак «–» нижней. Дифференцируя каждую из них по обычным правилам, для функции $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$ получим $y'=\left(\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\right)'=\frac{3}{4}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}=-\frac{3x}{4\sqrt{16-x^2}}$, для функции $y=-\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$ $y'=\frac{3x}{4\sqrt{16-x^2}}$. Можно сказать, что для функций $y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$ производные равны $y'=\mp\frac{3x}{4\sqrt{16-x^2}}$. Поскольку $\sqrt{16-x^2}=\pm\frac{4}{3}y$, то $y'=-\frac{9x}{16y}$, что совпадает с результатом, полученным при неявном дифференцировании.

Ясно, что решение первым способом заметно короче и дает более простую и удобную формулу.

Пример 3. Вычислить для функции из примера 2 значение производной в точках с абсциссой $x_0=2\sqrt{3}$ и составить уравнение касательных к эллипсу в этих точках.

Решение. Найдем ординаты точек с данной абсциссой. Из уравнения эллипса имеем $y_0=\pm\frac{3}{4}\sqrt{16-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\pm\frac{3}{2}$. Подставляя поочередно координаты точек касания $\left(2\sqrt{3};\frac{3}{2}\right)$ и $\left(2\sqrt{3};-\frac{3}{2}\right)$ в найденную формулу для производной $y'=-\frac{9x}{16y}$, получим $y_1'\left(2\sqrt{3}\right)=-\frac{9\cdot 2\sqrt{3}}{16\cdot\frac{3}{2}}=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $y_2'\left(2\sqrt{3}\right)=-\frac{9\cdot 2\sqrt{3}}{16\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Тогда уравнения касательных имеют вид: (l_1): $y-\frac{3}{2}=-\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(x-2\sqrt{3}\right)$ и (l_2): $y+\frac{3}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(x-2\sqrt{3}\right)$ (см. рис. 7).

Упражнение 26. Дано уравнение окружности $x^2+y^2=a^2$. Найдите производную функции, заданной этим уравнением. Найдите точку пересечения касательных к окружности, проведенных в точках с абсциссой $x_0=\frac{a}{2}$.

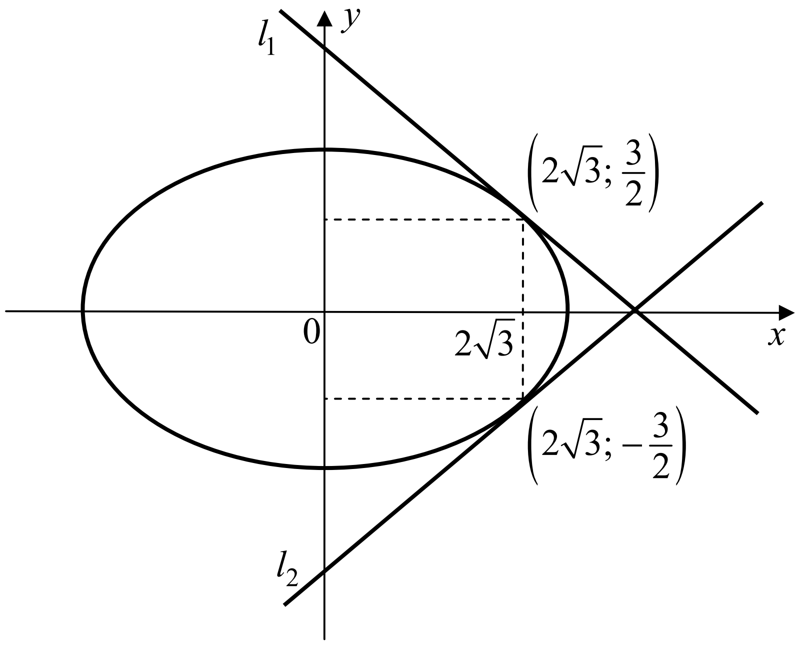

Рис. 7

Упражнение 27. Проверьте, что уравнение касательной к эллипсу в произвольной его точке $\left(x_0;\, y_0\right)$ может быть записано в виде $\dfrac{x_0 x}{a^2}+\dfrac{y_0 y}{b^2}=1$.

Упражнение 28. Продифференцируйте неявную функцию, заданную уравнением $x^3+y^3=a^3$.

Пример 4. Найти производную неявной функции, заданной уравнением $\left(1-x^2\right)e^y+\ln\left(x+y\right)=0$. Вычислить значение производной при $x=1$, составить уравнения касательной и нормали к графику в соответствующей точке.

Решение. Дифференцируя почленно, находим

$$\left(1-x^2\right)' e^y+\left(1-x^2\right)\left(e^y\right)'+\left(\ln\left(x+y\right)\right)'=0 \Leftrightarrow$$

$$-2xe^y+\left(1-x^2\right)e^y y'+\frac{1+y'}{x+y}=0. \qquad (1.5.1)$$

Из полученного соотношения выражаем y' как функцию x и y,

$$\left(\left(1-x^2\right)e^y+\frac{1}{x+y}\right)y'=2xe^y-\frac{1}{x+y} \Rightarrow$$

$$y'=\frac{2xe^y-\dfrac{1}{x+y}}{\left(1-x^2\right)e^y+\dfrac{1}{x+y}} \Rightarrow y'=\frac{2x\left(x+y\right)e^y-1}{\left(x+y\right)\left(1-x^2\right)e^y+1}.$$

Чтобы найти $y'\left(1\right)$, вычислим предварительно из исходного уравнения значение $y\left(1\right)$. Подставив $x=1$, получим $0\cdot e^y+\ln\left(1+y\right)=0$, откуда $y\left(1\right)=0$. Теперь подставим $x=1,\ y=0$ в найденное выражение для y' (или сразу в соотношение (1.5.1)) и найдем, что $y'(1)=1$.

Уравнение касательной в точке графика $(1;\,0)$ имеет вид $y=x-1$, уравнение нормали $y=1-x$.

Упражнение 29. Найдите значение производной неявной функции из упражнения 28 в точках: а) $x=0$; б) $x=\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$. Покажите, что при $x=a$ указанная производная не существует.

Упражнение 30. Продифференцируйте функцию, заданную неявно уравнением $x\sin y+y\cos x=\pi$. Покажите, что в точке $x=0$ график функции имеет горизонтальную касательную.

Упражнение 31. Найдите производные неявных функций, заданных уравнениями: а) $xy^3+x^3y=2$; б) $2\sqrt{x}y^2-\frac{x+1}{y}=0$; в) $x\operatorname{arctg} y+\frac{\pi}{4}e^{\frac{x-1}{3}}=0$. Для функции из п. в вычислите значение производной при $x=1$.

Логарифмическое дифференцирование. Этот полезный прием представляет собой частный случай дифференцирования неявной функции. Его суть в том, что функция, производную которой нужно найти, предварительно логарифмируется, а из полученного соотношения производная ищется по рассмотренному выше правилу дифференцирования неявной функции.

Пример 5. (Уже встречавшийся в предыдущем пункте). Найти производную функции $y=x^x$.

Решение. Логарифмируя по правилу логарифма степени при $x>0$, получим $\ln y=x\ln x$. Полученное соотношение представляет собой уравнение, определяющее заданную неявно функцию. Дифференцируем обе части равенства:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x},$$

откуда получаем

$$y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1).$$

Полезно вернуться к примеру 5 п.1.4 и сравнить оба решения.

Пример 6. Продифференцировать тем же способом общую степенно-показательную функцию $y=u^v$, где $u=u(x)>0$, $v=v(x)$ – любые дифференцируемые функции.

Решение. Имеем $\ln y=v\ln u$. Далее $\frac{1}{y}\cdot y'=v'\ln u+v\cdot\frac{u'}{u}$, откуда $y'=y\left(v'\ln u+v\cdot\frac{u'}{u}\right)$, где вместо y еще нужно подставить u^v, что дает окончательно

$$\left(u^v\right)'=u^v v'\ln u+vu^{v-1}u'.$$

Упражнение 32. Найдите производные функций: а) $y = x^{\operatorname{tg} x}$; б) $y = x^{\ln(1+x)}$; в) $y = (x + \sin x)^{\arccos x}$.

Приведем еще один пример, иллюстрирующий полезность логарифмического дифференцирования.

Пример 7. Найти производную функции $y = e^{-x^2}\sqrt{\dfrac{x\cos^2 x}{1+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}}}$.

Решение обычным способом, по правилам вычисления производной произведения, частного функций и производной сложной функции, требует довольно трудоемких вычислений. Прологарифмируем и применим свойства логарифма:

$$\ln y = -x^2 + \frac{1}{2}\left(\ln x + 2\ln\cos x - \ln\left(1+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)\right).$$

Далее действуем, как показано выше:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = -2x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{2\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\left(1+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}\cdot\frac{-1}{x^2}\right) =$$

$$= -2x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - 2\operatorname{tg} x + \frac{1}{\left(1+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+1\right)}\right).$$

Окончательно получаем

$$y' = e^{-x^2}\sqrt{\frac{x\cos^2 x}{1+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}}}\cdot\left(-2x + \frac{1}{2x} - \operatorname{tg} x + \frac{1}{2\left(1+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+1\right)}\right).$$

Упражнение 33. Вычислите производные функций: а) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x\left(x^2+x+1\right)^2}{\sqrt{2-x}}}$;

б) $y = \left(\sqrt{\dfrac{\ln(1+x)}{x}}\right)^{x^2}$.

1.6. Производная функции, заданной параметрически

Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \; t \in T. \tag{1.6.1}$$

Предполагая, что при некотором $t \in T$ существуют производные $x'(t)$ и $y'(t)$, причем $x'(t) \neq 0$, дадим t приращение Δt. Тогда $x(t)$ и $y(t)$ получат приращения Δx и Δy соответственно, причем в силу непрерывности при $\Delta t \to 0$ также и $\Delta x \to 0$. Отношение приращений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ перепишем в виде $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} : \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{1.6.2}$$

Эта формула – правило вычисления производной функции, заданной параметрически.

Упражнение 34. Прямая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = bt + y_0. \end{cases}$$

Найдите производную y'_x.

Пример 1. Эллипс задан параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \; t \in [0;\, 2\pi).$$

Найти y'_x. Вычислить угловой коэффициент касательной к эллипсу в точке $x = \frac{a}{2}$.

Решение. По формуле (2) имеем $y'_x = \frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$.

При ответе на второй вопрос следует учесть, что на эллипсе имеются две точки с указанной абсциссой $\frac{a}{2}$: первая расположена на верхней половине эллипса, где $t \in (0;\, \pi)$, вторая – на нижней, где $t \in (\pi;\, 2\pi)$. При $x = \frac{a}{2}$ имеем $a\cos t = \frac{a}{2} \Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{2}$. Для первой точки: $t = \frac{\pi}{3}$, $y = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, для второй: $t = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$, $y = -\frac{b\sqrt{3}}{2}$ (см. рис. 8).

В первой точке угловой коэффициент касательной равен $k_1 = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = -\frac{b}{a\sqrt{3}}$, а во второй $k_2 = \frac{b}{a\sqrt{3}}$.

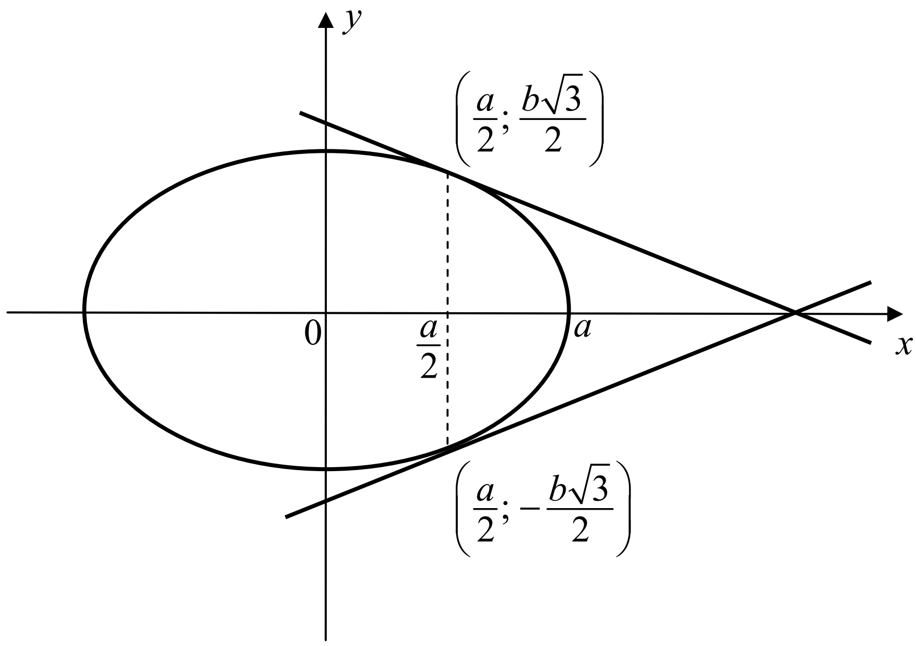

Рис. 8

Пример 2. Продифференцировать функцию, заданную параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases} \tag{1.6.3}$$

Решение. График этой функции – кривая, которую описывает точка окружности радиуса a, катящейся по оси OX (в плоскости OXY). Если на ободе колеса отметить точку, например, с помощью краски, и катить колесо вдоль прямой без скольжения и пробуксовки (см. рис. 9), то траекторией этой точки и будет линия, заданная уравнениями (1.6.3). Эта линия называется *циклоидой*.

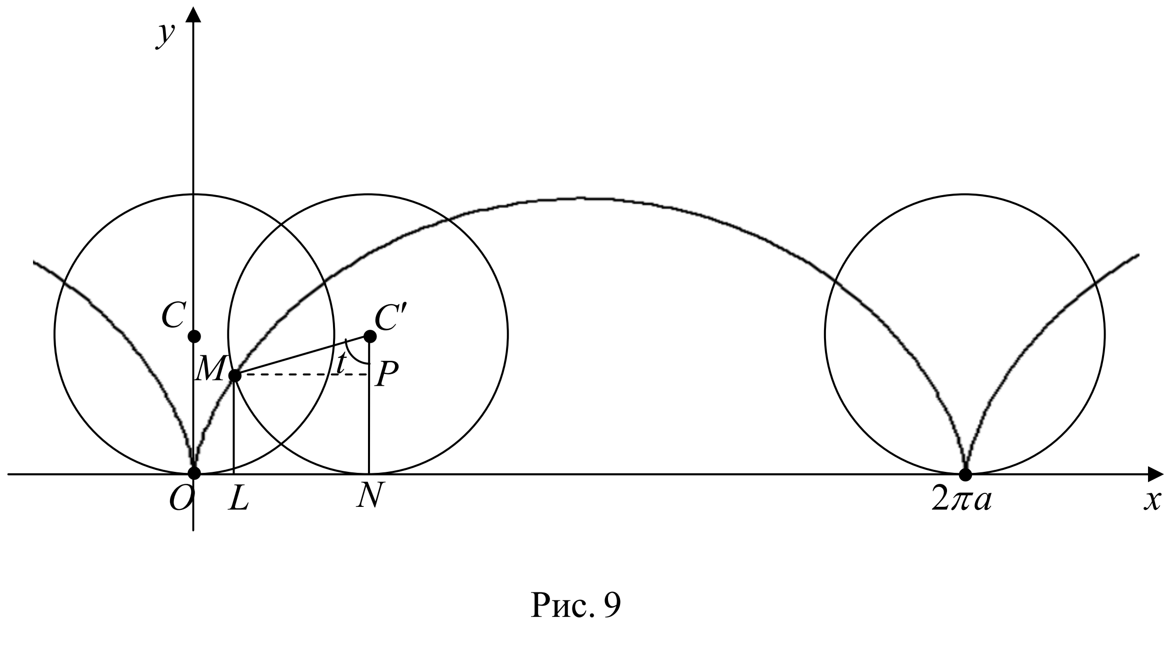

Рис. 9

Параметром служит угол t (в радианах!) поворота радиуса точки, который в начале движения, когда отмеченная точка была в начале координат, имел вертикальное положение. Рассматривая рис. 9, можно проверить, что абсцисса точки M, соответствующей повороту на угол t, равна $x = ON - LN = at - a\sin t$, а ордината $y = C'N - C'P = a - a\cos t$, т.е. получаются уравнения (1.6.3). Часть графика на рис. 9, соответствующая участку длины $2\pi a$, дает траекторию точки при повороте радиуса на 2π. Ясно, что при дальнейшем движении картина повторяется. Кривая имеет период $2\pi a$. Отметим еще, что в явном виде выразить функцию из уравнений (1.6.3) невозможно. Тем самым, мы в данном случае имеем пример неэлементарной функции. Ее производная выражается формулой

$$y'_x = \frac{a\left(1-\cos t\right)'}{a\left(t-\sin t\right)'} = \frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

При $t = 2\pi n$ производная не существует (обратите внимание на характерные точки «излома» графика, касательная в которых расположена вертикально). По формулам $\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$, $1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$ ответ преобразуется: $y'_x = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$.

Пример 3. Составить уравнение касательной к циклоиде $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $t \in \left[0;\, 2\pi\right)$, параллельной биссектрисе координатного угла.

Решение. Угловой коэффициент биссектрисы $y = x$ равен 1. По условию параллельности имеем $y'_x = 1$, т.е. $\operatorname{ctg}\frac{t}{2} = 1$, откуда $\frac{t}{2} = \frac{\pi}{4}$ и $t = \frac{\pi}{2}$. Это дает координаты точки касания: $x = \frac{\pi}{2} - 1$, $y = 1$. Тогда уравнение искомой касательной

$$y - 1 = x - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \Leftrightarrow y = x - \frac{\pi}{2} + 2.$$

Пример 4. Кривая задана уравнениями $\begin{cases} x = \ln\left(1+t\right), \\ y = 2 - t - t^2. \end{cases}$ Найти производную y'_x. Вычислить угол между касательными к кривой в точках ее пересечения с координатными осями.

Решение. По формуле (1.6.2) находим $y'_x = \dfrac{\left(2-t-t^2\right)'}{\left(\ln\left(1+t\right)\right)'} = -\left(2t+1\right)\left(1+t\right)$.

Для ответа на второй вопрос найдем значения t, при которых кривая пересекает оси координат. Заметим предварительно, что функция определена при $t > -1$. Если $y = 0$, то $2 - t - t^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = -2. \end{array}\right.$ Подходит только первый корень $t = 1$. В соответствующей точке угловой коэффициент равен $k_1 = y'_x\Big|_{t=1} = -\left(2+1\right)\left(1+1\right) = -6$.

Если $x = 0$, то $\ln(1+t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$, значит, для этой точки имеем $k_2 = y'_x\Big|_{t=0} = -1$. Применяя формулу тангенса угла между прямыми, находим

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{5}{7} \text{ или } \Theta = \operatorname{arctg}\frac{5}{7}.$$

Упражнение 35. Найдите производные функций, заданных параметрически:
а) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = (t - e)\sqrt{t}, \\ y = \dfrac{\ln t}{t}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = 2\ln \operatorname{tg} t, \\ y = \operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t. \end{cases}$

Упражнение 36. Для кривых а) и б) упражнения 35 определите угловые коэффициенты нормалей в точках пересечения с координатными осями. В упражнении а) считать $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

1.7. Дифференциал, его геометрический смысл и применение в приближенных вычислениях

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется произведение производной в этой точке на приращение аргумента Δx. Обозначение:

$$df(x) = f'(x)\Delta x \text{ (или } \big(\text{или } dy = y'\Delta x\big). \qquad (1.7.1)$$

Если $f(x) = x$, то $df(x) \equiv \underline{d}x = x'\Delta x = \underline{\Delta}x$, поэтому формулу (1.7.1) иногда записывают в виде

$$df(x)(= dy) = f'(x)dx. \qquad (1.7.2)$$

Геометрический смысл дифференциала ясен из рис. 10.

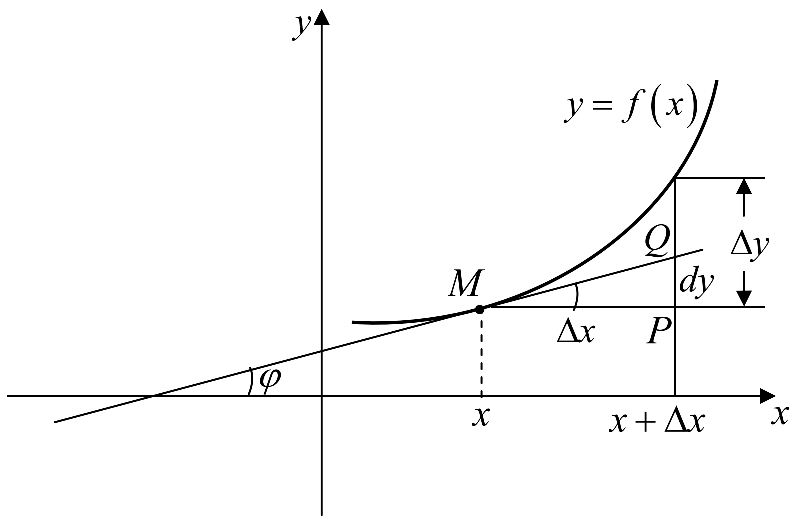

Рис. 10

Поскольку $f'(x)=\operatorname{tg} x$, где φ – угол между касательной и осью OX, то $df(x)=\operatorname{tg} x\cdot\Delta x$ есть приращение (изменение) ординаты касательной при переходе от точки x к точке $x+\Delta x$.

Очевидно, вычисление дифференциала функции, имеющей производную, не представляет собой проблемы. Так $d\left(x^2\right)=2x\,dx$, $d(\cos x)=-\sin x\,dx$ и т.п.

Упражнение 37. Найдите дифференциалы функций: а) $f(x)=e^{px}+e^{-px}$; б) $f(x)=x\ln x$; в) $f(x)=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$; г) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}\omega x}{x}$.

Также представляются почти очевидными следующие формулы для дифференциала суммы, произведения и частного. Их вывод предоставляется в качестве упражнения.

Упражнение 38. Выведите формулы: $d(C)=0$; $d\left(Cu(x)\right)=Cd\left(u(x)\right)$; $d(u+v)=du+dv$; $d(uv)=vdu+udv$; $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$. Здесь $u=u(x)$, $v=v(x)$ – дифференцируемые функции.

Остановимся кратко на дифференциале сложной функции $y=f\left(x(t)\right)$, t – независимая переменная, $x(t)$ – промежуточный аргумент.

Пример 1. Вывести формулу дифференцирования сложной функции $y=f\left(x(t)\right)$.

Решение. Считая, что в точке t существует производная $x'(t)$, а в соответствующей точке $x=x(t)$ существует производная $f'(x)$, по правилу дифференцирования сложной функции найдем производную по t:

$$f_t'\left(x(t)\right)=f'(x)x'(t).$$

Остается умножить ее на приращение независимой переменной Δt, тогда

$$df\left(x(t)\right)=f'(x)x'(t)\Delta t.$$

Но в правой части произведение $x'(t)\Delta t$ представляет собой, по определению, дифференциал функции $x(t)$: $dx=x'(t)\Delta t$. Поэтому окончательно

$$df\left(x(t)\right)=f'(x)dx. \tag{1.7.3}$$

Видим, что полученная формула, совпадает с формулой (1.7.2) для дифференциала обычной (не сложной) функции $f(x)$, с той лишь разницей, что в формуле (1.7.2) было $dx=\Delta x$, а в формуле (1.7.3) $dx=x'(t)\Delta t\neq\Delta x$. По указанной причине запись $f'(x)dx$ называют инвариантной, т.е. неизменной, формой дифференциала.

Пример 2. Найти дифференциал функции $y=\ln(\pi\sin t)$.

Решение. Полагая $x=\pi\sin t$, запишем сначала ответ в инвариантной форме: $dy=y'(x)dx=\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dx}{\pi\sin t}$.

Если расшифровать числитель: $dx = (\pi\sin t)'_t\,\Delta t = \pi\cos t\cdot\Delta t$, то получим $dy = \dfrac{\pi\cos t}{\pi\sin t}\Delta t = \mathrm{ctg}\,t\cdot\Delta t$. Ясно, что можно сразу взять производную $\left(\ln(\pi\sin t)\right)' = \dfrac{\pi\cos t}{\pi\sin t} = \pi\,\mathrm{ctg}\,t$ и умножить ее на Δt, получив тот же результат.

Упражнение 39. Найдите дифференциал функции $y = (t + \mathrm{arctg}\,t)^4$.

Вернемся теперь к определению производной

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

По свойству предела отсюда следует соотношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \text{ или}$$

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x). \tag{1.7.4}$$

Напомним, что символ $o(\Delta x)$ означает бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx, при $\Delta x \to 0$.

Равенство (1.7.4) можно переписать в виде

$$\Delta y = dy + o(\Delta x). \tag{1.7.5}$$

Формула (1.7.4) – одна из главнейших в математическом анализе. Она показывает в самом общем виде, как «устроено» приращение любой дифференцируемой функции «в малом». С точностью до бесконечно малой высшего порядка, чем Δx, при $\Delta x \to 0$ оно пропорционально с коэффициентом пропорциональности, равным $f'(x)$, приращению аргумента Δx. Дифференциал функции $dy \approx f'(x)\Delta x$ составляет *главную часть* ее приращения, линейную относительно Δx. Если переобозначить x на x_0, а $x + \Delta x$ на x, то формула (1.7.4) перепишется в виде

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \tag{1.7.6}$$

Таким образом, с точностью до бесконечно малой $o(\Delta x) = o(x - x_0)$ приращение функции при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$ приближенно равно приращению ординаты касательной (см. рис. 10) или дифференциалу функции в точке x_0: $df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Это служит основанием для приближенного равенства

$$y - y_0 \approx f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow \Delta y(x_0) \approx df(x_0) \Leftrightarrow$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{1.7.7}$$

На этом равенстве основано применение дифференциала для приближенного вычисления функций. Техника подобных вычислений разъясняется на следующих примерах.

Пример 3. Вычислить приближенно $(1{,}036)^6$.

Решение основывается на приближенном равенстве (1.7.7). Ясно, что в качестве функции $f(x)$ следует взять $f(x)=x^6$, а за точку x_0 – точку 1. Тогда $f(x_0)=1^6=1$, $f'(x_0)=6x_0^6=6$, $\Delta x=0{,}036$. Записываем формулу (1.7.7) в условиях нашего примера: $(1{,}036)^6\approx 1+6\cdot 0{,}036=1{,}216$. Ответ следует округлить: $(1{,}036)^6\approx 1{,}22$. Более точное вычисление дает 1,234…, т.е. ошибка составляет менее 0,02.

Пример 4. Используя дифференциал, вывести приближенную формулу (при малых α): $\sqrt[n]{1+\alpha}\approx 1+\dfrac{\alpha}{n}$.

Решение. Положим $f(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$. В качестве «опорной» точки возьмем $x_0=1$, $\Delta x=\alpha$ (предполагая, конечно, что $|\alpha|<1$). Тогда по формуле (1.7.7)

$$\sqrt[n]{1+\alpha}\approx\sqrt[n]{1}+\left(\sqrt[n]{x}\right)'\Big|_{x=1}\cdot\Delta x=1+\frac{\alpha}{n}.$$

Что и требовалось доказать.

К этому случаю сводится вычисление корней из чисел, больших 1.

Пример 5. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{111}$.

Решение. Подберем ближайшее к 111 число, куб которого есть целое число. Таким числом будет 125, равное 5^3. Тогда запишем: $111=125-14=125\left(1-\dfrac{14}{125}\right)$.

Далее $\sqrt[3]{111}=\sqrt[3]{5^3\left(1-\dfrac{14}{125}\right)}=5\sqrt[3]{\left(1-\dfrac{14}{125}\right)}$. Полагая $\alpha=-\dfrac{14}{125}$, получаем по формуле предыдущего примера $\sqrt[3]{111}\approx 5\left(1-\dfrac{14}{125}\cdot\dfrac{1}{3}\right)=5\left(1-\dfrac{14}{375}\right)\approx 4{,}81$.

Здесь ошибка оказывается меньше 0,01.

Пример 6. Вычислить приближенно значение функции $\cos x$ при $x=1$.

Решение. Здесь удобно «опорное» значение $x_0=\dfrac{\pi}{3}\approx 1{,}047$; $\cos x_0=0{,}5$. За Δx принимаем $x-x_0=1-\dfrac{\pi}{3}\approx -0{,}047$. По формуле (1.7.7) находим

$$\cos 1\approx\cos\frac{\pi}{3}+(\cos x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}\cdot\Delta x=0{,}5-\sin\frac{\pi}{3}\cdot(-0{,}047)=$$

$$=0{,}5+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}047\approx 0{,}5+0{,}04=0{,}54.$$

Упражнение 40. Найдите приращение и дифференциал функции $y=x^3-2x^2+2$ при $x=2$, $\Delta x=0{,}2$.

Упражнение 41. Вычислите приближенно, используя дифференциал: а) $\sqrt{60}$; б) $\sqrt[3]{100}$; в) $\operatorname{arctg} 0{,}9$; г) $\sin 32^\circ$.

Упражнение 42. Вычислите приближенно значение функции: а) $y=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+3}}$ в точке $x=0{,}96$; б) $y=x\ln x$ в точке $x=1{,}1$.

1.8. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть $y=f(x)$ – дифференцируемая функция. Если ее производная $y'=f'(x)$ также дифференцируема, то эта производная $\left(f'(x)\right)'$ называется *производной второго порядка* (второй производной) от $f(x)$. Обозначается $f''(x)$ или y''.

Сама функция называется при этом дважды дифференцируемой. Аналогично, производная от второй производной есть *производная третьего порядка* (третья производная) и т.д.

Обозначается $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$, …, $f^{(n)}(x)$ или y''', y^{IV}, …, $y^{(n)}$, где $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$ есть производная n-го порядка от n раз дифференцируемой функции. Употребляются также обозначения $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $y'''=\dfrac{d^3y}{dx^3}$, …, $y^{(n)}=\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

Отметим, что вторая производная имеет прямой механический (физический) смысл: если для функции $S=S(t)$ первая производная $S'(t)$ есть скорость движения (скорость изменения пройденного пути), то вторая производная $S''(t)$ представляет собой *ускорение* – скорость изменения скорости.

Пример 1. Найти производные всех порядков от многочлена $y=5x^3-4x^2+2x-1$.

Решение. $y'=15x^2-8x+2$; $y''=30x-8$; $y'''=30$; $y^{IV}=0$; $y^{(n)}=0$ при всех $n\geq 4$.

Пример 2. Точка движется по закону $S=e^{-t}\left(t^2+1\right)$, $t\geq 0$. С каким ускорением двигалась точка в момент, когда ее скорость была равна нулю? Какова была скорость движения в момент, когда ускорение было равно нулю?

Решение. Найдем скорость и ускорение по механическому смыслу первой и второй производных:

$$v=S'(t)=-e^{-t}\left(t^2+1\right)+e^{-t}\cdot 2t=-e^{-t}(t-1)^2,$$

$$a=S''(t)=e^{-t}(t-1)^2-e^{-t}\cdot 2(t-1)=e^{-t}(t-1)(t-3).$$

Видим, что точка находилась в состоянии покоя $(v=0)$ только при $t=1$, и в этот момент ее ускорение было равно $S''(1)=0$, что дает ответ на первый вопрос.

Кроме того, ускорение было равно нулю еще и при $t=3$. В этот момент точка двигалась со скоростью $S'(3)=-4e^{-3}\approx -0,21$ (движение было замедленным). Кроме того, очевидно (уже найдено), что $S'(1)=0$.

Упражнение 43. Чему равны производные $(n-1)$-го и n-го порядков от многочлена $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$?

Упражнение 44. Закон движения точки задан формулой $S=ae^t(1-at)$. Найдите ускорение движения в момент покоя $(v=0)$. В какой момент ускорение равно нулю?

Пример 3. Найти общий вид производной n-го порядка от функции $y=\ln x$.

Решение. $y'=\dfrac{1}{x}$, $y''=-\dfrac{1}{x^2}$, $y'''=\dfrac{2\cdot 1}{x^3}$, $y^{IV}=-\dfrac{3\cdot 2\cdot 1}{x^4}$, $y^{V}=\dfrac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{x^5}$ и т.д.

Видим, что производные нечетного порядка положительны, а четного – отрицательны. Показатель степени у x в знаменателе всюду равен порядку производной. Наконец, числитель (без учета знака) равен произведению натуральных чисел от 1 до $n-1$, где n – порядок производной. Поэтому

$$(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Принято считать, что $0!=1$.

Упражнение 45. Найдите производные n-го порядка функций: а) $y=a^x$; б) $y=e^{-px}$; в) $y=xe^x$.

Упражнение 46. Покажите, что для функций $\sin x$ и $\cos x$ производные, порядок которых делится на 4, совпадают с самими функциями. Проверьте справедливость формул $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$ и $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Пример 4. Найти производную порядка n функции $y=\dfrac{1}{x^2-a^2}$.

Решение. Разложим знаменатель на множители и преобразуем дробь: $\dfrac{1}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{(x-a)(x+a)}=\dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x+a}\right)$. Найдем производные каждого слагаемого: $\left(\dfrac{1}{x\pm a}\right)'=-\dfrac{1}{(x\pm a)^2}$, $\left(\dfrac{1}{x\pm a}\right)''=\dfrac{2}{(x\pm a)^3}$, …, $\left(\dfrac{1}{x\pm a}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x\pm a)^{n+1}}$.

Тогда $\left(\dfrac{1}{x^2-a^2}\right)^{(n)}=(-1)^n n!\left(\dfrac{1}{(x-a)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+a)^{n+1}}\right)$.

Упражнение 47. Найдите производные n-го порядка функции $y=\dfrac{1}{x^2-6x+8}$.

Указание. Представьте дробь $\dfrac{1}{x^2-6x+8}$ в виде $\dfrac{1}{(x-2)(x-4)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-4}$.
Значения A и B найдите самостоятельно.

Дифференциалом 2-го порядка функции $y=f(x)$ называется дифференциал от ее дифференциала: $d^2f(x)=d\big(d\,f(x)\big)$.

Пример 5. Вычислить второй дифференциал.

Решение. По определению дифференциала имеем $d\big(d\,f(x)\big)=$ $=d\big(f'(x)\Delta x\big)=\big(f'(x)\Delta x\big)'\Delta x$. Величина Δx, очевидно, не зависит от x и поэтому при дифференцировании рассматривается как постоянная.

С учетом этого $\big(f'(x)\Delta x\big)'\Delta x=f''(x)\cdot\Delta x\cdot\Delta x$ и окончательно

$$d^2f(x)=f''(x)(\Delta x)^2.$$

Аналогичным образом определяются и вычисляются дифференциалы более высоких порядков.

$$d^3f(x)=d\big(d^2f(x)\big)=f'''(x)(\Delta x)^3,\ \ldots,\ d^nf(x)=d\big(d^{n-1}f(x)\big)=f^{(n)}(x)(\Delta x)^n.$$

Замечание. Зная, что $dx=\Delta x$, можно записывать дифференциалы высших порядков в виде: $d^2f(x)=f''(x)dx^2$, $d^3f(x)=f'''(x)dx^3$, …. Здесь $dx^n=(dx)^n$.

Однако, в отличие от первого дифференциала, такая форма записи уже не является инвариантной при переходе к сложной функции $y=f\big(x(t)\big)$. Это, очевидно, связано с тем, что в записи ее дифференциала $df(x)=f'(x)dx$ множитель $dx\neq\Delta x$ и не является постоянной.

Пример 6. Найти дифференциал второго порядка функции $y=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$.

Решение. Нужно найти вторую производную. Имеем

$$y'=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{4}{\sin^2 2x};$$

$$y''=\frac{4\cdot(-2)}{\sin^3 2x}\cdot 2\cos 2x\cdot 2=-\frac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}.$$

Тогда $d^2(\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x)=-\dfrac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}dx^2$.

Упражнение 48. Найдите дифференциалы 2-го и 3-го порядков для функций:
а) $y=x^2e^{-x}$; б) $y=\sin x+\cos x$; в) $y=\ln(1+x)$.

1.9. Повторное дифференцирование неявной функции и функции, заданной параметрически

Остановимся кратко на производных высших порядков от неявной функции.

Пример 1. Найти вторую производную функции, заданной неявно уравнением $x^3+y^3-9=0$. Вычислить для этой функции $y''(1)$.

Решение. Дифференцируем данное уравнение как тождество, считая, что $y=y(x)$ и применяя, по необходимости, правило дифференцирования сложной функции (см. п. 1.5).

$$3x^2+3y^2y'=0 \Leftrightarrow x^2+y^2y'=0. \qquad (1.9.1)$$

Отсюда можно выразить $y'=-\dfrac{x^2}{y^2}$ и искать y'' по обычным правилам. Но целесообразней во многих решениях этого не делать, а просто дифференцировать соотношение (1.9.1) повторно:

$$2x+2y(y')^2+y^2y''=0 \Leftrightarrow 2\left(x+y(y')^2\right)+y^2y''=0.$$

Отсюда выражаем $y''=-\dfrac{2\left(x+y(y')^2\right)}{y^2}$.

Подставим $x=1$: $x^3+y^3-9=0 \Rightarrow 1+y^3-9=0 \Rightarrow y=2$; $y'(1)=-\dfrac{1^2}{2^2}=-\dfrac{1}{4}$;

$$y''(1)=-\frac{2\left(1+2\left(-\frac{1}{4}\right)^2\right)}{2^2}=-\frac{9}{16}.$$

Напомним, что если $S=S(t)$ – закон движения тела, то $S'(t)$ есть скорость этого движения, а $S''(t)$ – ускорение (скорость изменения скорости).

Тем самым, решив пример 1, мы установили, что тело, движущееся по закону $t^3+s^3=9$, в момент $t=1$ имеет скорость, равную $-\dfrac{1}{4}$, а ускорение, равное $-\dfrac{9}{16}$.

Упражнение 49. Найдите 2-ю производную неявной функции $y=y(x)$, заданной уравнением $xy^2-ye^x+1=0$. Вычислите $y''(0)$.

Упражнение 50. Тот же вопрос для функции, заданной уравнением $1-e^x-\ln(x+y)=0$.

Переходим к функции, заданной параметрически $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t). \end{cases}$

В п.1.6 было показано, что ее производная при $x'(t)\neq 0$ определяется по формуле $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Пример 2. Доказать, что вторая производная функции, заданной параметрически, может быть найдена по формуле

$$y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - y'_t x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}. \tag{1.9.2}$$

Решение. Применяя формулу производной частного, а также правило дифференцирования сложной функции, имеем

$$y''_{xx} = \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'_x = \frac{y''(t)\cdot t'_x \cdot x'_t - y'(t)\cdot x''(t)\cdot t'_x}{\left(x'_t\right)^2}.$$

Поскольку $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$ (по правилу дифференцирования обратной функции), то, вынося в числителе за скобки $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$, получим требуемую формулу.

Пример 3. Найти вторую производную функции, заданной параметрически уравнениями (циклоида) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

Решение. Находим $x'(t) = a(1-\cos t)$, $x''(t) = a\sin t$, $y'(t) = a\sin t$, $y''(t) = a\cos t$. По формуле (1.9.2) получим

$$y''_{xx} = \frac{a(1-\cos t)a\cos t - a\sin t\cdot a\sin t}{\left(a(1-\cos t)\right)^3} = \frac{a^2\left(\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t\right)}{a^3(1-\cos t)^3} =$$

$$= \frac{\cos t - 1}{a(1-\cos t)^3} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2} = -\frac{1}{4a\sin^2\dfrac{t}{2}}.$$

Для данной функции вторая производная определена всюду, кроме точек $x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, т.е. там же, где y'_x.

Упражнение 51. Найдите y''_{xx}, если $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

Производные 3-го и более высоких порядков могут быть получены последовательным дифференцированием формулы (1.9.2). Однако получающиеся при этом новые формулы довольно громоздки, поэтому полезно иметь в виду и использовать на практике следующее замечание.

Замечание. Производная y''_{xx} функции, заданной параметрически, может быть найдена следующим образом: записываем формулу $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ и дифференцируем по x с помощью правила для производной сложной функции

$$y''_{xx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot t'_x.$$

По правилу дифференцирования сложной функции $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$, получаем

$$y''_{xx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t}. \qquad (1.9.3)$$

Подобным же образом вычисляются $y'''_{xxx} = \left(y''_{xx}\right)'_t \cdot \dfrac{1}{x'_t}$ и т.д.

Пример 4. Найти вторую производную функции, заданной параметрически уравнениями $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ не используя формулу (1.9.2).

Решение. Найдем первую производную $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{a \sin t}{a(1-\cos t)} = \dfrac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} =$

$= \operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$. Далее $y''_{xx} = \left(\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}\right)'_t \cdot \dfrac{1}{x'_t} = -\dfrac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}} \cdot \dfrac{1}{a(1-\cos t)} = -\dfrac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$.

Получили тот же ответ, но решение заметно короче. Найдем еще 3-ю производную.

$$y'''_{xxx} = -\frac{1}{4a}\left(\sin^{-4}\frac{t}{2}\right)'_x = -\frac{1}{4a}\left(\sin^{-4}\frac{t}{2}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = -\frac{1}{4a}\left(-4\sin^{-5}\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)} =$$

$$= \frac{\cos\frac{t}{2}}{2a^2\sin^5\frac{t}{2}(1-\cos t)} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^7\frac{t}{2}} = \frac{1}{4a^2\sin^6\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{t}{2}}.$$

Упражнение 52. Решите указанным способом упражнение 51.

Упражнение 53. Найдите y''_{xx} для функций, заданных параметрически: а) $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = t^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t}, \\ y = \dfrac{\ln t}{t}. \end{cases}$

Упражнение 54. Для функций из упражнения 53 вычислите y''_{xx} в точке пересечения графика с осью абсцисс.

Дополнительные упражнения к разделу I

Упражнение 55. Переменная x получает приращение Δx. Определите приращение функции: а) $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$; б) $f(x)=3x-x^3$; в) $f(x)=\log_2(1+x)$.

Упражнение 56. Найдите производные функций из упражнения 55, исходя их определения. Вычислите значения производных при $x=0$.

Упражнение 57. Чему равен предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, если функция $f(x)$ дифференцируема в точке a.

Упражнение 58. Точка движется вдоль оси OX по закону $S=2t+5t^2$, где t – время в секундах, S – расстояние в метрах. Чему равна средняя скорость за промежуток времени $t\in[10;10+\Delta t]$? Вычислите среднюю скорость при: а) $\Delta t=2$; б) $\Delta t=0{,}2$. Найдите мгновенную скорость при $t=15$.

Упражнение 59. 1) Определите углы, под которыми парабола $y=x-\dfrac{x^2}{2}$ пересекает ось OX. 2) Тот же вопрос для гиперболы $y=\dfrac{1+2x}{x-2}$.

Упражнение 60. Составьте уравнения касательной и нормали к графику данной функции в указанной точке: а) $y=\sqrt{x^2+3x-9}$, $x_0=3$; б) $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x+1$, $x_0=\dfrac{\pi}{3}$; в) $y=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$ в точках пересечения с координатными осями.

Упражнение 61. Определите точку x, в которой функция $y=\dfrac{x^2}{2}$ возрастает: а) с той же скоростью, что и $y=-\dfrac{1}{x}$; б) в 4 раза быстрее, чем $y=-\dfrac{1}{x}$.

Упражнение 62. Найдите производные следующих функций: а) $y=x(x+1)^2-\dfrac{2}{x^2(x+1)}$; б) $y=2e^{\sin\frac{x}{2}}$; в) $y=\operatorname{arctg}(\ln x)-\dfrac{x}{\sqrt{\ln(1+x)}}$; г) $y=2^{\arcsin^2 x}$; д) $y=\dfrac{1}{3x^2-1}-\sqrt{3^{x^2}+1}$; е) $y=\left(x+2\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{x}\right)^4$; ж) $y=\log_x(\sin x)$; з) $y=\dfrac{e^{-\operatorname{tg}x}\sqrt[3]{\operatorname{arcctg}^2 x}}{x^2\sqrt[4]{x^4+1}}$ (примените логарифмическое дифференцирование).

Упражнение 63. $y=\dfrac{x^3-x^2+1}{x}$. Найдите dy при $x=2$ и $\Delta x=1$.

Упражнение 64. $y=x\sqrt{x^2+1}$. Найдите dy при $\Delta x=0{,}02$.

Упражнение 65. $y=e^{\operatorname{arctg}(\ln x)}$. Найдите dy при $x=1$.

Упражнение 66. Вычислите приближенно, используя дифференциал: а) $\sqrt[3]{130}$; б) $\arcsin 0{,}57$. Оцените погрешность.

Упражнение 67. 1) Найдите производные функций, заданных неявно: а) $\left(x^2-1\right)e^y+y\sqrt{x}=0$; б) $x^3-\dfrac{2x}{y}+y^3=8$; в) $\sin^2 x+\cos^2 y=x$. 2) Для функции из п. а вычислите $y'(1)$. 3) Для функции из п. б составьте уравнения касательной и нормали в точке пересечения с осью OY.

Упражнение 68. $x^2-2xy-y^3+1=0$. Вычислите $y''(1)$.

Упражнение 69. Найдите производные 1-го и 2-го порядков для функций, заданных параметрически: а) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t+1}, \\ y=\dfrac{t}{t+1}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=e^{-t}\cos\pi t, \\ y=e^{-t}\sin\pi t. \end{cases}$ Для функции из п. а найдите угловой коэффициент касательной к графику функции в точке пересечения с осью OX.

Упражнение 70. Найдите ускорение движения, происходящего по закону из упражнения 69б, при $t=1$ и $t=2$.

II. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

2.1. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши

Это очень важные теоремы анализа, и их следует знать каждому изучающему дифференциальное исчисление.

Теорема Ролля. Пусть функция $y = f(x)$

а) непрерывна на отрезке $[a; b]$;

б) дифференцируема хотя бы в интервале $(a; b)$;

в) на концах отрезка имеет равные значения: $f(a) = f(b)$.

Тогда существует точка $c \in (a; b)$ (по крайней мере, одна), в которой производная функции равна нулю.

Доказательство можно прочесть в учебниках. Мы ограничимся здесь геометрической иллюстрацией (см. рис. 11) и несколькими разъясняющими примерами.

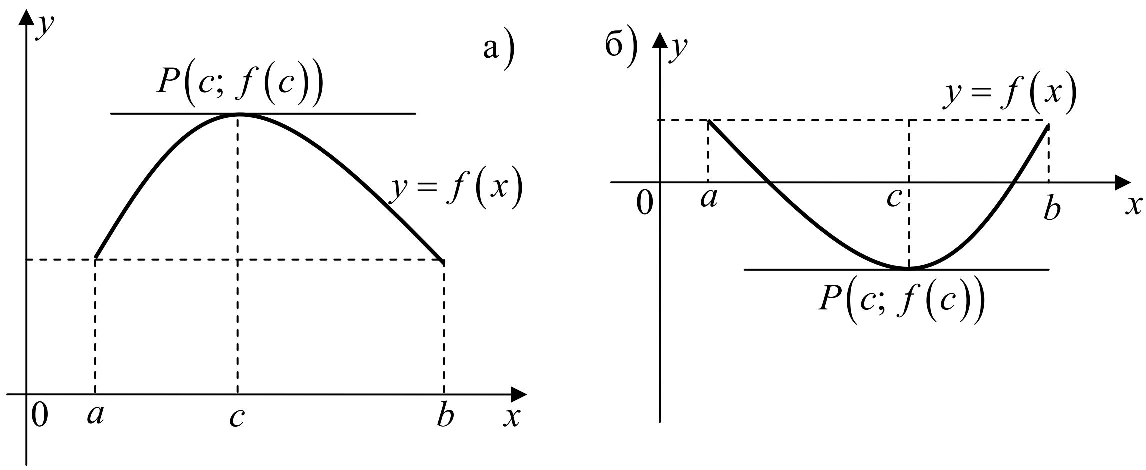

Рис. 11

По геометрическому смыслу производной утверждение теоремы означает, что при выполнении условий а)–в) найдется точка c внутри отрезка $(a < c < b)$ такая, что в соответствующей точке $(c; f(c))$ график функции имеет горизонтальную (параллельную оси OX касательную).

Покажем, что все три условия теоремы существенны, т.е. при нарушении хотя бы одного из них заключение теоремы не имеет места, точки с горизонтальной касательной может и не быть.

Пример 1. Для функции $y = \dfrac{1}{|x|}$, $x \in [-1; 1]$, условие а) нарушено в единственной точке $x = 0$. Производная $y' = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2}, & x \in (0; 1], \\ \dfrac{1}{x^2}, & x \in [-1; 0). \end{cases}$ Горизонтальной касательной нет (см. рис. 12).

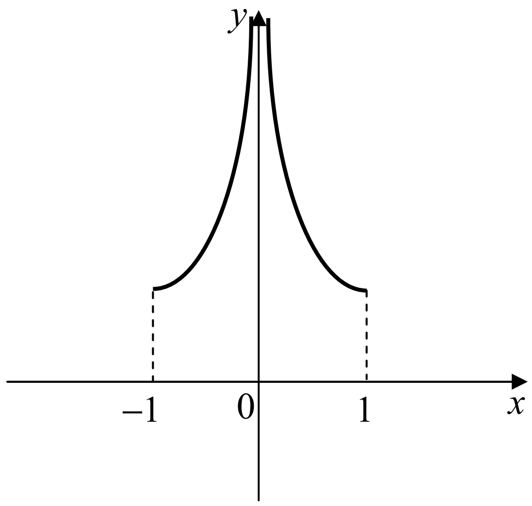

Рис. 12

Пример 2. Функция $y=\left(x-1\right)^{\frac{2}{3}}$, $x\in\left[0;\,2\right]$, не имеет производной в точке $x=1$. Действительно, $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$, $x\neq 1$, а $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\left(x+\Delta x-1\right)^{\frac{2}{3}}-\left(x-1\right)^{\frac{2}{3}}}{\Delta x}$ при $x=1$ сводится к $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\left(\Delta x\right)^{\frac{2}{3}}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\left(\Delta x\right)^{\frac{1}{3}}}=\infty$. Условие б) нарушено в одной точке. График (полукубическая парабола) нигде не имеет горизонтальной касательной (см. рис. 13).

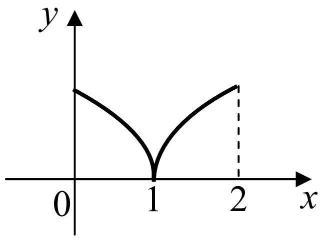

Рис. 13

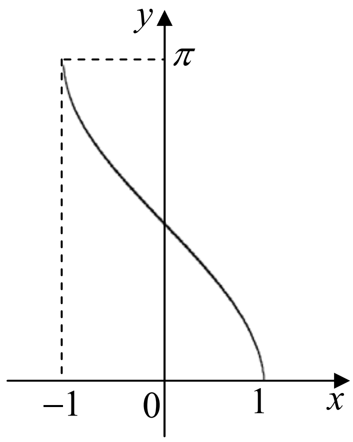

Рис. 14

Пример 3. $y=\arccos x$, $x\in\left[-1;\,1\right]$. Условия а) и б) выполнены, условие с) нарушено. Тот же результат (см. рис. 14).

Упражнение 71. Для функций а)–е) проверьте выполнение условий теоремы Ролля на данном отрезке: а) $y=\sin x$, $x\in\left[0;\,\pi\right]$; б) $y=\cos x$, $x\in\left[0;\,\pi\right]$; в) $y=\left|x\right|$,

$x\in[-a;\,a]$; г) $y=\dfrac{2}{(x-2)^2}$, $x\in[0;\,4]$; д) $y=\begin{cases}\sqrt{x},\ x\in[0;\,1],\\ x^2,\ x\in[-1;\,0);\end{cases}$ е) $y=1-x^4$, $x\in[-2;\,2]$.

Полезным следствием теоремы Ролля является такое утверждение: между двумя корнями многочлена найдется корень его производной. Это верно и для любой дифференцируемой функции, имеющей как минимум два различных корня.

Упражнение 72. Выведите приведенное выше утверждение из теоремы Ролля.

Конечно, далеко не всегда этот корень удается точно найти, теорема Ролля не дает способа для отыскания точки $c\in(x_1;\,x_2)$, где $f(x_1)=f(x_2)=0$. Приведем пример, когда корень все-таки находится.

Пример 4. Проверить, что многочлен $P(x)=x^4+6x^2-16$ имеет два корня и найти корень его производной.

Решение. Заменой $x^2=z$ $(z\geq 0)$ сведем уравнение $P(x)=0$ к квадратному: $z^2+6z-16=0$. Его корни $z_1=2$ и $z_2=-8$. Второй корень, очевидно, не годится, т.к. $z\geq 0$. Остается $z_1=2$, что дает два корня уравнения $P(x)=0$: $x_1=\sqrt{2}$ и $x_2=-\sqrt{2}$. На отрезке $\left[-\sqrt{2};\,\sqrt{2}\right]$ для многочлена $P(x)$ выполняются все условия теоремы Ролля. Ищем производную: $P'(x)=4x^3+12x=4x\left(x^2+3\right)$. Очевидно, уравнение $P'(x)=0$ имеет единственный корень $x=0$, лежащий, как утверждает теорема, между корнями x_1 и x_2 (см. рис. 15).

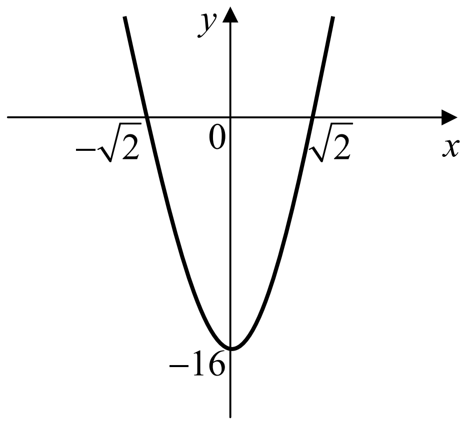

Рис. 15

Упражнение 73. Проверьте, что многочлен $P(x)=x^4-10x^2+9$ имеет четыре корня. Сколько корней имеет его производная? Найдите все корни. Покажите их на числовой оси вместе с корнями функции.

Упражнение 74. Проверьте, что функция $f(x) = 2\sin\frac{x}{6} - \frac{x}{\pi}$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке $[0; \pi]$. Найдите точку c.

Замечание. Нетрудно понять из наглядных соображений, что если точка c, о которой идет речь в теореме Ролля, единственная в интервале $(a; b)$, то в этой точке функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a; b]$ либо наибольшее, либо наименьшее значение. Такого рода точки называют точками экстремума функции. О них речь пойдет в разделе III.

Теорема Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ удовлетворяет условиям а и б теоремы Ролля:

а) непрерывна на $[a; b]$;

б) дифференцируема хотя бы в $(a; b)$,

то найдется точка $c \in (a; b)$ такая, что

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{2.1.1}$$

Равенство (1) называют формулой Лагранжа или формулой конечных приращений, разность $b - a$ есть приращение аргумента x в точке a, $f(b) - f(a)$ – соответствующее приращение функции.

Упражнение 75. Проверьте, что теорема Ролля есть частный случай теоремы Лагранжа.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа ясен из рис. 16.

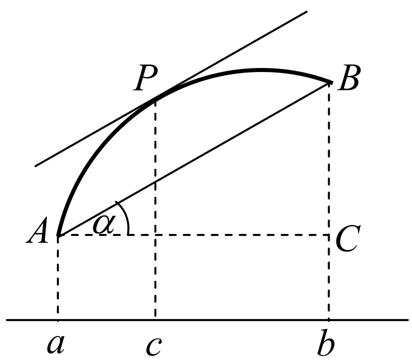

Рис. 16

На этом рисунке $AC = b - a$, $BC = f(b) - f(a)$. Тогда $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg}\alpha$ $(\alpha = \angle BAC)$, и, согласно заключению теоремы, $f'(c) = \operatorname{tg}\alpha$. Т.е. должна найтись, при выполнении условий теоремы, точка $c \in (a; b)$ такая, что касательная к графику $y = f(x)$ в точке $(c; f(c))$ параллельна хорде AB, соединяющей конечные точки графика $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$. На рис. 16 – точка $P(c; f(c))$.

Как и предыдущая теорема, теорема Лагранжа лишь утверждает существование точки $c \in (a; b)$ с указанными свойствами, но не дает способа нахождения такой точки. В отдельных случаях эту точку все же найти можно.

Пример 5. Записать формулу Лагранжа для функции $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [1; 4]$. Найти точку c. Сделать рисунок.

Решение. Очевидно, условия теоремы выполняются для данной функции. Пишем формулу Лагранжа:

$$\left(\sqrt{x}\right)'\Big|_{x=c} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{1}}{4-1},$$

откуда $\dfrac{1}{2\sqrt{c}} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{c} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow c = \dfrac{9}{4} \in (1; 4)$.

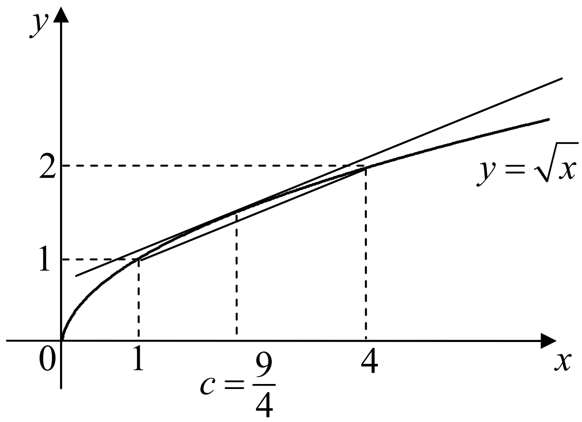

Рис. 17

Пример 6. Тот же вопрос, что и в примере 5, для функции $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x \in [1; 2]$.

Решение. И здесь условия теоремы Лагранжа выполнены, т.к. единственная точка, в которой функция разрывна и не имеет производной – это точка $x = 0$, а она лежит вне заданного интервала. Формула Лагранжа принимает вид

$$\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'\Bigg|_{x=c} = \frac{e^{\frac{1}{2}} - e^{1}}{2-1} \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{1}{c}}}{-c^2} = \sqrt{e} - e \Leftrightarrow c^{-2} e^{\frac{1}{c}} = e - \sqrt{e}.$$

Однако, полученное уравнение для точки c может быть решено только приближенно. Рекомендуем самостоятельно сделать эскиз графика как на рис. 16, 17.

Упражнение 76. Покажите, что для функции $y = mx^2 + px + q$, $x \in [a; b]$, точка c в формуле Лагранжа совпадает с серединой отрезка $[a; b]$.

Упражнение 77. Проверьте выполнение условий теоремы Лагранжа для функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $x \in [1; 3]$. Найдите точку c.

Упражнение 78. То же для $f(x) = x^3 - x^2 + 4x + 2$, $x \in [0; 1]$.

Упражнение 79. То же для $f(x)=x\ln x$, $x\in[1;\, e]$.

Формулу Лагранжа можно записать в равносильной форме

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a),$$

с помощью которой можно доказывать некоторые неравенства.

Пример 7. Доказать, что при $0<a<b$ справедливо неравенство

$$1-\frac{a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b}{a}-1.$$

Решение. Запишем формулу Лагранжа для функции $f(x)=\ln x$, $x\in[a;\, b]$:

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\left(\ln x\right)'\Big|_{x=c}\Leftrightarrow \ln\frac{b}{a}=\frac{b-a}{c}.$$

Т.к. $a<c<b$, то, заменив в правой части знаменатель c на a, мы увеличим дробь. Тем самым $\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}=\frac{b}{a}-1$. Аналогично, при замене c на b, та же дробь уменьшится, поэтому $\ln\frac{b}{a}>\frac{b-a}{b}=1-\frac{a}{b}$. Требуемое двойное неравенство доказано.

Упражнение 80. Докажите, используя теорему Лагранжа, двойное неравенство $\frac{x}{1+x}<\ln x<x-1$ при $x>1$.

Указание. Взять в формуле Лагранжа для $f(x)=\ln x$ $a=1$, $b=x$.

Часто бывает полезна следующая форма записи формулы Лагранжа: если взять $a=x_0$, $b=x=x_0+\Delta x$, то получим

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)\Leftrightarrow \Delta f(x_0)=f'(c)\Delta x. \qquad (2.1.2)$$

По сравнению с приближенной формулой (1.7.7) п.1.7 $\Delta f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$, формула Лагранжа точная, но за точность приходится расплачиваться неопределенным значением $c\in(x_0;\, x_0+\Delta x)$.

Теорема Коши. Если каждая из двух функций $y=f(x)$, $y=g(x)$ на отрезке $[a;\, b]$ непрерывна и, по крайней мере, в интервале $(a;\, b)$ дифференцируема, причем всюду в $(a;\, b)$ $g'(x)\neq 0$, то существует точка $c\in(a;\, b)$ такая, что

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Последняя формула называется *формулой Коши*.

Упражнение 81. Докажите, что теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши. Тем самым, теорема Коши является наиболее общим, сильным результатом из всех трех рассмотренных теорем. Однако ее доказательство существенным образом опирается на теорему Ролля, как и доказательство теоремы Лагранжа.

Пример 8. Проверить, что функции $f(x)=x^2-2x+3$, $g(x)=x^3-7x^2+20x-5$ удовлетворяет на отрезке $[1;\,4]$ условиям теоремы Коши. Найти точку $c\in(1;\,4)$.

Решение. Дифференцируемость, а, следовательно, и непрерывность, обеих функций очевидна. Проверяем условие $g'(x)\neq 0$: $g'(x)=3x^2-14x+20$. Дискриминант квадратного трехчлена $D=4\left(7^2-3\cdot 20\right)<0$, следовательно, $g'(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке числовой оси. Таким образом, теорема Коши справедлива для данных функций на любом отрезке оси OX. Вычисляем $f(4)=4^2-2\cdot 4+3=11$, $f(1)=1^2-2\cdot 1+3=2$, $g(4)=4^3-7\cdot 4^2+20\cdot 4-5=27$, $g(1)=1^3-7\cdot 1^2+20\cdot 1-5=9$. Записываем формулу Коши:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)}\Rightarrow\frac{2c-2}{3c^2-14c+20}=\frac{9}{18}\Leftrightarrow$$

(после очевидных упрощений) $c^2-6c+8=0$.

Находим корни получившегося квадратного уравнения: $c_1=2$, $c_2=4$. Из них только первый лежит строго внутри отрезка $[1;\,4]$, поэтому остается $c=2$.

Пример 9. Доказать, что условие теоремы Коши не выполняется для функций $f(x)=e^x$, $g(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$, $x\in[a;\,b]$, если $ab<0$.

Решение. Первые два условия теоремы, очевидно, выполняются на любом промежутке $[a;\,b]$. Найдем производные: $g'(x)=\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)'=\left(1-\dfrac{1}{1+x^2}\right)'=$ $=\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$. Видим, что $g'(x)=0$ в точке $x=0$. Но если $ab<0$, то числа a и b разных знаков. Значит, точка 0 принадлежит интервалу $(a;\,b)$. Тем самым, третье условие теоремы Коши нарушено и утверждение теоремы неверно.

Упражнение 82. Проверьте справедливость теоремы Коши для функций из примера 9 на отрезке $[0;\,1]$ и запишите формулу Коши.

Заметим, что точка c из полученного уравнения не может быть найдена, она определяется лишь приближенными методами.

Упражнение 83. Проверьте справедливость теоремы Коши для функций $f(x)=1-2\sqrt{x}$, $g(x)=2x+1$ при $x\in[0;\,a]$ $(a>0)$. Найдите точку c.

Упражнение 84. Проверьте справедливость теоремы Коши для функций $f(x)=\sin^2 x$, $g(x)=1+2\cos x$ при $x\in\left[0;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2.2. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя

Это правило применяется для вычисления пределов вида $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (на месте a может быть ∞, $+\infty$ или $-\infty$), когда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ – неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ – неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Сформулируем его в виде одной теоремы.

Правило Лопиталя. Пусть:

а) функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x = a$, кроме, возможно, самой точки a (или для всех сколь угодно больших по модулю x, если $x\to\infty$), причем $g'(a)\neq 0$;

б) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;

в) существует конечный либо бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда тот же предел имеет и отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Пример 1. Доказать правило Лопиталя для случая $x\to a$, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Решение. Можно считать, что $f(a) = g(a) = 0$ – по непрерывности, которая следует из дифференцируемости. Возьмем точку x из окрестности точки a. Тогда на отрезке $[a;\, x]$ выполняются условия теоремы Коши, и найдется точка $c\in(a;\, x)$ такая, что

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Учитывая, что $f(a) = g(a) = 0$ и то, что при $x\to a$ также и $c\to a$, переходя к пределу при $x\to a$, получим

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to a\\ (c\to a)}}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-1}-2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2-x+1}-\sqrt{x}}$.

Решение. Подставляя в числитель $\left(f(x)\right)$ и знаменатель $\left(g(x)\right)$ $x = 1$, видим, что налицо неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$: $\sqrt{5\cdot 1-1}-2\sqrt[3]{1} = 0$, $\sqrt[3]{1^2-1+1}-\sqrt{1} = 0$. Условие дифференцируемости числителя и знаменателя вблизи точки $x = 1$ очевидно, а условие $g'(a) \neq 0$ проверим в ходе вычислений. Найдем производные числителя и знаменателя:

$$f'(x) = \left(\sqrt{5x-1} - 2\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{5}{2\sqrt{5x-1}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

$$g'(x) = \left(\sqrt[3]{x^2-x+1} - \sqrt{x}\right)' = \frac{2x-1}{3\sqrt[3]{\left(x^2-x+1\right)^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

и вычисляем их пределы при $x \to 1$:

$$\lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{5}{2\sqrt{5x-1}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) = \frac{5}{2\sqrt{5\cdot 1-1}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{1^2}} = \frac{7}{12},$$

$$\lim_{x\to 1} g'(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{2\sqrt[3]{\left(x^2-x+1\right)^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{2\cdot 1-1}{3\sqrt[3]{\left(1^2-1+1\right)^2}} - \frac{1}{2\sqrt{1}} = -\frac{1}{6}.$$

Из последнего равенства видно, что $g'(1) = -\frac{1}{6} \neq 0$.

Тогда, по правилу Лопиталя, исходный предел равен $\frac{7}{12} : \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{7}{2}$.

Рекомендуем применять указанную форму записи решения, когда производные функций $f(x)$ и $g(x)$ вычисляются отдельно. Она сводит к минимуму возможность ошибки и, в итоге, заметно экономит время при решении.

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 x}{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}$.

Решение. Применяя правило Лопиталя, получим предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sin^3 x\right)'}{\left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{3\sin^2 x \cos x}{-\sin x + x},$$

который снова дает неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$. В подобных случаях правило Лопиталя применяется повторно (возможно, несколько раз). Обратим внимание на такой «технический» момент: числитель содержит множитель $3\cos x$, который в нашем случае «не участвует» в создании неопределенности. Иными словами, чем бы ни окончилось решение, искомый предел равен $\lim\limits_{x\to 0} 3\cos x \dfrac{\sin^2 x}{x - \sin x} = 3\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x - \sin x}$, и правило Лопиталя повторно следует применять только после доказанного упрощения. Без применения этого приема дифференцирование усложняется.

Далее, искомый предел приводится к виду $3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sin^2 x\right)'}{\left(x-\sin x\right)'}=$ $=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\cos x}{1-\cos x}=6\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cos x}{1-\cos x}=6\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$, в котором снова неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. И, наконец, $6\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sin x\right)'}{\left(1-\cos x\right)'}=6\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\sin x}=\infty$. Точнее, этот предел равен $+\infty$ при $x\to 0+0$ и $-\infty$ при $x\to 0-0$.

Вспомнив материал раздела «Введение в анализ», заключаем, что в данном примере знаменатель есть бесконечно малая более высокого порядка относительно числителя.

Упражнение 85. Вычислите пределы: а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-3x-45}{\sqrt{x+3}-\sqrt{6}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-2x}}{\ln(1+3x)}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin(\pi\sin x)}{(2x-\pi)^2}$.

Приведем пример раскрытия неопределенности $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Решение. Здесь, очевидно, $x\to 0+0$, и неопределенность вида $\left(\dfrac{-\infty}{\infty}\right)$. По правилу Лопиталя предел равен

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}.$$

Получили неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Переход одного вида неопределенности в другой – частое явление. Для вычисления последнего предела, конечно, не будем повторно применять правило Лопиталя, а воспользуемся хорошо известным замечательным пределом $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Тогда получим $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=$ $=0\cdot 1=0$.

Упражнение 86. Вычислите пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\operatorname{ctg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\ln(2x-\pi)}$.

Теперь рассмотрим случаи, когда $x\to\infty$.

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^s}$, где $s>0$.

Решение. Здесь имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Применив правило Лопиталя один раз, приходим к пределу $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{sx^{s-1}}$. Если $s-1\le 0$, то предел равен $+\infty$. Если же $s-1>0$, то, применяем правило повторно до тех пор, пока после k-го дифференцирования не получим в знаменателе x^{s-k} с показателем $s-k\le 0$, что в любом случае дает ответ $+\infty$.

Полученный результат имеет теоретическое значение, и его следует запомнить: экспонента (и всякая показательная функция a^x с основанием $a>1$) растет на бесконечности быстрее любой степенной функции x^s $(s>0)$.

Упражнение 87. Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^s}=0$ при $s>0$. Сформулируйте, исходя из этого, утверждение, аналогичное приведенному выше.

Упражнение 88. Вычислите пределы: а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2\ln x}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+1\right)\ln|x|}{x^3}$.

Замечание. Нельзя применять правило Лопиталя в случае, когда предел отношения производных не существует (ни конечный, ни бесконечный); при этом предел отношения функций может существовать. Покажем это на примере.

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-\sin x}{2\cos x+x}$.

Решение. Здесь имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Предел отношения производных $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\cos x}{1-2\sin x}$ не существует, поскольку нет предела при $x\to\infty$ ни у синуса, ни у косинуса (как и любой периодической функции, отличной от постоянной). В то же время очень просто вычисляется исходный предел. Поделив на x числитель и знаменатель, получаем $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{\sin x}{x}}{\frac{2\cos x}{x}+1}=\frac{2-0}{0+1}=2$, поскольку $\frac{\sin x}{x}$ и $\frac{\cos x}{x}$ при $x\to\infty$ имеет пределом 0 по теореме о пределе произведения ограниченной и бесконечно малой функций.

Упражнение 89. Покажите, что следующие пределы не могут быть вычислены по правилу Лопиталя, и вычислите их без этого правила:

$$\text{а) } \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x};\ \text{б) } \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2\cos x}{x^2+2x-3\cos x};\ \text{в) } \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}+\sin x}{e^{-x}+\cos x}.$$

Неопределенности вида $(\infty-\infty)$ и $(0\cdot\infty)$ предварительно необходимо привести к виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, после чего применить правило Лопиталя.

Пример 7. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sqrt{\ln x}-\sqrt{x}\ln x\right)$.

Решение. а) Здесь неопределенность $(\infty-\infty)$ (знаки $\frac{1}{x}$ и $\operatorname{ctg}x$ одинаковые как слева, так и справа от нуля). Запишем $\operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}$ и приведем к общему знаменателю: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x}$.

В этом пределе неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$. Применяя правило Лопиталя два раза, имеем далее $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{\sin x+x\cos x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0+0}{2-0}=0$.

Заметим, что в самом начале можно было заменить $x\sin x$ в знаменателе на эквивалентную бесконечно малую x^2, тогда следующие два дифференцирования были бы намного проще.

б) Вынесем x за скобки, тогда получим $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{\ln x}-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$. Здесь фактически неопределенность сразу же устранена благодаря тому, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$ (см. упражнение 87). Поэтому предел внутри скобок равен $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\ln x}=\infty$, и, разумеется, такой же будет и предел всего выражения.

Упражнение 90. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

Пример 8. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\frac{x}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\pi x-3x^2\right)\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

Решение. а) Здесь $\frac{x}{x+1}\to 1$ при $x\to\infty$, значит $\ln\frac{x}{x+1}\to 0$, и поэтому имеется неопределенность $(0\cdot\infty)$. Переведем x в знаменатель $\left(x=\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)$, попутно логарифм частного запишем в виде разности логарифмов. Получается $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x-\ln(x+1)}{\frac{1}{x}}$. Здесь неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$. Далее, по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x(x+1)}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x+1)}=-1.$$

б) И здесь неопределенность $(0\cdot\infty)$ (проверьте самостоятельно). Заменой $x-\frac{\pi}{3}=t\to 0$ пример можно свести к первому замечательному пределу, но с правилом Лопиталя можно вполне обойтись без замены. Имеем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\pi x-3x^2}{\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\pi-6x}{-\frac{1}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}}=\frac{\pi-2\pi}{-1}=\pi.$$

Упражнение 91. Вычислите пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x$; б) $\lim\limits_{x\to 1+0}\ln x\ln(x-1)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^4+x^2+1\right)2^{-x}$.

Неопределенности вида $\left(0^0\right)$, $\left(\infty^0\right)$,$\left(1^\infty\right)$ могут быть сведены к рассмотренным выше с помощью логарифмического тождества $b=e^{\ln b}$.

Пример 9. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0+0}x^{\sqrt{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$; в) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x^3-a^3}}$.

Решение. а) Здесь неопределенность $\left(0^0\right)$. По логарифмическому тождеству $x^{\sqrt{x}}=e^{\ln x^{\sqrt{x}}}=e^{\sqrt{x}\ln x}$. Вычислим предел показателя $\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{x}\ln x(0\cdot\infty)=$ $=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}}=-2\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{x}=0$. Тогда, по непрерывности сложной функции, искомый предел равен $e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{x}\ln x}=e^0=1$.

Очевидно, то же решение можно оформить иначе. Пусть $y=x^{\sqrt{x}}$. Возьмем логарифм от обеих частей $\ln y=\sqrt{x}\ln x$ и найдем предел $\lim\limits_{x\to 0+0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{x}\ln x=\ldots=0$. Если $\ln y\to 0$, то $y\to e^0=1$.

б) Неопределенность $\left(\infty^0\right)$. Действуем как в примере а: $(\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}=$ $=e^{\ln(\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}}=e^{\frac{1}{\ln x}\ln(\ln 2x)}$. Предел показателя представляет неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Вычислим его: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln 2x)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x\ln 2x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\ln 2x}=0$. Тогда искомый предел равен $e^0=1$.

в) Здесь неопределенность $\left(1^{\infty}\right)$. Пусть $y=\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x^3-a^3}}$, тогда $\ln y=\dfrac{\ln\left(2-\dfrac{x}{a}\right)}{x^3-a^3}$. Находим $\lim\limits_{x\to a}\ln y=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{-\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{2-\dfrac{x}{a}}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{-1}{3ax^2}=-\dfrac{1}{3a^3}$, т.к. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{2-\dfrac{x}{a}}=1$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x^3-a^3}}=e^{-\frac{1}{3a^3}}$.

Тот же результат можно получить, применив второй замечательный предел.

$$\lim_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x^3-a^3}}=\lim_{x\to a}\left[\left(1+1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{1-\frac{x}{a}}}\right]^{\left(1-\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{1}{x^3-a^3}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{1-\frac{x}{a}}{x^3-a^3}}=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{a-x}{a(x-a)\left(x^2+xa+a^2\right)}}=e^{-\frac{1}{3a^3}}.$$

Упражнение 92. Вычислите пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0+0}x^x$; б) $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\sin x\right)^{\arcsin x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\pi x\right)^{\frac{1}{\sin 2\pi x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2\pi-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{x}}$; д) $\lim\limits_{x\to -1+0}\left(\ln^2\left(1+x\right)\right)^{\frac{1}{1+x}}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{x}}$.

2.3. Формула Тейлора для многочлена

В ближайших пунктах будет изучаться одна из важнейших формул математики – формула Тейлора. Без преувеличения можно сказать, что человек, потративший некоторое время, чтобы по-настоящему, «неформально» разобраться в этой формуле, потратил его не зря, а с безусловной пользой для дела и для себя самого в первую очередь.

Будем рассматривать многочлен степени n, записанный по возрастанию степеней переменной x

$$P\left(x\right)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n. \qquad (2.3.1)$$

Существуют формулы, выражающие коэффициенты многочлена a_0, a_1, …, a_n через значения его n последовательных производных в точке $x=0$. С помощью этих формул многочлен представляется в специальном виде, называемом *формулой Тейлора для многочлена*.

Пример 1. Вывести указанные формулы и формулу Тейлора для многочлена.

Решение. Подставим в обе части (1) $x=0$. Получим числовой равенство

$$P\left(0\right)=a_0\Leftrightarrow a_0=P\left(0\right).$$

Дифференцируем многочлен по x и вновь подставляем $x=0$, что дает:

$$P'\left(x\right)=a_1+2a_2x+\ldots+\left(n-1\right)a_{n-1}x^{n-2}+na_nx^{n-1},\ P'\left(0\right)=a_1\cdot 1\Leftrightarrow a_1=\frac{P'\left(0\right)}{1!}.$$

Повторяем ту же процедуру 2-й, 3-й, …, n-й раз:

$$P''(x)=2a_2+...+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+n(n-1)a_nx^{n-2},$$

$$P''(0)=1\cdot 2a_2 \Leftrightarrow a_2=\frac{P''(0)}{2!},\ \ldots,$$

$$P^{(n)}(x)=n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1a_n,\ P^{(n)}(0)=n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1a_n \Leftrightarrow a_n=\frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

Конечно, $P^{(n)}(x)\equiv n!a_n$ при любом x, но ради однообразия пишем $P^{(n)}(0)$.

Тем самым, упомянутые формулы для коэффициентов получены. Перепишем их еще раз отдельно:

$$a_0=P(0),\ a_1=\frac{P'(0)}{1!},\ \ldots,\ a_k=\frac{P^{(k)}(0)}{k!},\ \ldots,\ a_n=\frac{P^{(n)}(0)}{n!},$$

и подставим в (2.3.1)

$$P(x)=P(0)+\frac{P'(0)}{1!}x+...+\frac{P^{(k)}(0)}{k!}x^k+...+\frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (2.3.2)$$

Это и есть *формула Тейлора для многочлена* $P(x)$.

Пример 2. Не выполняя дифференцирования, найти значения всех производных многочлена $P(x)=2x^5-5x^4+2x+6$ в точке $x=0$.

Решение. Запишем многочлен Тейлора для $P(x)$:

$$P(x)=P(0)+\frac{P'(0)}{1!}x+\frac{P''(0)}{2!}x^2+\frac{P'''(0)}{3!}x^3+\frac{P^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{P^{(5)}(0)}{5!}x^5. \qquad (2.3.3)$$

Сравнив коэффициенты при одинаковых степенях x в данном многочлене и в его записи (2.3.3), получим:

при x $\dfrac{P'(0)}{1!}=2 \Rightarrow P'(0)=2$;

при x^2 $\dfrac{P''(0)}{2!}=0 \Rightarrow P''(0)=0$;

при x^3 $\dfrac{P'''(0)}{3!}=0 \Rightarrow P'''(0)=0$;

при x^4 $\dfrac{P^{(4)}(0)}{4!}=-5 \Rightarrow P^{(4)}(0)=-5\cdot 4!=-120$;

при x^5 $\dfrac{P^{(5)}(0)}{5!}=2 \Rightarrow P^{(5)}(0)=2\cdot 5!=240$.

Упражнение 93. Вычислите аналогичным путем все отличные от нуля производные в точке $x=0$ для многочлена $P(x)=1-x^3+x^6-x^9$.

Упражнение 94. Вычислите все отличные от нуля производные в точке $x=0$ для многочлена $P(x)=\left(2-3x^2\right)^3$.

Очевидно, если дан многочлен по степеням $(x-x_0)$

$$Q(x-x_0)=c_0+c_1(x-x_0)+\ldots+c_n(x-x_0)^n, \tag{2.3.4}$$
то точно такими же рассуждениями как в примере 1 можно получить формулы
$$c_0=P(x_0),\; c_1=\frac{P'(x_0)}{1!},\; \ldots,\; c_k=\frac{P^{(k)}(x_0)}{k!},\; \ldots,\; c_n=\frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}$$
и с их помощью представить многочлен (2.3.4) в виде многочлена Тейлора $\big($уже по степеням $(x-x_0)\big)$
$$Q(x-x_0)=P(x_0)+\frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+$$
$$+\ldots+\frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{2.3.5}$$
Упражнение 95. Выведите формулу (2.3.5).

Пример 3. Разложить по степеням $x-2$ многочлен $P(x)=x^4-2x^3-4x+6$.

Решение. Чтобы воспользоваться формулой (2.3.5), найдем предварительно все ненулевые производные данного многочлена: $P'(x)=4x^3-6x^2-4$, $P''(x)=12x^2-12x$, $P'''(x)=24x-12$, $P^{(4)}(x)=24$. Затем вычислим значение функции и всех этих производных в точке $x=2$: $P(2)=2^4-2\cdot 2^3-4\cdot 2+6=-2$, $P'(2)=4\cdot 2^3-6\cdot 2^2-4=4$, $P''(2)=12\cdot 2^2-12\cdot 2=24$, $P'''(2)=24\cdot 2-12=36$, $P^{(4)}(2)=24$. Затем по формуле (2.3.5) найдем
$$P(x)\big(=Q(x-2)\big)=-2+\frac{4}{1!}(x-2)+\frac{24}{2!}(x-2)^2+\frac{36}{3!}(x-2)^3+\frac{24}{4!}(x-2)^4$$
или, после сокращений,
$$P(x)=-2+4(x-2)+12(x-2)^2+6(x-2)^3+(x-2)^4.$$
Упражнение 96. Разложите многочлен x^5-x+1 по степеням $x+1$.

Упражнение 97. Дан многочлен по степеням $x-\frac{1}{2}$
$$Q\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-3\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3.$$
Не дифференцируя, вычислите значения всех его производных в точке $x=\frac{1}{2}$.

2.4. Биномиальная теорема Ньютона (формула бинома Ньютона)

Слово «бином» означает двучлен. Из элементарной математики известны формулы $(a+x)^2=a^2+2ax+x^2$, $(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$ для степеней $n=2$ и $n=3$ двучлена $a+x$. Здесь a и x – любые величины или выражения. Формула Тейлора для многочлена позволяет получить общую формулу такого рода (для любого натурального n), которая называется биномиальной формулой или формулой бинома Ньютона.

Пример 1. Вывести биномиальную формулу Ньютона.

Решение. Задача состоит в том, чтобы представить $P(x)=(a+x)^n$ в виде $a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$, по аналогии с $(a+x)^2$ и $(a+x)^3$. Мы уже умеем это делать, поскольку

$$a_0=P(0)=a^n,\ a_1=\frac{P'(0)}{1!}=\left.\frac{n(a+x)^{n-1}}{1!}\right|_{x=0}=\frac{na^{n-1}}{1!},$$

$$a_2=\frac{P''(0)}{2!}=\left.\frac{n(n-1)(a+x)^{n-2}}{2!}\right|_{x=0}=\frac{n(n-1)a^{n-2}}{2!},\ \ldots,\ a_n=\frac{P^{(n)}(0)}{n!}=\frac{n!}{n!}=1.$$

Из вида коэффициентов следует требуемая формула

$$(a+x)^n=a^n+\frac{n}{1!}a^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2+\ldots+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(n-2))}{(n-1)!}ax^{n-1}+x^n, \tag{2.4.1}$$

которую записывают так

$$(a+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!}a^{n-k}x^k. \tag{2.4.2}$$

Напомним, что принято считать $0!=1$.

Например, при $n=3$ формула выглядит так

$$(a+x)^3=a^3+\frac{3}{1!}a^2x+\frac{3\cdot 2}{2!}ax^2+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{3!}x^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$$

(куб суммы).

При $n=4$ (четвертая степень суммы):

$$(a+x)^4=a^4+\frac{4}{1!}a^3x+\frac{4\cdot 3}{2!}a^2x^2+\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!}ax^3+\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4!}x^4=$$
$$=a^4+4a^3x+6a^2x^2+4ax^3+x^4.$$

При $n=5$ (пятая степень суммы)

$$(a+x)^5=a^5+\frac{5}{1!}a^4x+\frac{5\cdot 4}{2!}a^3x^2+\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}a^2x^3+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4!}ax^4+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5!}x^5=$$
$$=a^5+5a^3x+10a^3x^2+10a^2x^3+5ax^4+x^5 \text{ и т.д.}$$

Упражнение 98. Запишите по указанному образцу: а) $(a+x)^8$; б) $(3-2x)^4$; в) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$.

Рассмотрение формулы (2.4.1) показывает, что:

1) ее правая часть есть многочлен от x и a, при этом степени x расположены по возрастанию, а степени a – по убыванию, причем каждое его слагаемое представляет одночлен суммарной степени n $\left(a^{n-k}x^n,\ k=0,1,\ldots,n\right)$ с некоторыми коэффициентами;

2) коэффициенты многочлена (так называемые биномиальные коэффициенты) есть числа, имеющие следующее обозначение:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!}. \qquad (2.4.3)$$

Тогда формулы (2.4.1) и (2.4.2) можно записать так:

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} x + \ldots + C_n^k a^{n-k} x^k + \ldots + C_n^n x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} x^k, \quad (2.4.4)$$

при этом $C_n^0 = C_n^n = 1$, и также коэффициенты, равноотстоящие от первого и последнего слагаемых, равны между собой: $C_n^m = C_n^{n-m}$. Это проще всего устанавливается посредством формулы

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \qquad (2.4.5)$$

обычно используемой для записи C_n^m, наряду с формулой (2.4.3).

Упражнение 99. Выведите формулу (2.4.5) из формулы (2.4.3).

Упражнение 100. Докажите тождество $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

2.5. Формула Тейлора для функции $f(x)$

Пусть дана функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки $x = x_0$, а в самой этой точке имеющая производные до n-го порядка: $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, …, $f^{(n)}(x_0)$. По образу формулы Тейлора для многочлена (2.3.5) составим многочлен

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{k!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad (2.5.1)$$

который назовем многочленом Тейлора n-го порядка функции $f(x)$.

Пример 1. Многочлен Тейлора 1-го порядка для функции $f(x)$: $T_1(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)$.

Что можно сказать о близости этого многочлена к самой функции $f(x)$? Вспомним формулу (1.7.6): $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$. Из нее сразу следует, что $f(x) - T_1(x) = o(x-x_0)$, т.е. разность между функцией $f(x)$ и ее многочленом Тейлора $T_1(x)$ есть бесконечно малая более высокого порядка относительно Δx при $\Delta x = x - x_0 \to 0$. Заметим еще, что при $x = x_0$ функция и ее многочлен Тейлора совпадают: $f(x_0) = T_1(x_0)$. То же самое можно сказать о производных: $f'(x_0) = T_1'(x_0)$. Тем самым прямая $y = T_1(x)$ в точке x_0 служит касательной к графику функции $y = f(x)$.

Упражнение 101. Составьте многочлен $T_1(x)$ по степеням x для функции $f(x) = e^x$. Изобразите графики $y = f(x)$ и $y = T_1(x)$.

Упражнение 102. Составьте многочлен $T_1(x)$ по степеням $x-1$ для функции $f(x)=\ln x$. Изобразите графики $y=f(x)$ и $y=T_1(x)$.

Рассмотренные в примере 1 утверждения обобщаются на случай многочлена Тейлора n-го порядка, а именно: а) $f(x_0)=T_n(x_0)$, $f'(x_0)=T_n'(x_0)$, …, $f^{(n)}(x_0)=T_n^{(n)}(x_0)$; б) $f(x)-T_n(x)=o(x-x_0)^n$ при $x\to x_0$.

Доказательство первого мы оставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения, а второе, ввиду его исключительной важности для данной темы, рассмотрим в примере 2.

Упражнение 103. Пусть $T_n(x)$ – многочлен Тейлора порядка n функции $f(x)$. Докажите тождества $f(x_0)=T_n(x_0)$, $f'(x_0)=T_n'(x_0)$, …, $f^{(n)}(x_0)=T_n^{(n)}(x_0)$.

Пример 2. Доказать, что разность функции $f(x)$ и ее многочлена Тейлора $T_n(x)$ есть величина, бесконечно малая высшего порядка относительно $(x-x_0)^n$.

Решение. Нужно доказать, по определению бесконечно малой высшего порядка $o(\alpha)$ при $\alpha\to 0$, что

$$\lim_{x-x_0\to 0}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n}=0.$$

Обозначив $x-x_0=\Delta x$, имеем в пределе $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)-T_n(x)}{\Delta x^n}$ неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, т.к. $f(x_0)=T_n(x_0)$. Применив правило Лопиталя, приходим к пределу $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x)-T_n'(x)}{n\cdot\Delta x^{n-1}}$. Если $n=1$, то утверждение уже доказано, т.к. знаменатель равен 1, а числитель обращается в нуль (см. упражнение 103). При $n>1$ снова имеем неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и применяем правило Лопиталя повторно – n раз, что приводит к пределу

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-T_n^{(n)}(x)}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}=\frac{f^{(n)}(x_0)-T_n^{(n)}(x_0)}{n!}=0,$$

что и требовалось доказать.

Переписав доказанное утверждение в форме

$$f(x)=T_n(x)+o(x-x_0)^n, \tag{2.5.2}$$

получаем *формулу Тейлора* для дифференцируемой функции $f(x)$.

В развернутом виде, с учетом (2.5.1), она выглядит так:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{k!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n, \qquad (2.5.3)$$

Слагаемое $o(x-x_0)^n=o(\Delta x^n)$ называется *остаточным членом формулы Тейлора* и, в самом общем виде, обозначается $R_n(x)$.

Существуют различные, менее абстрактные, чем $o(\Delta x^n)$, представления остаточного члена. Самое распространенное из них: $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где $c\in(x_0;\,x)$ или $c\in(x;\,x_0)$ (так называемая, *форма Лагранжа* остаточного члена)[1].

В некоторых случаях полезна *дифференциальная форма* записи формулы Тейлора. Если в формуле (2.5.3) перенести $f(x_0)$ в левую часть и вспомнить, что $f(x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)$ – приращение функции $f(x)$ в точке x_0, вызванное приращением аргумента $\Delta x=x-x_0$, а также формулы для дифференциала и дифференциалов высших порядков, то формула перепишется в равносильном – дифференциальном – виде:

$$\Delta f(x_0)=\frac{df(x_0)}{1!}+\frac{d^2f(x_0)}{k!}+\ldots+\frac{d^nf(x_0)}{n!}+o(\Delta x^n). \qquad (2.5.4)$$

Огромное значение формулы Тейлора в математике и ее приложениях состоит, во-первых, в том, что она вскрывает структуру дифференцируемой функции, т.е. показывает, как устроено приращение (изменение) любой функции, имеющей производную (дифференциал) нужного порядка. Во-вторых, эта формула позволяет представить и вычислить с требуемой точностью любую такую функцию в виде многочлена, что на практике сводится к выполнению только арифметических действий, не считая, конечно, дифференцирования.

Естественно, на практике чаще всего применяется формула Тейлора для функции $f(x)$, содержащая многочлен $T_n(x)$ по степеням x. Он получается из (2.5.1) при $x_0=0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{k!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x), \qquad (2.5.5)$$

где остаточный член $R_n(x)$ записывается либо в форме $o(\Delta x^n)$, либо в форме Лагранжа $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $c\in(0;\,x)$ или $c\in(x;\,0)$.

Существуют и другие формы остаточного члена $R_n(x)$, они рассматриваются в более подробных курсах.

---

[1] Здесь предполагается существование $(n+1)$-й производной от функции $f(x)$ в окрестности точки x_0. $R_n(x)=o(x-x_0)^n$ называется остаточным членом в форме Пеано.

Формулу (2.5.5) иногда называют *формулой Маклорена*. Важнейшую роль в анализе имеет формула (2.5.5) для следующих трех основных элементарных функций: e^x, $\cos x$ и $\sin x$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \tag{2.5.6}$$

$$R_n(x) = o\left(x^n\right);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x), \tag{2.5.7}$$

$$R_n(x) = o\left(x^{2n+1}\right);$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x), \tag{2.5.8}$$

$$R_n(x) = o\left(x^{2n}\right).$$

Формула (2.5.6) очевидна, поскольку для e^x $f'(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$ и при $x = 0$ $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Выведем формулу (2.5.7).

Пример 3. Составить многочлен Тейлора при $x = 0$ для функции $y = \cos x$.

Решение. Все производные нечетного порядка от $\cos x$ равны попеременно $-\sin x$ и $\sin x$, а $\sin 0 = 0$, поэтому члены, содержащие нечетные степени x, будут отсутствовать. Далее, $f(0) = \cos 0 = 1$, а производные четного порядка равны попеременно $-\cos x$ и $\cos x$, поэтому знаки, начиная с $f''(0) = -\cos 0 = -1$, будут чередоваться. Тем самым, если порядок многочлена $2n$ делится на 4, то перед последним слагаемым будет знак «+», е если не делится, то знак «–». Этим объясняется вид последнего слагаемого, содержащего x^{2n} в формуле (2.5.7).

Остается еще сообразить, почему остаточный член записан в виде $o\left(x^{2n+1}\right)$ вместо $o\left(x^{2n}\right)$, хотя это тоже верно. Продумайте это самостоятельно.

Остаточный член в форме Лагранжа выглядит так: $\frac{\pm\cos c}{(2n+2)!}x^{2n+2}$. Такая запись удобна для оценки погрешности при вычислении по формуле $\cos x \approx T_{2n}(x)$.

Упражнение 104. Выведите формулу (2.5.8).

Упражнение 105. Постройте в одной системе координат графики: а) функции $y = \cos x$ и ее многочлена Тейлора $T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$; б) функции $y = \sin x$ и ее многочлена Тейлора $T_2(x) = x - \frac{x^3}{6}$.

Пример 4. Вычислить с помощью формулы Тейлора число e с тремя верными знаками после запятой.

Решение. Полагая в формуле (2.5.6) $x=1$ и отбросив остаточный член, получим

$$e \approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

Подсчитаем, сколько членов в правой части нужно взять, чтобы получить требуемую точность. Ясно, что $\left|e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)\right|=\left|R_n\right|$, где R_n возьмем в форме Лагранжа $R_n=\frac{e^c}{(n+1)!}$, $c\in(0;1)$. Т.к. известно, что $e<3$, то имеем $\frac{e^c}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}<\frac{1}{10^n}$, откуда следует $(n+1)!>3\,000$. Подбором находим, что $n\geq 7$, следовательно, с требуемой точностью

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5\,040}\approx 2{,}7182\approx 2{,}718.$$

Еще проще обстоит дело с вычислением тригонометрических функций $(\cos x$ и $\sin x)$, для которых, в виду свойства периодичности, формул приведения и т.д., мы всегда можем ограничиться промежутком $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, и даже $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$. Так, например, вычисление $\sin 80^\circ$ сводится к вычислению $\cos 10^\circ=\cos\frac{\pi}{18}$. перевод градусной меры в радианную необходим во всех случаях, т.к. в анализе мы имеем дело с функциями от числового, а не с углового аргумента. Так, например, вычисление $\sin x$ при $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ с помощью многочлена Тейлора $T_5=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ обеспечивает точность порядка $R_7\sim\frac{\cos c}{7!}x^7<\frac{1}{5\,040}\approx 0{,}0002$.

Упражнение 106. Вычислите приближенно $\sin 18^\circ=\sin\frac{\pi}{10}$ с помощью многочлена $T_5(x)$.

Упражнение 107. Выведите формулы

$$\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right) \text{ и}$$

$$\operatorname{sh} x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o\left(x^{2n}\right).$$

Упражнение 108. Найдите многочлен Тейлора 3-го порядка функции $f(x)=\ln(1+x)$ и вычислите приближенно с его помощью $\ln 1{,}25$.

Дополнительные упражнения к разделу II

Упражнение 109. Проверьте справедливость теоремы Ролля для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$: а) $f(x)=3x-x^3$, $\left[0; \sqrt{3}\right]$; б) $f(x)=\ln\cos x$, $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$; в) $f(x)=x^2-2|x|$, $[-1; 1]$.

Упражнение 110. Используя теорему Лагранжа, найдите на кривой $y=x+\operatorname{arctg}x$ точку, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей точки этой кривой с абсциссами $a=0$ и $b=1$.

Упражнение 111. Проверьте справедливость теоремы Лагранжа для функции $f(x)=\arccos x$ на отрезке $[-1; 1]$.

Упражнение 112. Докажите с помощью формулы Лагранжа неравенство $|\sin\beta-\sin\alpha|\le|\beta-\alpha|$.

Упражнение 113. Проверьте справедливость теоремы Коши для функций $f(x)=\cos x$ и $g(x)=\sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Упражнение 114. Вычислите с помощью правила Лопиталя пределы: а) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^4+4x^3+2x^2+1}{5x^3-2x^2+x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x^3+2a^3}-x\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{x^4+ax^3-a^4}-x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin2x-2\sin3x}{3\operatorname{tg}2x-2\operatorname{tg}3x}$.

Упражнение 115. Вычислите с помощью правила Лопиталя пределы: а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^{\sin x}-a^x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin2x-2\arcsin x}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{50}}$.

Упражнение 116. Вычислите с помощью правила Лопиталя пределы: а) $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-0,1x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

Упражнение 117. Вычислите с помощью правила Лопиталя пределы: а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$; в) $\lim\limits_{x\to1}(\ln x)^{\sin\pi x}$.

Упражнение 118. Многочлен $P(x)=x^5-x+1$ разложите по степеням $x+1$.

Упражнение 119. Не выполняя дифференцирование, найдите $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ и $f^{IV}(0)$, если $f(x)=x\left(x^2-1\right)^3$.

Упражнение 120. Запишите формулу Тейлора по степеням x для функций: а) $f(x)=xe^{-x}$; б) $f(x)=\cos^2x$; в) $f(x)=\frac{e^{x^2}-1}{x^2}$.

Упражнение 121. Вычислите приближенно $\frac{1}{e}$ и $\sqrt{e}$ с точностью до 0,001, используя подходящий многочлен Тейлора для e^x.

Упражнение 122. Вычислите с той же точностью $\sin1$ и $\cos1$.

III. ЭКСТРЕМУМЫ. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ

3.1. Условия монотонности функции. Экстремумы. Необходимый признак экстремума. Первый достаточный признак экстремума

Существует простая связь между характером монотонности функции $f(x)$ на промежутке (конечном или бесконечном) и знаком ее производной на этом промежутке. Эта связь выражается ***теоремой***: если во всех точках промежутка $f'(x) > 0\ (< 0)$, то $f(x)$ на нем возрастает (убывает).

Это – достаточное условие монотонности функции. Заметим, что обратное утверждение – необходимое условие – требует некоторого ужесточения.

Именно: если $f(x)$ – возрастающая (убывающая) на промежутке функция, то ее производная удовлетворяет на этом промежутке неравенству $f'(x) \geq 0\ (\leq 0)$. При этом знак равенства возможен лишь в отдельных, изолированных, точках.

Пример 1. Найти промежутки монотонности функций: а) $y = x^3 - 3x^2$; б) $y = x\ln x$; в) $y = x - \sin x$.

Решение. Во всех подобных задачах дело сводится нахождению промежутков знакопостоянства производной.

а) Находим $y = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. Корни производной: $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$ разбивают числовую ось на три промежутка (интервала), в каждом из которых производная сохраняет определенный знак (см. рис. 18).

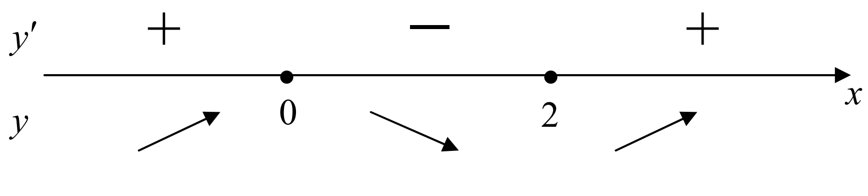

Рис. 18

Этот знак легко установить методом интервалов, который изучался в школе. Так, при $x > 2$ оба множителя $x - 2$ и x положительны, поэтому производная $y = 3x(x-2)$ положительна. При переходе в интервал $(0;\ 2)$ меняется знак только у второго множителя, а значит производная становится отрицательной. И, наконец, переход в интервал $(-\infty;\ 0)$ ведет снова к смене знака произведения (производной) на положительный. Согласно признаку монотонности, получаем окончательно: на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$ функция возрастает, а на $(0; 2)$ – убывает. Заметив дополнительно, что $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, $y(0) = 0$, $y(2) = -4$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$, можем уточнить ответ с помощью таблицы (см. табл. 1).

Таблица 1

x	$(-\infty;\, 0)$	$(0;\, 2)$	$(2;\, +\infty)$
y	возрастает от $-\infty$ до 0	убывает от 0 до –4	возрастает от –4 до $+\infty$

б) Ищем производную $y' = \ln x + 1$. Из уравнения $y' = 0$ находим корень производной: $\ln x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}4$, который разбивает область определения функции на интервалы $\left(0;\, \dfrac{1}{e}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{e};\, +\infty\right)$ (см. рис. 19).

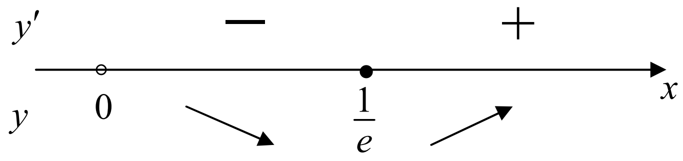

Рис. 19

Из свойств логарифма следует, что в первом из интервалов $y' < 0$, следовательно, y убывает, а во втором $y' > 0$ и, значит, y возрастает. Для упорядочения, аналогичного проведенному в п. а), нужно еще найти $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = (0\cdot\infty) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} =$

(правило Лопиталя) $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, вычислить $y\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e}$ и заметить, что

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$. Тогда, окончательно: на $\left(0; \dfrac{1}{e}\right)$ y убывает от 0 до $-\dfrac{1}{e}$, а на $\left(\dfrac{1}{e}; +\infty\right)$ y возрастает от $-\dfrac{1}{e}$ до $+\infty$. Точка пересечения графика с осью OX имеет абсциссу $x = 1$.

в) Здесь производная $y' = 1 - \cos x \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, поэтому функция всюду возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Заметим еще, что $y' = 0$ при $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, т.е. в бесконечном множестве точек график функции имеет горизонтальную касательную, которая в каждой такой точке $(2\pi n;\, 2\pi n)$ пересекает график (см. рис. 20).

Упражнение 123. Постройте графики функций из примера 1 (а, б).

Упражнение 124. Найдите промежутки монотонности функций: а) $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4}$; б) $y = x\ln^2 x$; в) $y = \operatorname{arctg} x - x$.

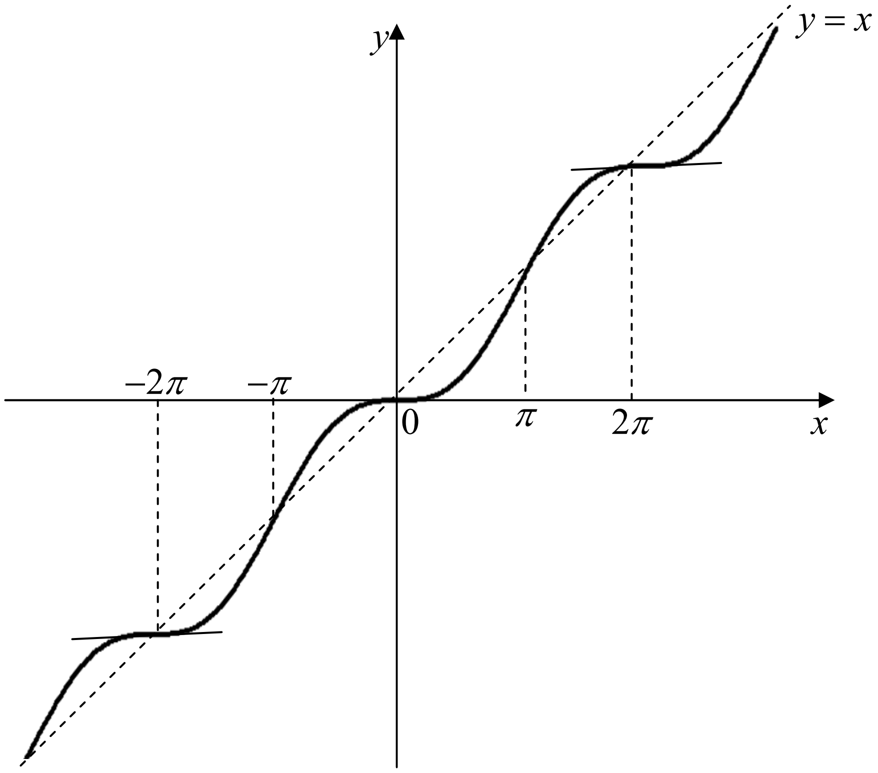

Рис. 20

Упражнение 125. Нарисуйте графики функций из упражнения 124, вычислив предварительно значения каждой функции в точках, где ее производная равна нулю.

Даже при «грубом» выполнении упражнений 123–125 совершенно ясно, что промежутки монотонности функции разного характера отделяются на ее графике «холмами» и «впадинами». Это – так называемые экстремальные точки графика. Точками экстремума (максимума и минимума) принято называть абсциссы таких точек. Приведем аккуратное определение:

точка x_0 называется точкой *максимума* (*минимума*) функции $y=f(x)$, $x\in D$, если существует такая окрестность этой точки (содержащаяся в D), для всех точек которой выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ $\left(f(x)>f(x_0)\right)$.

Такие точки x_0, в общем случае, называют *точками экстремума*, а значение функции $f(x_0)$ – *экстремумами*. В случае непрерывной функции точка максимума отделяет промежуток возрастания, расположенный слева от точки, от про-

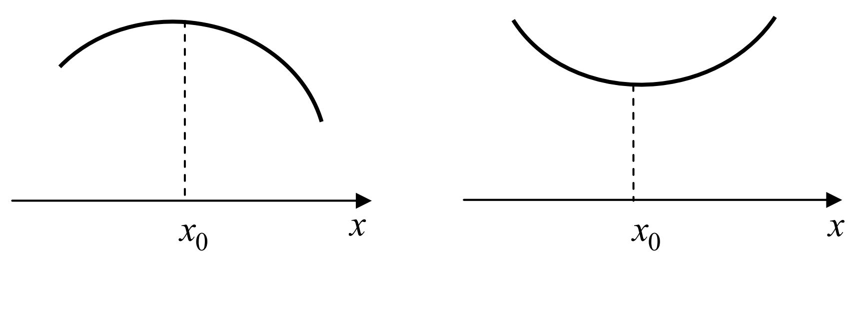

Рис. 21

межутка убывания (справа от точки). Точка минимума, наоборот, отделяет промежуток убывания (слева от точки), от промежутка возрастания (справа от точки). См. рис. 21.

Ясно, что функция может иметь несколько точек экстремума, и даже бесконечное множество таковых (например, у функции $y = \sin x$), а может не иметь ни одной. Обратим внимание на рис. 22, где точка x_1 – точка максимума функции $y = f(x)$ с горизонтальной касательной, а точка x_2 – точка минимума, в которой производная не существует.

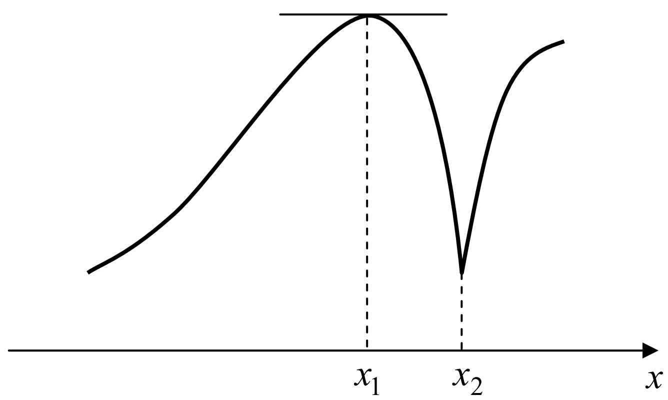

Рис. 22

Этот пример приводит к следующему *необходимому условию* экстремума: если функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ экстремум, то в этой точке производная $f'(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

Понятно, задача отыскания экстремумов функции тесно связана с задачей нахождения ее промежутков монотонности. На практике обычно начинают с нахождения *критических точек* – корней уравнения $f'(x) = 0$ и точек, в которых производная не существует. Если критических точек в рассматриваемой области нет, то производная всюду одного знака и, стало быть, функция либо всюду возрастает, либо всюду убывает. Если же критические точки есть, то они разбивают область на промежутки монотонности. Если при переходе через критическую точку знак производной меняется, скажем, с плюса на минус, то эта точка отделяет промежуток возрастания функции от промежутка убывания и является точкой максимума функции $f(x)$. Если перемена знака производной происходит с минуса на плюс, то критическая точка – точка минимума. Это – так называемый *первый достаточный признак экстремума*.

Конечно, может случиться, что при переходе через критическую точку знак производной не меняется. Но тогда эта точка не является точкой экстремума. Таким образом, выполнение условия – $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует – не достаточно для существования экстремума, другими словами, не каждая критическая точка есть точка экстремума.

Упражнение 126. Для функций из примера 1 найдите еще раз критические точки, укажите среди них точки максимума и минимума, вычислите значения функции в этих точках (максимумы и минимумы).

Упражнение 127. То же для задач из упражнения 124.

Упражнение 128. То же для функций: а) $y = xe^{-x}$; б) $y = x(x-2)^2$; в) $y = x\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right)$.

При решении подобной задачи для разрывной функции все происходит так же, только наряду с критическими точками необходимо исследовать и точки разрыва, т.к. при переходе через них знак производной (и вместе с ним характер монотонности) может меняться. Как правило, следует в точке разрыва находить односторонние пределы функции.

Пример 2. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции $y = \dfrac{e^x}{x-a}$.

Решение. Ищем производную: $y' = \dfrac{e^x(x-a) - e^x}{(x-a)^2} = \dfrac{e^x\left(x - (a+1)\right)}{(x-a)^2}$. Производная равна нулю в точке $x = a+1$ и не существует вместе с функцией в точке $x = a$. Заметим, что критическая точка $x = a+1$ расположена на единицу правее точки разрыва $x = a$. Знаки производной, очевидно, распределяются на оси следующим образом (см. рис. 23).

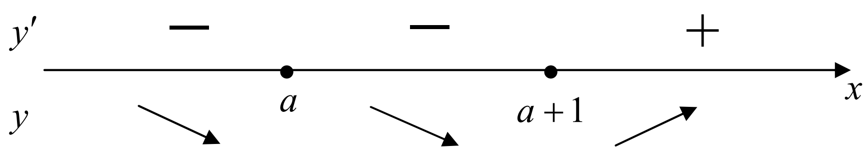

Рис. 23

Видим, что точка $x = a+1$ является (по достаточному признаку) точкой минимума, и $y_{\min} = y(a+1)e^{a+1}$. На каждом из интервалов $(-\infty; a)$ и $(a; a+1)$ функция убывает, на $(a+1; +\infty)$ возрастает. Найдем еще $\lim\limits_{x \to a+0} y = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to a-0} y = -\infty$ (прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика). Заметим, что $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$, а $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 0$. Разобравшись во всем этом, несложно построить график функции (см. рис. 24). Для определенности берем $a > 0$.

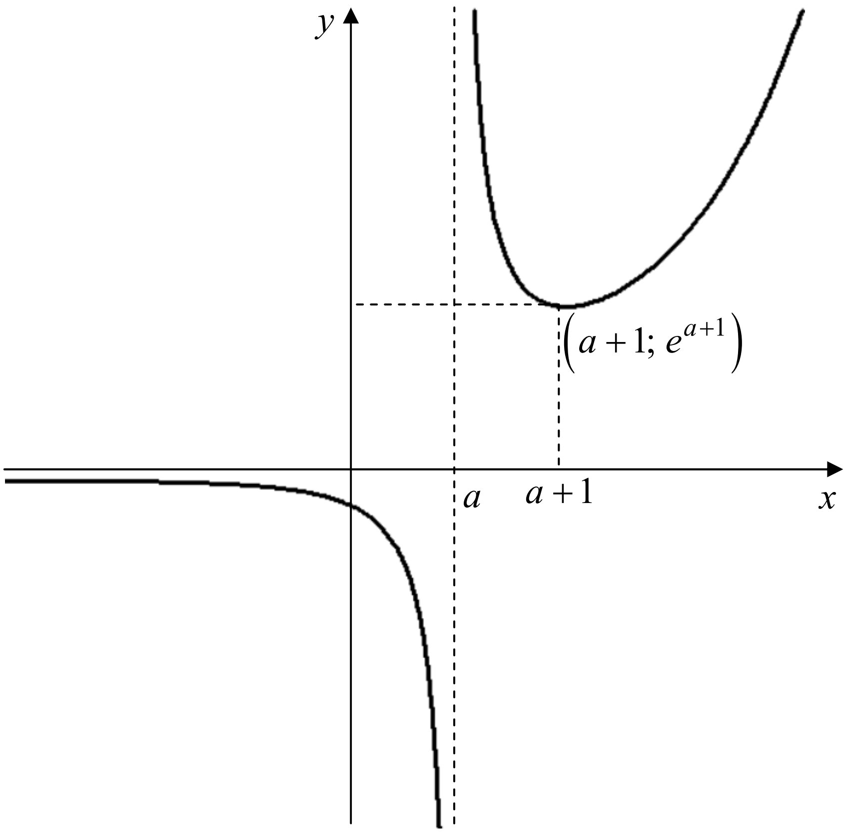

Рис. 24

Рассмотрим более сложный пример.

Пример 3. Найти промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции $y=\dfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{1-x}$.

Решение. Прежде чем применять производную, отметим следующие элементарные свойства этой функции:

а) она определена при всех x, кроме $x=1$, где имеется разрыв II рода, при этом $\lim\limits_{x\to 1+0} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0} y=+\infty$, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой графика;

б) функция равна 0 при $x=0$, положительна при $x\in(-\infty;\,0)\cup(0;\,1)$ и отрицательна при $x\in(1;\,+\infty)$;

в) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0$, т.к. старшая степень x находится в знаменателе.

Эти факты позволяют нарисовать «грубый» график функции (см. рис. 25).

Теперь вычисляем производную:

$$y'=3\cdot\frac{\dfrac{2(1-x)}{3\sqrt[3]{x}}+\sqrt[3]{x^2}}{(1-x)^2}=\frac{2(1-x)+3x}{\sqrt[3]{x}\,(x-1)^2}=\frac{x+2}{\sqrt[3]{x}\,(x-1)^2}.$$

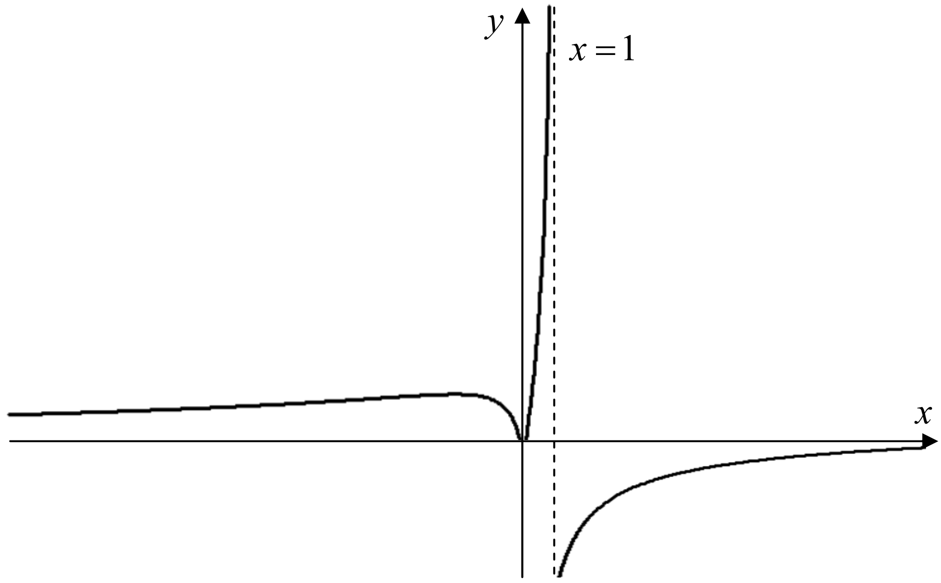

Рис. 25

Имеем две критические точки: $x=-2$ $\left(f'(-2)=0\right)$ и $x=0$ $\left(f'(0)\text{ не существует}\right)$, причем ясно, что знак y' меняется при переходе через каждую из этих точек. Кроме того, должна быть учтена точка разрыва $x=1$, при переходе через которую смены знака y' не происходит.

Метод интервалов дает следующее распределение знаков y' и, соответственно, промежутков монотонности функции (см. рис. 26).

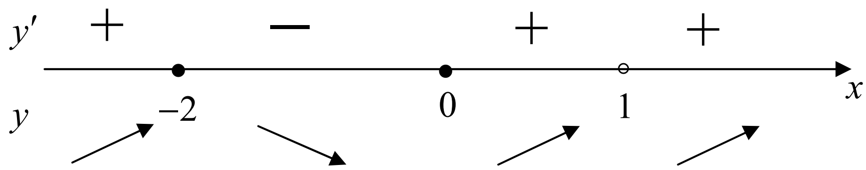

Рис. 26

По доказанному признаку, $x=-2$ – точка максимума, $y_{\max}=y(-2)=\sqrt[3]{4}\approx$ $\approx 1{,}58$; $x=0$ – точка минимума, $y_{\min}=y(0)=0$. Отметим различия: при $x=-2$ $y'(-2)=0$ и максимум «гладкий», с горизонтальной касательной; при $x=0$ минимум «острый», с вертикальной касательной. Окончательно график выглядит, как на рис. 27.

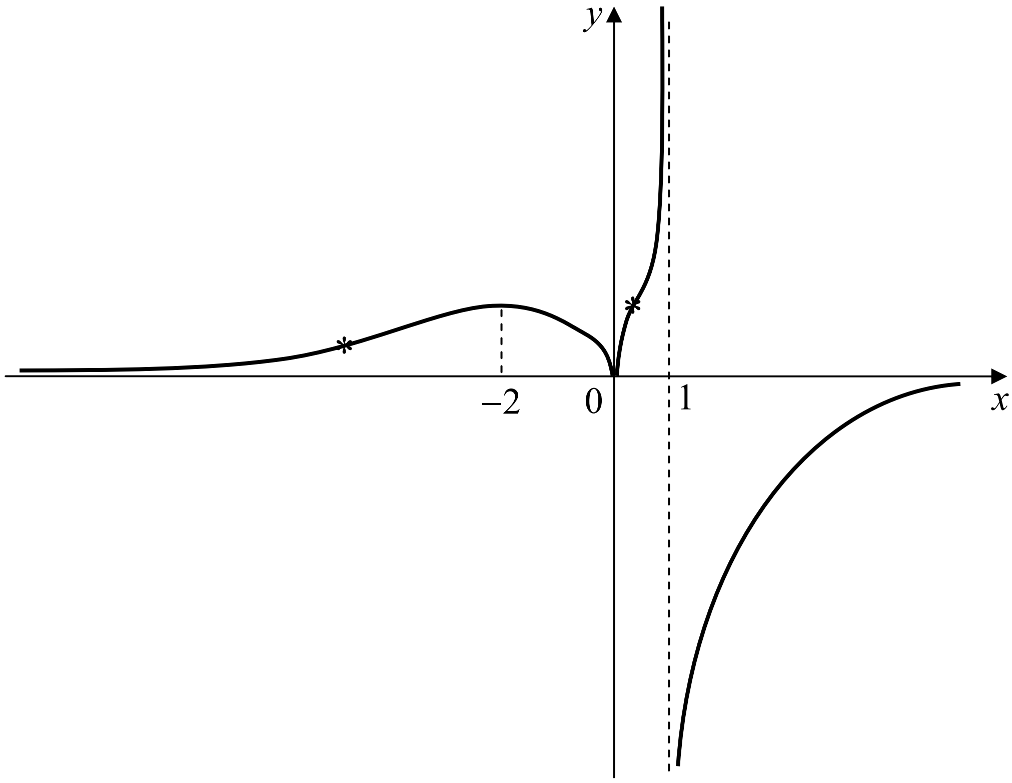

Рис. 27

Обратите еще внимание на две характерные точки графика, отмеченные знаком «$*$», в которых кривая – не слишком заметно глазу – изгибается, или, более строго, меняет направление выпуклости. Наличие таких точек не может быть установлено с помощью одной первой производной, для этого требуется вторая производная. Об этом пойдет речь в п.3.4.

Упражнение 129. Найдите промежутки монотонности и экстремумы функций: а) $y = 2\sqrt{x} - x$; б) $y = \cos^2 x - \cos x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; в) $y = \frac{e^{-x}}{x+1}$. Постройте графики.

Упражнение 130. То же для функций: а) $y = \ln x - 2x^2$; б) $y = 3\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$; в) $y = \frac{\ln x}{x}$; г) $y = x^2 - 3\sqrt[3]{x^2}$; д) $y = \frac{e^x}{e^x - e}$.

3.2. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке

Здесь будем рассматривать функцию $f(x)$, дифференцируемую (а, значит, и непрерывную), за исключением, возможно, отдельных точек замкнутого промежутка $[a; b]$, причем, и в таких точках функция предполагается непрерывной. Для такой функции, согласно теореме Вейерштрасса, всегда существуют точки на $[a; b]$, в которых она принимает свои *наибольшее и наименьшее* значения. Если $f(x), x \in D$, разрывна, или D не является отрезком, то таких точек может и не быть.

Задача отыскания таких значений является одной из важнейших в математике и ее приложениях, и ее решение связано с задачей об отыскании экстремумов функции, рассмотренной в предыдущем п. Именно, если наибольшее (наименьшее) значение функции достигается во *внутренней* точке промежутка, это, в силу определения экстремума, будет ее максимум (минимум), и соответствующая точка должна быть *критической*, т.е. в ней $f'(x)=0$ или не существует.

Ясно также, что оба этих значения – или одно из них – могут достигаться функцией на концах промежутка, в точках $x=a$ и (или) $x=b$. Графики на рис. 28 помогут разобраться в этих случаях. Здесь в точке x_1 достигается наибольшее значение функции, в точке x_2 – наименьшее.

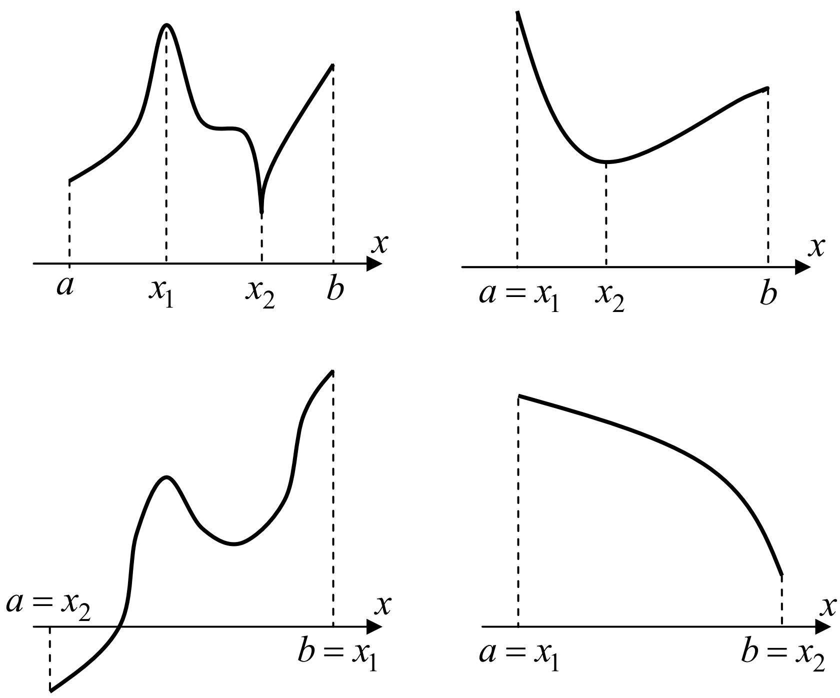

Рис. 28

Из всего сказанного вытекает процедура решения задачи об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ при $x\in[a;b]$.

1) Найти все критические точки $f(x)$, $x\in(a;b)$, т.е. точки, где $f'(x)=0$ или не существует. (При этом исследование на экстремум по достаточному признаку не требуется.) Затем вычислить значения $f(x)$ во всех таких точках.

2) Вычислить значения $f(x)$ в концевых точках отрезка: $f(a)$ и $f(b)$.

3) Из всех значений, вычисленных в п.1) и 2), выбрать ровно два: наибольшее и наименьшее.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^4-4x+3$, $x\in[0;2]$.

Решение. Находим производную: $y' = 4\left(x^3 - 1\right)$. Единственный ее корень $x = 1$ лежит внутри отрезка $\left[0;\ 2\right]$. Находим $f\left(1\right) = 1 - 4 + 3 = 0$. Исследовать функцию на экстремум не нужно!

Находим значения функции на концах отрезка: $f\left(0\right) = 3$, $f\left(2\right) = 11$. Из чисел $f\left(1\right)$, $f\left(0\right)$, $f\left(2\right)$ выбираем наибольшее и наименьшее.

Ответ: наибольшее значение $M = f\left(2\right) = 11$, наименьшее $m = f\left(1\right) = 0$.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f\left(x\right) = e^{2x} - e^x - 3x + 1$, $x \in \left[-1;\ 0\right]$.

Решение. Ищем критические точки $f'\left(x\right) = 2e^{2x} - e^x - 3 = 0$. Замена $e^x = t$ $\left(t > 0\right)$ дает уравнение $2t^2 - t - 3 = 0$, корни которого $t_1 = -1$ и $t_2 = \dfrac{3}{2}$. Первый корень заведомо не подходит, т. к. $t > 0$. Второй $t_2 = \dfrac{3}{2}$ дает $e^x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = \ln\dfrac{3}{2} > 0$ – не принадлежит промежутку $\left[-1;\ 0\right]$. Следовательно, искомые значения M и m достигаются на концах отрезка. Вычисляем: $f\left(-1\right) = \dfrac{1}{e^2} - \dfrac{1}{e} + 3 + 1 = \dfrac{1}{e^2} - \dfrac{1}{e} + 4$, $f\left(0\right) = 1 - 1 + 0 + 1 = 1$.

Ответ: наибольшее значение $M = f\left(-1\right) = \dfrac{1}{e^2} - \dfrac{1}{e} + 4 \approx 3{,}77$, наименьшее $m = f\left(0\right) = 1$.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f\left(x\right) = \dfrac{x^2}{2} + \sqrt{9 - x^2}$, $x \in \left[-2;\ 3\right]$.

Решение. Снова начинаем с критических точек. $f'\left(x\right) = x - \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$. Заметим, что производная не существует на правом конце отрезка, при $x = 3$. Найдем ее корни в интервале $\left(-2;\ 3\right)$, решив уравнение $x = \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}} \Leftrightarrow x\left(\sqrt{9 - x^2} - 1\right) = 0$. Получаем три корня: $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{8}$, $x_3 = -\sqrt{8}$, третий из которых не попадает в заданный интервал, т.к. $-\sqrt{8} < -2$. Вычисляем значение функции в первых двух: $f\left(0\right) = 3$, $f\left(\sqrt{8}\right) = \dfrac{8}{2} + \sqrt{9 - 8} = 5$. Далее находим $f\left(-2\right) = 2 + \sqrt{5} \approx 4{,}24$, $f\left(3\right) = 4{,}5$.

Таким образом, искомые значения достигаются внутри отрезка: $M = f\left(\sqrt{8}\right) = 5$ (максимум), $m = f\left(0\right) = 3$ (минимум).

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f\left(x\right) = 2\sin x + \cos 2x$, $x \in \left[-\pi;\ \pi\right]$.

Решение. Производная равна $f'(x)=2\cos x-2\sin 2x$. Решаем уравнение $2(\cos x-\sin 2x)=0$ при $x\in(-\pi;\pi)$. $\cos x-\sin 2x=0 \Leftrightarrow \cos x-2\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \cos x(1-2\sin x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$ Первое уравнение на указанном промежутке имеет корни $x_1=\dfrac{\pi}{2}$, $x_2=-\dfrac{\pi}{2}$, второе $x_3=\dfrac{\pi}{6}$, $x_4=\dfrac{5\pi}{6}$.

Вычисляем $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2-1=1$, $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-2-1=-3$, $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$, $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=2\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$. Осталось вычислить $f(-\pi)=f(\pi)=0+1=1$ и среди найденных чисел выбрать наибольшее $M=f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{2}$ и наименьшее $m=f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-3$.

Упражнение 131. Найдите наибольшее и наименьшее значения функций: а) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{8}{x}$, $x\in\left[\dfrac{1}{2};4\right]$; б) $f(x)=x^3-3x^2-24x$, $x\in[-3;5]$; в) $f(x)=\sqrt{(1+x^2)(9-x^2)}$, $x\in[0;3]$.

Упражнение 132. Найдите наибольшее и наименьшее значения функций: а) $f(x)=x^2-2x\sqrt{x}-2x+3$, $x\in[0;9]$; б) $f(x)=x-2\ln x$, $x\in[1;e]$; в) $f(x)=\sqrt{2}\cos x+x$, $x\in[0;\pi]$.

Заметим, что рассматриваемая задача может иметь решение и в случае бесконечного промежутка. При этом могут достигаться и наибольшее, и наименьшее значения функции или одно из них.

Пример 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=xe^{-\sqrt{x}}$, $x\in[0;+\infty)$.

Решение. Производная равна $f'(x)=e^{-\sqrt{x}}-x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{-\sqrt{x}}=e^{-\sqrt{x}}\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)$. Она не существует при $x=0$ и равна 0 при $x=4$. Имеем $f(4)=4e^{-2}$, $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ (проверяется по правилу Лопиталя).

Ответ: $M=f(4)=\dfrac{4}{e^2}\approx 0{,}54$, $m=f(0)=0$.

Упражнение 133. Найдите наибольшее и наименьшее значения (если они существуют) функций: а) $f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}$, $x\in(-\infty;+\infty)$; б) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $x\in[1;e]$.

3.3. Решение текстовых задач на отыскание наибольших (или наименьших) значений функции

Здесь будут рассмотрены некоторые из многочисленных задач, которые составляют одну из важнейших областей применения производной на практике. По существу, эти задачи сходны с рассмотренными в предыдущем пункте, только функцию $f(x)$ приходится составлять самостоятельно, исходя из условия задачи.

Пример 1. Имеется квадратный лист жести (или картона) со стороной a. Нужно изготовить из него открытую коробку в форме прямого параллелепипеда с квадратным дном, обрезав по краям листа углы в виде квадратов, как показано на рис. 29. Каков наибольший объем такой коробки?

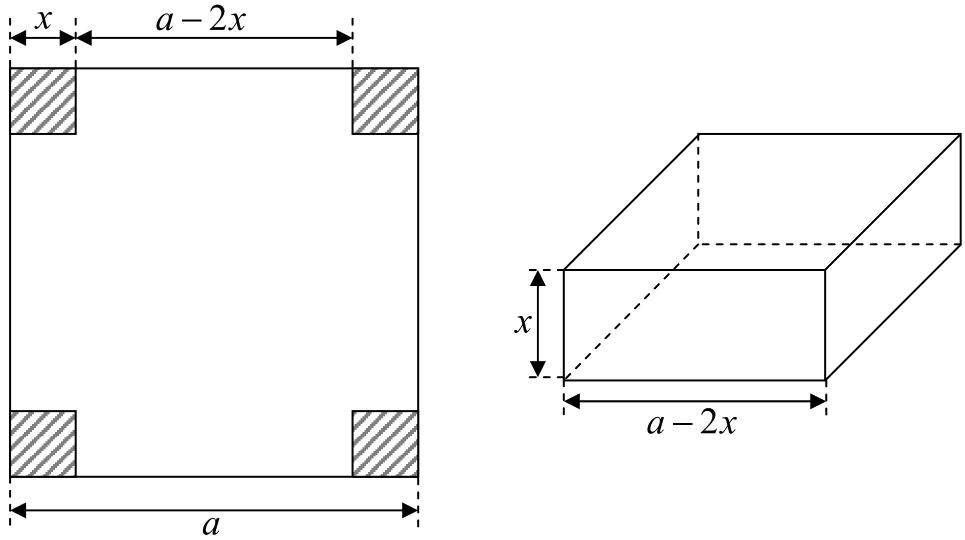

Рис. 29

Решение. Эта довольно простая, известная задача, решение которой «на глазок», без помощи производной, едва ли возможно. Вопрос, очевидно, состоит в том, сколько отрезать. Обозначим стороны отрезаемого квадрата через x, заметив сразу, что $0 \le x \le \frac{a}{2}$. Тогда x есть боковое ребро (высота) коробки, а $a-2x$ – сторона ее основания (днища), и объем такой коробки равен $V = V(x) = (a-2x)^2 x$, $x \in \left[0; \frac{a}{2}\right]$. Получили задачу на отыскание наибольшего значения функции на отрезке. При этом ясно, что наименьшее значение, равное нулю, получается на концах отрезка.

Находим производную $V'(x) = (a-2x)^2 - 2\cdot 2x(a-2x) = (a-2x)(a-6x)$. Ее корни $x_1 = \frac{a}{2}$, $x_2 = \frac{a}{6}$. По предыдущему ясно, что первый корень не представляет интереса. Второй дает искомое решение. Осталось подсчитать $V\left(\frac{a}{6}\right) = \left(a - \frac{2a}{6}\right)^2 \frac{a}{6} = \frac{2a^3}{27}$. Заметим, что $x = \frac{a}{6}$ – точка максимума функции, но, как уже отмечалось, чтобы в этом убедиться, нет надобности применять достаточный признак экстремума. Но можно построить примерный график функции $V(x)$ (рис. 30), из которого все ясно наглядным образом.

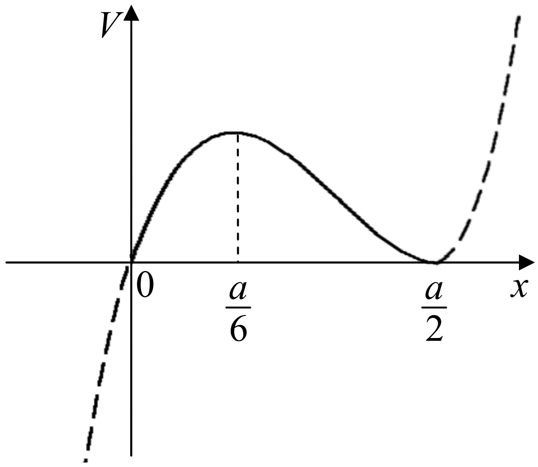

Рис. 30

Пример 2. Требуется изготовить стакан цилиндрической формы данного объема $V=1$ л так, чтобы на это изготовление ушло наименее возможное количество материала. Указать размеры требуемого цилиндра.

Решение. Решим задачу при произвольно заданном объеме V. Форма цилиндра характеризуется двумя величинами: радиус R и высота H. Искомое (наименьшее) количество материала, если пренебречь толщиной стенок и дна, равно площади поверхности открытого цилиндра, состоящей из площади основания (дна) $S_{осн}=\pi R^2$ и боковой поверхности $S_б=2\pi RH$: $S(R, H)=\pi R^2+2\pi RH$.

Но одна из двух переменных выражается через другую, поскольку задан постоянный объем $V=\pi R^2 H$. Отсюда $H=\dfrac{V}{\pi R^2}$, а, следовательно, $2RH=\dfrac{2V}{\pi R}$. Получаем функцию $S(R)=\pi\left(R^2+\dfrac{2V}{\pi R}\right)$, $R\in(0;+\infty)$, для которой требуется найти наименьшее значение. Заметим, что на концах промежутка функция $S(R)$ не определена, но, очевидно, $\lim\limits_{R\to 0} S=\lim\limits_{R\to+\infty} S$, и, поскольку $S>0$, то должно найтись значение R, при котором S достигает максимума.

Найдем $S'(R)=\pi\left(2R-\dfrac{2V}{\pi R^2}\right)=\dfrac{2}{R^2}\left(\pi R^3-V\right)$. Производная имеет единственный корень $R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$, который и является точкой минимума, при этом $S_{\min}=$

$=S\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}\right)=\pi\left(\sqrt[3]{\left(\dfrac{V}{\pi}\right)^2}+\dfrac{2V\sqrt[3]{\pi}}{\pi\sqrt[3]{V}}\right)=3\sqrt[3]{\pi V^2}$. При $V=1$ л получается $S_{\min}\approx 438$ см^2.

Учитывая формулу объема, найдем, что при $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}} = \sqrt[3]{R^2 H}$ имеем $H = R$, т.е. высота искомого цилиндра равна радиусу его основания.

Упражнение 134. Покажите, что если заменить в условии задачи стакан (открытый сосуд) запаянной банкой, то получится ответ, из которого следует, что высота банки равна диаметру основания.

Пример 3. Доказать, что наименьший объем конуса, описанного около данного шара, в 2 раза больше объема этого шара.

Решение. Задача, очевидно, сводится к отысканию наименьшего объема конуса, который можно описать около шара. Обозначим через r радиус шара, R, H и l – радиус основания, высоту и образующую конуса. На рис. 31 изображено осевое сечение тела, причем $OC = OK = r$ (постоянная), $AC = R$, $BC = H$, $AB = l = \sqrt{R^2 + H^2}$.

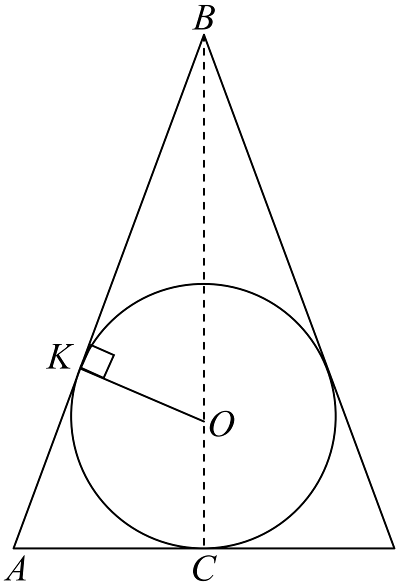

Рис. 31

Заметим, что $AK = AC$ по свойству касательных, проведенных из одной точки к данной окружности. Объем конуса равен $V(R, H) = \dfrac{\pi}{3} R^2 H$, но, прежде чем находить наименьшее значение этой функции, нужно привести ее к виду функции одной переменной. Воспользуемся для этого подобием треугольников: $\Delta ABC \sim \Delta OBK$, откуда $\dfrac{AC}{OK} = \dfrac{AB}{OB} \Leftrightarrow \dfrac{R}{r} = \dfrac{l}{H - r} \Leftrightarrow R(H - r) = r\sqrt{R^2 + H^2}$. Возведя обе части этого равенства в квадрат, получаем $R^2\left(H^2 - 2rH + r^2\right) = r^2\left(R^2 + H^2\right)$, откуда следует, что $R^2 = \dfrac{r^2 H^2}{H^2 - 2rH}$ или, после сокращения, $R^2 = \dfrac{r^2 H}{H - 2r}$.

Подставляем полученное выражение в формулу объема конуса и получаем $V(H)=\frac{\pi r^2}{3}\frac{H^2}{H-2r}=c\cdot\frac{H^2}{H-2r}$ $\left(c=\frac{\pi r^2}{3}\right)$. Теперь ищем наименьшее значение этой функции при $H\in(2r;+\infty)$.

Производная равна $V'(H)=c\cdot\frac{2H(H-2r)-H^2}{(H-2r)^2}=\frac{cH(H-4r)}{(H-2r)^2}$. Из двух ее корней в промежуток $(2r;+\infty)$ попадает только второй $H=4r$, и именно он, как легко убедиться, дает наименьшее значение (минимум) функции $V(H)$. Он равен $V_{\min}=V(4r)=\frac{\pi r^2}{3}\cdot\frac{16r^2}{2r}=\frac{8}{3}\pi r^3$. Вспомнив формулу объема шара $v=\frac{4}{3}\pi r^3$, видим, что решение завершено: наименьший объем конуса, описанного около данного шара, вдвое больше объема этого шара.

Упражнение 135. В конус с высотой H и радиусом основания R вписан цилиндр наибольшего возможного объема. Найдите отношение этого объема к объему конуса.

Пример 4. Завод, находящийся на расстоянии 5 км от железной дороги, доставляет продукцию на железнодорожную станцию, расположенную на той же дороге на расстоянии 13 км от завода. Чтобы сократить время доставки, решено проложить шоссе между заводом и некоторой точкой M железной дороги, откуда груз может доставляться потребителям по рельсам. Известно, что стоимость перевозки груза по шоссе в 2 раза больше, чем по рельсам. Указать наиболее выгодное положение точки M, при котором сумма затрат на перевозку по шоссе и по рельсам будет минимальной (рис. 32, слева).

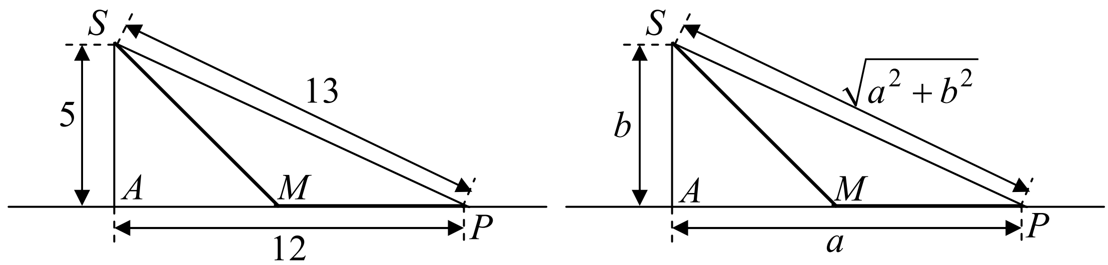

Рис. 32

Решение. Обозначим $AM=x$, тогда длина пути по шоссе составит $SM=s_1=\sqrt{x^2+25}$, а по рельсам $PM=s_2=12-x$. Если перевозка на 1 км по рельсам стоит 1 у.е., то, согласно условию, общая стоимость доставки будет равна $Q=Q_{SM}+Q_{PM}=2\sqrt{x^2+25}+1\cdot(12-x)$ у.е. Итак, дело сводится к нахождению наименьшего значения функции $Q(x)=2\sqrt{x^2+25}+12-x$, $x\in[0;12]$.

Ищем его известным способом. $Q'(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+25}}-1=0 \Leftrightarrow 4x^2=x^2+25$. Корень этого уравнения, принадлежащий промежутку $[0;12]$: $x=\frac{5}{\sqrt{3}}\approx 2{,}9$ км и $Q\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)=2\sqrt{\frac{25}{3}+25}+12-\frac{5}{\sqrt{3}}\approx 20{,}7$ у.е.

Сравнив это значение с $Q(0)=2\cdot 5+12=22$ и $Q(12)=2\cdot 13=26$, видим, что точка $x=\frac{5}{\sqrt{3}}$ действительно является самой выгодной (точкой минимума), т.к. для нее затраты являются наименьшими из всех возможных.

Однако полностью содержательность этой задачи выясняется только при решении ее в общем виде. Приведем здесь это решение, положив $AP=a$, $AS=b$ (рис. 32, справа) и обозначив отношение стоимостей через k (в решенной задаче было $k=2$). Тогда $Q(x)=k\sqrt{x^2+b^2}+a-x$, где $x\in[0;a]$, и $Q'(x)=\frac{kx}{\sqrt{x^2+b^2}}-1=0$ при $k^2x^2=x^2+b^2$. Откуда $x=\frac{b}{\sqrt{k^2-1}}$. Здесь легко сделать ошибку, посчитав, что решение на этом окончено. Обязательно нужно учесть условие $x\in[0;a]$, тогда получим $\frac{b}{\sqrt{k^2-1}}\le a$, откуда $k^2-1\ge\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow k\ge\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$. Т.е. k должно быть не меньше отношения $\frac{SP}{AP}=\frac{1}{\cos\alpha}$, где α есть угол SPA. При этом, чем больше k, тем ближе находится точка M к точке A.

Но если окажется, что $k<\frac{1}{\cos\alpha}$, то критическая точка $x=\frac{b}{\sqrt{k^2-1}}$ лежит справа от точки P, и тогда наименьшее значение $Q(x)$ достигается на правом конце промежутка, т.е. при $x=a$.

Любопытно, что при $x=0$ – на левом конце – всегда будет получаться наибольшее значение $Q(x)$, т.е. прямой путь от S к A самый невыгодный (конечно, если считать деньги).

Следующая известная задача совершенно аналогична рассмотренной и предлагается для самостоятельного решения.

Упражнение 136. Корабль стоит на якоре на расстоянии b км от берега моря. С корабля нужно отправить на лодке донесение в штаб, расположенный на берегу на расстоянии a км от ближайшей к кораблю точки берега (линия берега – прямая). Определите точку, в которой лодка должна пристать к берегу, чтобы донесение было доставлено в кратчайшее время, если известны скорость v_1 км/ч лодки и v_2 км/ч посыльного при движении по берегу. При этом $v_1<v_2$.

Указание: полезно обозначить $\frac{v_2}{v_1} = k > 1$.

Пример 5. При n измерениях некоторой неизвестной величины x получены значения $x_1, x_2, ..., x_n$. Вводится понятие «среднее квадратическое отклонение» (от заданного значения x): $\sigma^2 = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + ... + (x - x_n)^2$. При каком значении x величина среднего квадратического отклонения будет наименьшей? (Иначе: надежность измерения – наибольшей.)

Решение. Это весьма простая и столь же важная (в теории измерений и в разных приложениях математики) задача. Считая, что функция σ^2 определена на всей числовой оси, находим ее производную

$$\left(\sigma^2(x)\right)' = 2\left((x - x_1) + (x - x_2) + ... + (x - x_n)\right) = 2\left(nx - (x_1 + x_2 + ... + x_n)\right).$$

Единственный корень производной $x = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ равен среднему арифметическому результатов измерений.

Упражнение 137. Докажите, что из всех прямоугольников, вписанных в круг, наибольшую площадь имеет квадрат.

Упражнение 138. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. При каком радиусе полукруга площадь окна будет наибольшей, если периметр окна равен $2p$?

Упражнение 139. В шар радиуса R вписан конус наибольшего объема. Найдите расстояние от центра шара до основания конуса и отношение объемов шара и конуса.

Упражнение 140. Найдите точки гиперболы $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$, ближайшие к точке $P(3; 0)$.

Упражнение 141. Найдите наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в эллипс $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t \end{cases}$ (стороны прямоугольника параллельны осям эллипса).

Упражнение 142. Меньшее основание равнобочной трапеции равно ее боковой стороне. Найдите угол такой трапеции, имеющей наибольшую площадь. Чему равна эта площадь?

Упражнение 143. Капля с начальной массой m_0 падает с некоторой высоты, равномерно испаряясь с коэффициентом пропорциональности k. В какой момент кинетическая энергия капли максимальна?

Упражнение 144. Куб с ребром a вписан в конус так, что четыре его вершины лежат в плоскости основания конуса, а остальные четыре – на боковой поверхности конуса. Найдите наименьший возможный объем конуса.

3.4. Применение второй производной

Второй достаточный признак экстремума. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 первую производную, равную нулю $\left(f'(x_0)=0\right)$ и вторую производную, отличную от нуля $\left(f''(x_0)\neq 0\right)$, то x_0 – точка экстремума $f(x)$. При этом, если $f''(x_0)>0$, то x_0 – точка минимума, если $f''(x_0)<0$, то x_0 – точка максимума.

Рис. 33 позволяет легко запомнить этот признак по «правилу дождя»: при $f''(x_0)>0$ дождь заполняет сосуд – в точке x_0 минимум; при $f''(x_0)<0$ сосуд опрокинут вверх дном и не наполняется, x_0 – точка максимума.

Рис. 33

Доказательство (при дополнительном предположении о непрерывности $f''(x)$ в точке x_0) легко понять, опираясь на 1-й достаточный признак.

Пример 1. Доказать 2-й достаточный признак экстремума.

Решение. Пусть, например, $f''(x_0)>0$ и $f''(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда, по свойству непрерывной функции, $f''(x)>0$ в некоторой окрестности x_0, а, значит, $f'(x)$ возрастает в этой окрестности. Но по условию $f'(x)=0$, откуда следует, что слева от точки x_0 (в той же окрестности) $f'(x)<0$, а справа $f'(x)>0$. Значит, при переходе через точку x_0 $f'(x)$ меняет знак «–» на знак «+», и, по первому достаточному признаку (см. п. 1 этого раздела), в точке x_0 минимум.

Случай $f''(x_0)<0$ рассматривается точно так же.

Пример 2. Найти с помощью 2-го достаточного признака точки экстремума функции $f(x)=e^x\left(x^3-3x^2+4x-4\right)$

Решение. Найдем $f'(x)=e^x\left(x^3-3x^2+4x-4+3x^2-6x+4\right)=e^x\left(x^3-2x\right)$.

Находим критические точки из уравнения $f'(x)=0$: $x_1=-\sqrt{2}$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{2}$. Далее находим $f''(x)=e^x\left(x^3-2x+3x^2-2\right)$ и определяем ее знак в критических точках:

$$f''\left(-\sqrt{2}\right)=e^x\left(\left(-\sqrt{2}\right)^3-2\left(-\sqrt{2}\right)+3\left(-\sqrt{2}\right)^2-2\right)=4e^{-\sqrt{2}}>0,$$

$$f''(0) = -2 < 0,$$

$$f''(\sqrt{2}) = e^x\left(\left(\sqrt{2}\right)^3 - 2\sqrt{2} + 3\left(-\sqrt{2}\right)^2 - 2\right) = 4e^{\sqrt{2}} > 0.$$

Значит, $x_2 = 0$ – точка максимума, $x_{1,3} = \mp\sqrt{2}$ – точки минимума функции.

Пример 3. Найти экстремумы функции $f(x) = \sin^2 x + \cos x$.

Решение. С учетом периодичности достаточно решить задачу для промежутка длины 2π. Кроме того, замечаем, что функция четна, это позволяет ограничиться промежутком $[0; \pi]$. На этом промежутке производная $f'(x) = 2\sin x\cos x - \sin x = 2\sin x\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$ имеет три корня: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \pi$. Определяем знак второй производной в этих точках.

$f''(x) = (\sin 2x - \sin x)' = 2\cos 2x - \cos x$, $f''(0) = 2\cos 0 - \cos 0 = 1 > 0 \Rightarrow$ $x_1 = 0$ – точка минимума, $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow$ $x_2 = \frac{\pi}{3}$ – точка максимума, $f''(\pi) = 2 - (-1) = 3 > 0 \Rightarrow$ $x_3 = \pi$ – точка минимума.

Присоединив к этим точкам точки, симметричные x_2 и x_3 относительно начала координат, получаем окончательно: $f(\pm\pi) = -1$ – минимумы, $f\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$ – максимумы, $f(0) = 1$ – минимум функции $f(x)$.

Примерный график изображен на рис. 34.

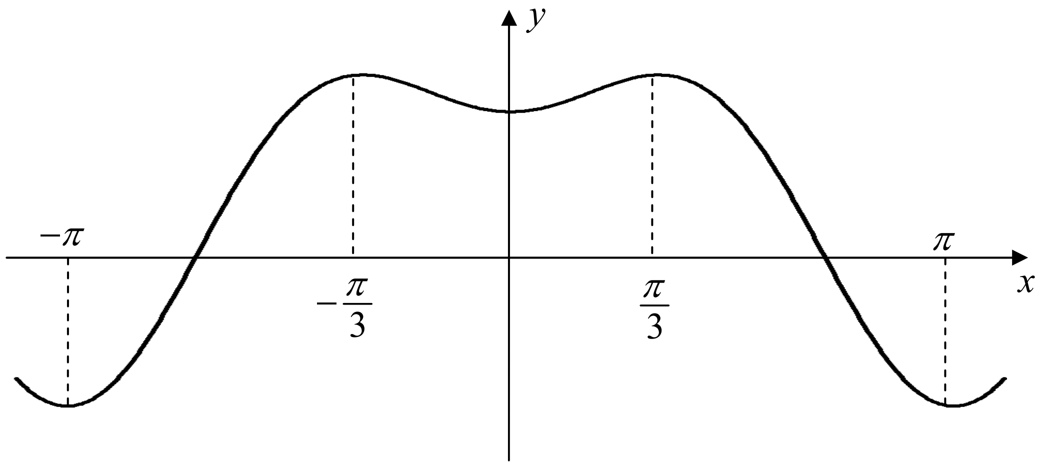

Рис. 34

Упражнение 145. Найдите с помощью 2-го достаточного признака экстремумы функций:

а) $f(x) = x\ln^2 x$; б) $f(x) = 4x^5 - 5x^3 - 5x$; в) $f(x) = \sin^3 x + \sqrt{3}\cos^3 x$.

Замечание. Очевидно, рассмотренный признак не применим для критических точек x_0, где первая производная не существует, и не дает ответа, если $f''(x_0) = f'(x_0) = 0$. В последнем случае можно находить следующие производные. Если первая из производных, не обращающаяся в нуль в точке x_0, имеет нечетный порядок, то в данной точке экстремума нет; если же четный, то x_0 – точка минимума, если эта производная положительна (в точке x_0), или точка максимума в противном случае. Это так *называемый общий достаточный признак экстремума*, который доказывается с помощью формулы Тейлора.

Пример 4. Доказать, что точка $x = 0$ не является точкой экстремума функции $f(x) = \sin x + \operatorname{sh} x$.

Решение. Первая производная $f'(x) = \cos x - \operatorname{ch} x$ равна нулю при $x = 0$, следовательно, $x = 0$ – критическая точка. Далее, $f''(x) = -\sin x - \operatorname{sh} x$ также равна нулю при $x = 0$, 2-й достаточный признак не работает. Наконец, $f'''(x) = -\cos x - \operatorname{ch} x$ при $x = 0$ равна –2, а, значит, в точке $x = 0$ экстремума нет.

Упражнение 146. Проверьте, что точка $x = 0$ является точкой максимума функции $f(x) = \cos x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24}$.

Выпуклость (вогнутость) графика функции $y = f(x)$*. Точки перегиба.* Кривую $y = f(x)$ будем называть выпуклой на данном промежутке, если все ее точки (с абсциссами из данного промежутка) лежат по одну сторону – выше или ниже – любой касательной, проведенной в точках с теми же абсциссами. Ясно, что сама точка касания исключается из рассмотрения.

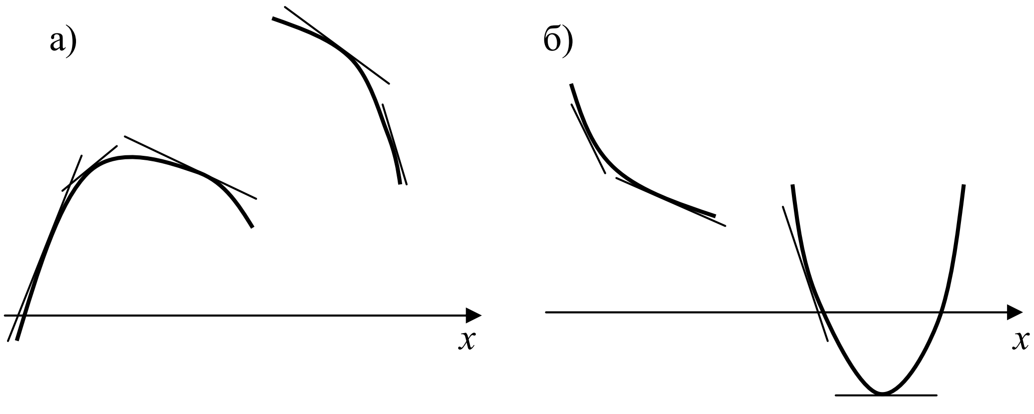

Рис. 35

Кривые на рис. 35а расположены ниже любой касательной, такие кривые называются *выпуклыми вверх*; кривые на рис. 35б лежат выше любой касательной, они называются *выпуклыми вниз*. В некоторых книгах кривая, выпуклая вверх, называется просто выпуклой, а выпуклая вниз – вогнутой. Заметим еще, что здесь рассматриваются только такие кривые $y = f(x)$, для которых функция $f(x)$ имеет на рассматриваемом промежутке конечную производную и даже вторую производную. Поэтому кривая такого типа, как изображенная на рис. 36, не является выпуклой из-за «нехорошей» точки $x = c$, хотя состоит из двух выпуклых (в данном случае – вниз) частей, расположенных слева и справа от точки c. Должно быть понятно, что если кривая $y = f(x)$ выпукла (вверх или вниз), то кривая $y = -f(x)$ также выпукла, но имеет противоположное направление выпуклости.

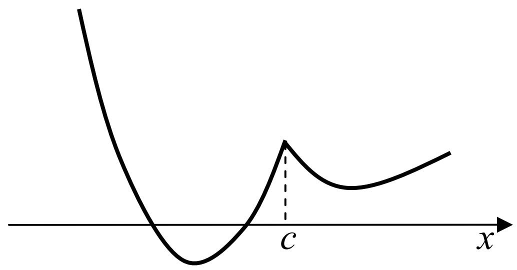

Рис. 36

Замечание. Прямая – график линейной функции – не является выпуклой кривой.

Упражнение 147. Какие из следующих кривых являются выпуклыми? Определите во всех случаях характер выпуклости (вверх или вниз): а) $y = 1 - x^2$; б) $y = x^2 - 2x$; в) $y = \frac{1}{x}$, $x \in (0; +\infty)$; г) $y = \sqrt{x}$; д) $y = e^{-x}$; е) $y = \ln x$; ж) $y = \cos x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; з) $y = \sin x$, $x \in [0; 2\pi]$; и) $y = \operatorname{ctg} x$.

Задачи з) и и) из упражнения 147 показывают, что характер выпуклости кривой может меняться. Очевидно, что синусоида выпукла вверх, где $\sin x > 0$, и выпукла вниз при $\sin x < 0$. А график $y = \operatorname{ctg} x$, наоборот, является выпуклым вниз при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и на любом интервале $\left(n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, где $\operatorname{ctg} x > 0$, и выпуклым вверх всюду, где $\operatorname{ctg} x < 0$.

Точка графика $(x_0; f(x_0))$ называется *точкой перегиба*, если слева и справа от нее график имеет различный характер выпуклости.

Очевидно, что у кривой $y = \sin x$ все точки $(n\pi; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$, служат точками перегиба, а график $y = x^3$ имеет одну точку перегиба (какую?). Подчеркнем, что точка перегиба (по определению) – это точка на графике, а не просто абсцисса точки. Так, $x = 0$ не является точкой перегиба гиперболы $y = \frac{1}{x}$, хотя слева от нее кривая выпуклая вверх, а справа выпуклая вниз. Заметим, что в точке перегиба касательная пересекает график, т.к. с одной стороны от этой точки располагается выше, а с другой – ниже его.

Упражнение 148. Укажите точки перегиба кривых, если они существуют: а) $y = \arccos x$; б) $y = 3 - x^3$; в) $y = \operatorname{tg} 2x$; г) $y = x|x|$; д) $y = x^2|x|$; е) $y = |\sin x|$.

Достаточное условие выпуклости функции на промежутке – сохранение знака 2-й производной. Именно: если на данном промежутке всюду $f''(x) > 0$, то кривая $y = f(x)$ выпукла вниз, а если $f''(x) < 0$, то кривая выпукла вверх. Обратное утверждение (необходимое условие выпуклости) верно при нестрогом неравенстве: если $f(x)$ выпукла вниз, то $f''(x) \geq 0$, а если вверх, то $f''(x) \leq 0$. Примером может служить парабола $y = x^4$, которая всюду выпукла вниз, а 2-я производная $\left(x^4\right)'' = 12x^2$ равна нулю при $x = 0$ и положительная при всех $x \neq 0$.

Наглядное, хотя не вполне строгое, доказательство последнего признака можно понять из рис. 37.

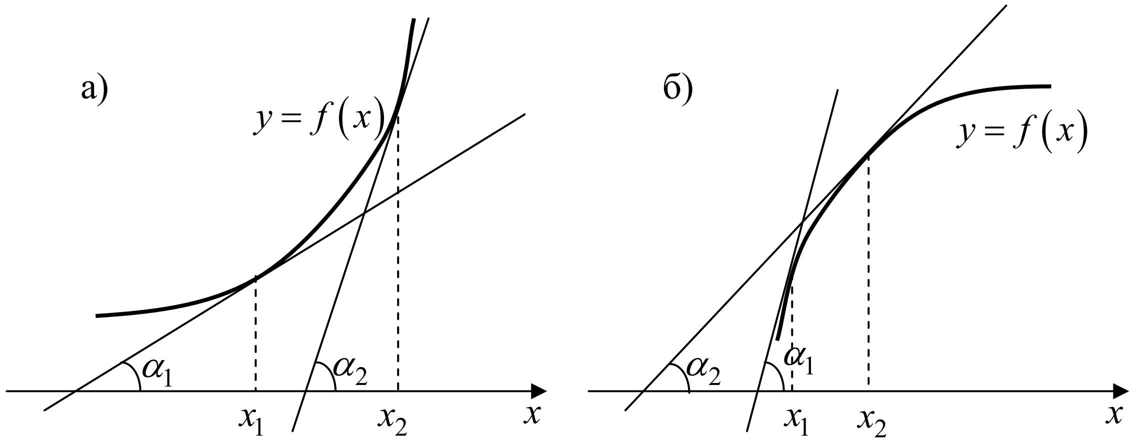

Рис. 37

Для выпуклой вниз кривой (рис. 37а) очевидно, что из $x_1 < x_2$ следует, что $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, где α_1 и α_2 – углы, образованные касательной в точках кривой с абсциссами x_1 и x_2, а тогда $0 < \operatorname{tg}\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_2 \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$, т.е. первая производная возрастает на данном промежутке. Тогда, по условию монотонности, ее производная, т.е. вторая производная должна быть неотрицательной: $f''(x) \geq 0$. Для выпуклой вверх кривой (рис. 37б) рассуждения аналогичные.

Из рассмотренного выше сразу вытекает необходимое условие точки перегиба: если $(x_0; f(x_0))$ – точка перегиба кривой $y = f(x)$, то $f''(x) = 0$ либо $f''(x)$ не существует. Действительно, в противном случае было бы $f''(x) > 0$ или

$f''(x) < 0$, что означало бы выпуклость вниз или вверх. Но в точке перегиба, по определению, этого быть не может. С другой стороны, само по себе условие $f''(x) = 0$ еще не является достаточным: пример – точка с для функции $f(x) = x^4$. Достаточным условием будет смена знака $f''(x)$ при переходе через точку x_0.

Замечание. Такую точку, как M_0 на рис. 38, также принято считать точкой перегиба, хотя в ней не существует 2-я (и даже 1-я) производная, но график имеет в этой точке вертикальную касательную, которая пересекает его в точке M_0 – как и в обычной точке перегиба.

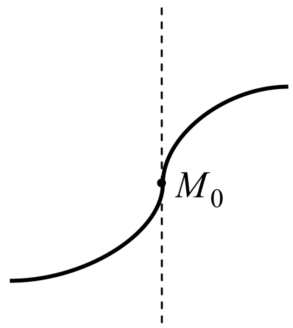

Рис. 38

Пример 5. Найти промежутки выпуклости графиков функций: а) $y = x^3 - x + 21$; б) $y = x \ln x$; в) $y = \cos^2 \dfrac{x}{2}$. Указать точки перегиба.

Решение. а) Находим последовательно 1-ю и 2-ю производную: $y' = 3x^2 - 1$, $y'' = 6x$. Видим, что $y'' > 0$ при $x > 0$ – здесь кривая выпукла вниз; $y'' < 0$ при $x < 0$ – здесь имеем выпуклость вверх. Единственная точка перегиба $(0;\, 2)$.

б) Тем же путем – $y' = \ln x + 1$, $y'' = \dfrac{1}{x}$. Т.к. область определения функции $x \in (0;\, +\infty)$, то $y'' > 0$, а, следовательно, кривая всюду выпукла вниз. Точек перегиба нет.

в) $y' = -2 \cdot \dfrac{1}{2} \cos\dfrac{x}{2} \sin\dfrac{x}{2} = -\dfrac{1}{2}\sin x$, $y'' = -\dfrac{1}{2}\cos x$. Видим, что промежутки выпуклости функции $y = \cos^2 \dfrac{x}{2}$ совпадают с промежутками знакопостоянства функции $y = -\cos x$, которая отрицательна в точках x, соответствующих углам I и IV четвертей: $x \in \left(2k\pi;\, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ и $x \in \left(\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi;\, 2\pi + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Во всех таких промежутках кривая выпукла вверх, в остальных – выпукла вниз. Если ограничиться промежутком $(0;\, 2\pi)$, получим диаграмму (рис. 39).

Точки перегиба – все точки $x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n;\, \dfrac{1}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

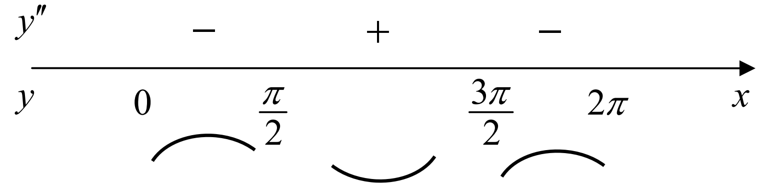

Рис. 39

Упражнение 149. Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба кривых: а) $y = x^4 - 14x^3 + 60x^2 - 144$; б) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$; в) $y = 5x + x\sqrt[3]{x^2}$; г) $y = x\cos(\pi \ln x)$; д) $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

Упражнение 150. Докажите, что точка перегиба графика $y = f(x)$ является экстремальной точкой для $y' = f'(x)$.

3.5. Асимптоты графика функции

Прежде чем приступить к построению графиков с помощью производных, нам следует рассмотреть важный вспомогательный элемент этой задачи – нахождение асимптот. В самом общем виде асимптота – это прямая линия, обладающая таким свойством, что расстояние от нее до данной кривой стремится к нулю (является бесконечно малой) при неограниченном (бесконечно большом) удалении точки кривой от начала координат.

Ранее уже встречались простейшие случаи асимптот – вертикальные и горизонтальные. Напомним: прямая $x = a$ есть *вертикальная асимптота* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов – при $x \to a$, $x \to a+0$, $x \to a-0$, равен $+\infty$ или $-\infty$. Прямая $y = b$ является *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ или (и) $x \to -\infty$ равен b.

Пример 1. Найти горизонтальные и вертикальные асимптоты графиков функций: а) $y = \dfrac{2x^2+1}{1-x^2}$; б) $y = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$; в) $y = \dfrac{x \operatorname{arctg} x}{x-2}$; г) $y = \dfrac{x^3+1}{x|x+1|}$.

Решение. а) Функция разрывна при $x = 1$ и $x = -1$, причем, разрыв в обеих точках бесконечный (по теореме о связи между бесконечно малой и бесконечно большой). С учетом знака знаменателя, $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} y = \mp\infty$, $\lim\limits_{x \to -1 \pm 0} y = \pm\infty$. Таким образом, график имеет две вертикальные асимптоты: $x = 1$ и $x = -1$. Рассматривая предел $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y$, получаем -2. Значит, $y = -2$ есть горизонтальная асимптота.

Заметим, что знание асимптот во многих случаях, подобных этому, позволяет «увидеть» график в общих чертах, что заметно упрощает дальнейшую работу. На рис. 40 построен примерный график с учетом найденных асимптот, четности функции и найденной точки пересечения с осью OY.

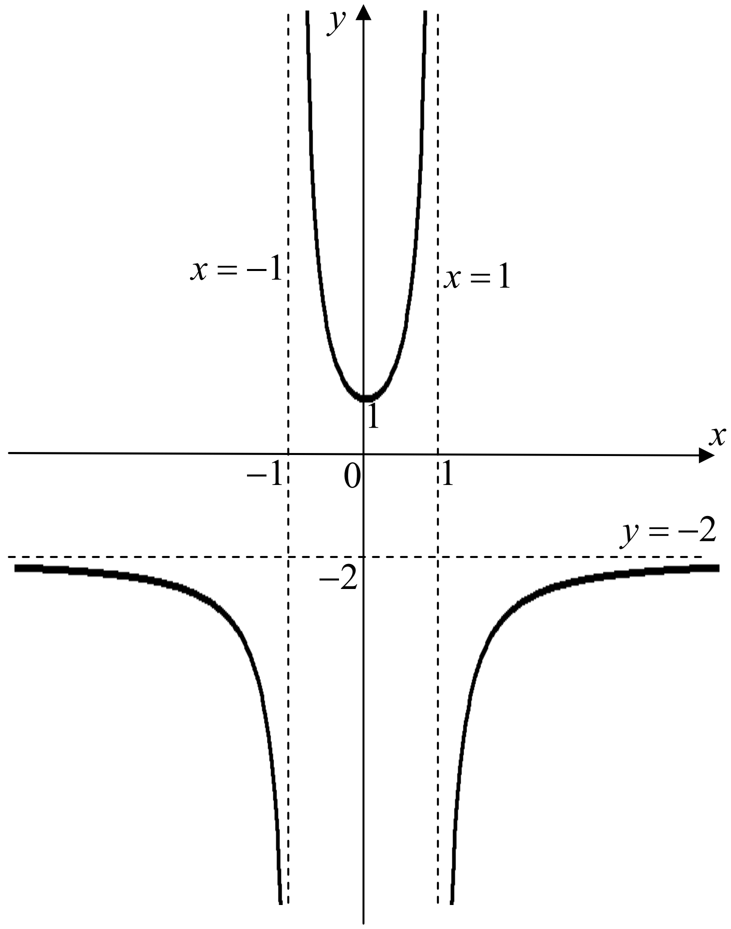

Рис. 40

б) Здесь нужно выяснить поведение функции вблизи (справа) от граничной точки области определения логарифма. Находим предел $\lim\limits_{x\to-1} y=+\infty$ (т.к. числитель $\ln(1+x)\to-\infty$, а знаменатель $x\to-1$). Еще требует внимания точка $x=0$. Но в ней нет вертикальной асимптоты, поскольку $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, и точка $x=0$ является точкой устранимого разрыва.

Таким образом, $x=-1$ – единственная вертикальная асимптота. Осталось найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty} y$. Его можно вычислить, используя правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x}=0$. Значит, прямая $y=0$ (ось OX) является горизонтальной асимптотой.

в) Здесь, очевидно, вертикальная асимптота $x=2$: $\lim\limits_{x\to2\pm0} y=\pm\infty$ (числитель вблизи точки $x=2$ положителен). Учитывая, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg}x=\pm\frac{\pi}{2}$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x-2}=2$, получаем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\pi$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\pi$. Следовательно, график имеет две горизонтальных асимптоты $y=\pi$ и $y=-\pi$ и одну вертикальную.

г) Избавляясь от модуля, имеем

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^3+1}{x(x+1)} = \dfrac{x^2-x+1}{x} & \text{при } x > -1, \\ -\dfrac{x^3+1}{x(x+1)} = -\dfrac{x^2-x+1}{x} & \text{при } x < -1. \end{cases}$$

Находим $\lim\limits_{x\to -1+0} y = -3$, $\lim\limits_{x\to -1-0} y = 3$. В точке $x = -1$ разрыв типа скачка, вертикальной асимптоты нет. Прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой, т.к. очевидно, что $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} y = \pm\infty$. Наконец, $\lim\limits_{x\to \pm\infty} y = +\infty$, и горизонтальных асимптот нет.

Упражнение 151. Найдите вертикальные и горизонтальные асимптоты графиков: а) $y = \dfrac{x}{x^2+x-2}$; б) $y = \dfrac{\sin^2 x}{x}$; в) $y = \dfrac{\cos 2x}{x^2}$; г) $y = x^{10}e^{-x}$; д) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - 1}$.

В курсе аналитической геометрии уже встречались наклонные асимптоты – прямые $y = \pm\dfrac{b}{a}x$, к которым при $x \to \pm\infty$ как угодно близко приближаются ветви гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$. Общее правило выглядит так: прямая $y = kx + b$ служит наклонной асимптотой графика $y = f(x)$ в том и только в том случае, если выполняются одновременно два предельных соотношения: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = b$ (следует рассматривать оба случая $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$).

Пример 2. Доказать это утверждение.

Решение. Действительно, по определению, $y = kx + b$ есть асимптота $y = f(x)$, равносильно тому, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - (kx+b)\right) = 0. \qquad (3.5.1)$$

Поделим обе части этого равенства на x: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right) = 0$. Т.к., очевидно, $\dfrac{b}{x} \to 0$, то получаем $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x} - k\right) = 0$, откуда $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Раскрыв скобки под знаком предела в равенстве (3.5.1), получим второе требуемое соотношение: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = b$. Утверждение доказано.

Замечание. При $k = 0$ отсюда получаем горизонтальную асимптоту $(y = b)$ как частный случай наклонной.

Пример 3. Найти асимптоты гиперболы $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{25} = 1$ по указанному правилу.

Решение. Учитывая симметрию, ограничимся рассмотрением правой полуветви, расположенной в I четверти: $y^2 = 25\left(\frac{x^2}{9} - 1\right) \Leftrightarrow y = \frac{5}{3}\sqrt{x^2 - 9}$. Ищем угловой коэффициент асимптоты k как предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5\sqrt{x^2-9}}{3x} = \frac{5}{3}\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}} = \frac{5}{3}$. Далее

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{3}\sqrt{x^2-9} - \frac{5}{3}x\right) = \frac{5}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-9} - x\right)\left(\sqrt{x^2-9} + x\right)}{\sqrt{x^2-9} + x} = \frac{5}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{-9}{\sqrt{x^2-9} + x} = 0.$$

Искомая асимптота $y = \frac{5}{3}x$. С учетом симметрии имеем вторую асимптоту $y = -\frac{5}{3}x$.

Пример 4. Найти все асимптоты графиков: а) $y = \frac{x^3+1}{x|x+1|}$; б) $y = x + 2\operatorname{arctg} x$; в) $y = \frac{x}{\ln x}$; г) $y = 2x - \cos x$.

Решение. а) Вертикальная асимптота $x = 0$ была найдена в примере 1г. Ищем наклонные отдельно при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. В первом случае $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$, $k = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2 - x + 1}{x \cdot x} = 1$, $b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2 - x + 1}{x} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{x} = -1$.

Получили асимптоту $y = x - 1$ при $x \to +\infty$. При $x \to -\infty$ $f(x) = \frac{-x^2 + x - 1}{x}$, тогда $k = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^2 + x - 1}{x \cdot x} = -1$, $b = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-x^2 + x - 1}{x} + x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x} = 1$, асимптота $y = -x + 1$. Схематичный график изображен на рис. 41.

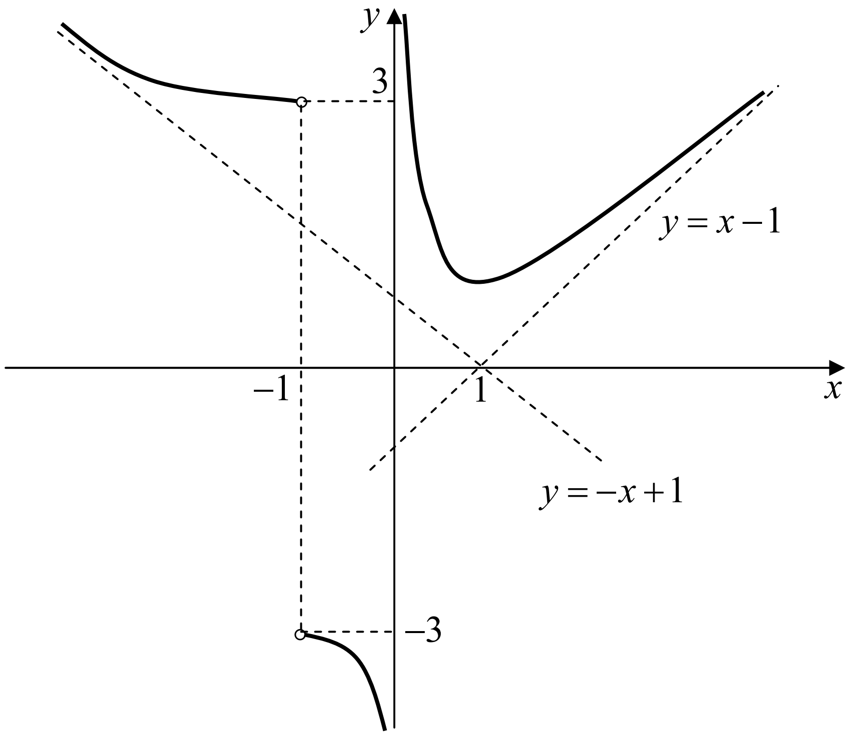

Рис. 41

б) Здесь нет точек разрыва и нет вертикальных асимптот. Ищем $k=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2\operatorname{arctg}x}{x}\right)=1$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\operatorname{arctg}x-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}x$. Нужно рассмотреть два случая: $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\dfrac{\pi}{2}$. Соответственно, график имеет две асимптоты: $y=x+\pi$ при $x\to+\infty$ и $y=x-\pi$ при $x\to-\infty$. Примерный график изображен на рис. 42.

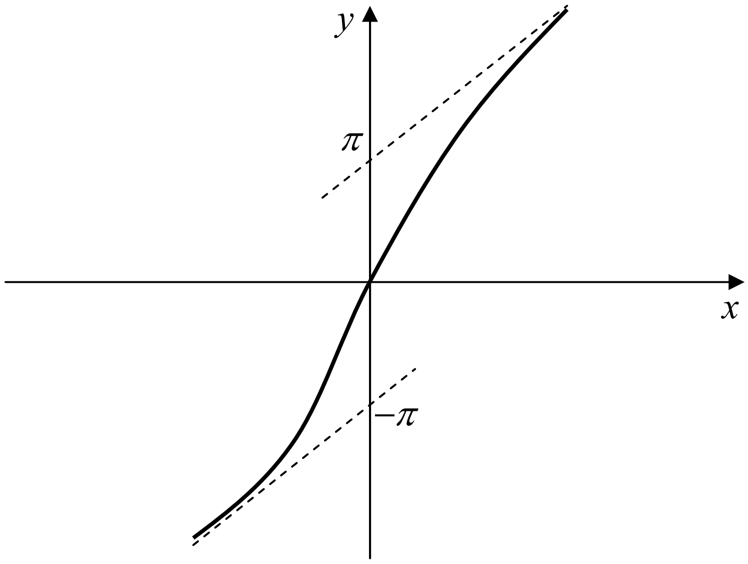

Рис. 42

в) Область определения $x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$. Находим $\lim\limits_{x\to 0+0} y = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{x}{\ln x} = 0$. Далее, $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} y = \pm\infty$ (с учетом знака логарифма при $x > 1$ и $x < 1$). Итак, имеем одну вертикальную асимптоту $x = 1$. Ищем наклонные: $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$, $b = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x} = \infty$. Значит, наклонных асимптот нет. Примерный график – на рис. 43.

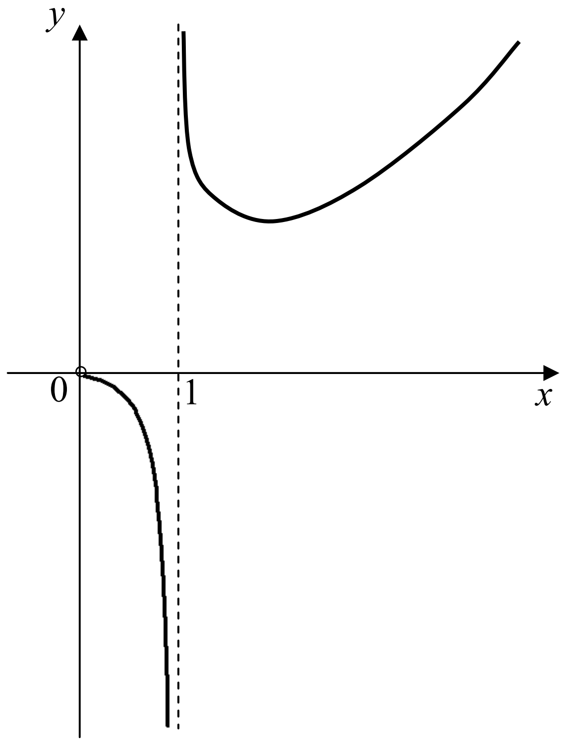

Рис. 43

г) Вертикальных асимптот нет. Ищем наклонные. Имеем $k = \lim\limits_{x\to\infty}\left(2 - \dfrac{\cos x}{x}\right) = 2$, но $\lim\limits_{x\to\infty}(2x - \cos x - 2x) = -\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$ не существует. Стало быть, асимптот нет.

Упражнение 152. Найдите асимптоты графиков функций: а) $y = x - \dfrac{4}{x}$; б) $y = \dfrac{x^2 - x}{x^2 + x + 1}$; в) $y = \dfrac{x^4 - x}{8x^3 + 1}$; г) $y = x \operatorname{arctg} x$; д) $y = \dfrac{x}{\ln^2 x}$; е) $y = 2\sqrt{x^2 + 1}$; ж) $y = xe^{\frac{1}{x}}$; з) $y = x + \sqrt{1 + 4x^2}$.

3.6. Исследование функций. Построение графиков

В самом общем виде исследование функции состоит из трех основных этапов, содержание которых излагается ниже и иллюстрируется примерами.

I. Изучение элементарных свойств функции.

Следует в самом начале установить естественную область определения (кроме случаев, когда область определения указана в условии задачи). Часто для этого бывает необходимо решение неравенств или их систем. Например, когда функция содержит переменную x в знаменателе или под знаком корня четной степени, логарифма, арккосинуса и т.п.

Сразу после этого устанавливается наличие или отсутствие у функции таких свойств, как *нечетность* или *четность*, которые, ввиду симметрии относительно начала координат или оси OY соответственно, позволяют при дальнейшем исследовании ограничиться правой полуплоскостью $(x \geq 0)$.

Если функция периодична, то, установив ее период, естественно дальнейшее изучение вести на промежутке длины периода, а для четных и нечетных функций – даже половины периода.

Полезно, хотя и не всегда возможно, определить корни функции и промежутки ее знакопостоянства, найти некоторые, легко вычисляемые, точки будущего графика. Например, точку пересечения с осью OY. После этого переходят ко второму этапу.

II. *Изучение функций с помощью пределов, нахождение асимптот.*

Понятно, что если мы имеем дело с непрерывной функцией (устанавливают сразу после нахождения области определения, заданной на бесконечном промежутке: $\mathbb{R}$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$), то нужно лишь найти ее пределы на бесконечности и в граничных точках $x = a$ или $x = b$. Одновременно мы определим наличие или отсутствие вертикальных асимптот (в точках a и b) и горизонтальных асимптот (при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$).

После этого остается известным способом проверить, имеет ли график наклонные асимптоты.

Если же функция имеет точки разрыва, то необходимо, вычислив оба односторонних предела $f(x)$ в каждой такой точке, выяснить характер разрыва и, соответственно, наличие или отсутствие вертикальной асимптоты. Это один из важнейших и труднейших моментов исследования, к которому требуется повышенное внимание.

Как правило, после тщательно проведения этапов I и II «грубый» эскиз графика должен быть ясен в общих чертах. Рекомендуется его изобразить, после чего перейти к последнему этапу.

III. *Изучение функции средствами дифференциального исчисления*.

Эти вопросы рассматривались непосредственно в данном пособии, поэтому ограничимся кратким напоминанием.

1) Промежутки знакопостоянства 1-й производной $f'(x)$ являются промежутками монотонности функции $f(x)$.

2) «Критические» точки, где $f'(x)=0$ или не существует, соответствуют точкам графика с горизонтальной или, возможно, вертикальной, касательной. Если критическая точка разделяет два промежутка монотонности (т.е. в ней меняется знак производной), то она является точкой экстремума, – и только в таком случае.

3) Аналогичным образом, промежутки знакопостоянства 2-й производной $f''(x)$ служат одновременно промежутками выпуклости (вверх, вниз) графика функции. Точки графика, отделяющие промежутки выпуклости различного направления, есть точки перегиба графика.

Пример 1. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ и построить ее график.

Решение. I. Область определения находится из условия $x^2-1\neq 0$. Значит, $D:(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$. Функция нечетная: $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=\dfrac{-x^3}{x^2-1}=$ $=-f(x)$. График симметричен относительно начала координат. Поэтому в дальнейшем исследование ведется лишь при $x\geq 0$.

Точка $x=0$ – единственный корень, $y(0)=0$, значит, график функции проходит через начало координат и больше точек пересечения с координатными осями не имеет. Замечаем также, что в правой полуплоскости $y>0$ при $x>1$ и $y<0$ при $0<x<1$. Это промежутки знакопостоянства.

II. Очевидно, $x=1$ – точка разрыва 2-го рода: $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} y=\pm\infty$. Прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой графика.

Горизонтальной асимптоты нет, т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$.

Ищем наклонную асимптоту $y=kx+b$: $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x\left(x^2-1\right)}=1$ (предел отношения многочленов одинаковой степени при $x\to\infty$ равен отношению старших коэффициентов), $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=0$. Следовательно, $y=x$ – наклонная асимптота.

На основании I и II можно сделать эскиз графика (см. рис. 44).

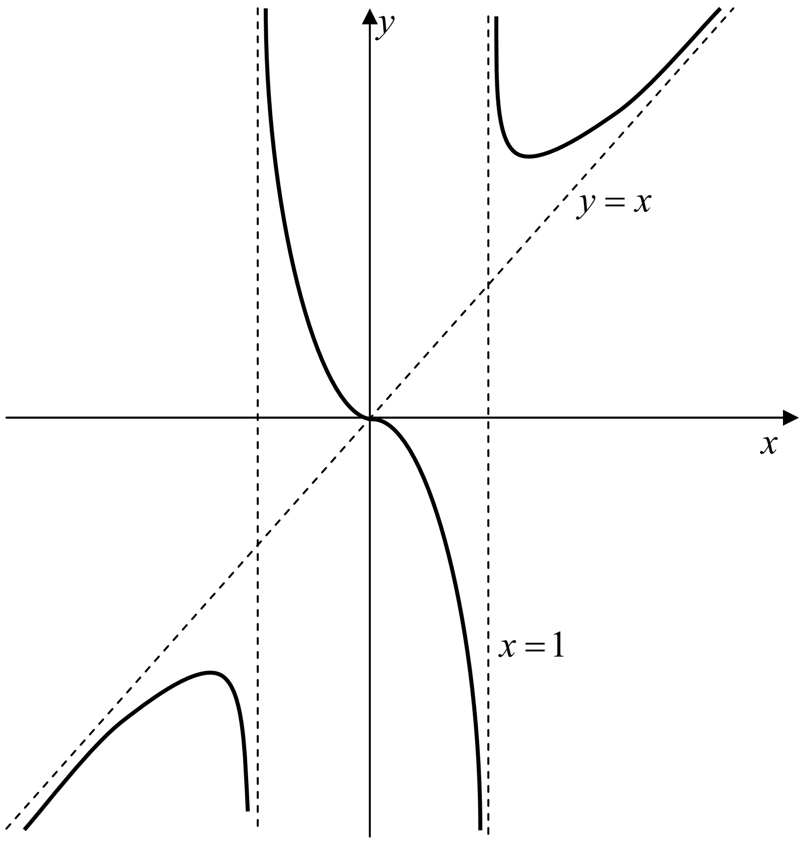

Рис. 44

III. а) Промежутки монотонности, экстремумы. Находим производную $y' = \dfrac{3x^2\left(x^2-1\right)-2x^4}{\left(x^2-1\right)^2} = \dfrac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = \dfrac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2} = \dfrac{x^2\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$.

Критические точки (при $x \geq 0$) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = \sqrt{3}$ дают диаграмму знаков y' (см. рис. 45).

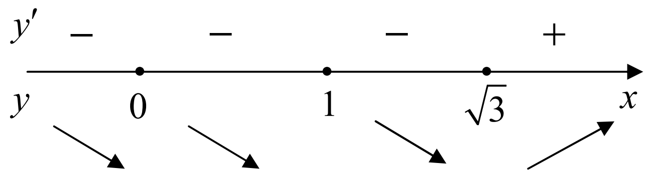

Рис. 45

Т.е. функция убывает на интервалах $(0;1)$, $(1;\sqrt{3})$ и возрастает на интервале $(\sqrt{3};+\infty)$. Точка $x=\sqrt{3}$ – точка минимума, $y_{\min}=y(\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}\approx 2{,}4$.

Точка $x=0$ – точка с горизонтальной касательной, но не точка экстремума.

III. б) Промежутки выпуклости, точки перегиба. Ищем $y''=\left(\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}\right)'=$

$=\frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-4x(x^2-1)(x^4-3x^2)}{(x^2-1)^4}=\frac{x(2x^2+6)}{(x^2-1)^3}$. Критические точки для второй производной (при $x\geq 0$): $x_1=0$, $x_2=1$. Диаграмма знаков на рис. 46.

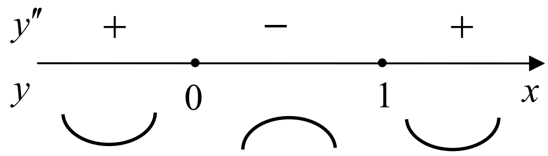

Рис. 46

Видим, что знак y'' меняется при переходе через точки $x=0$, $x=1$, но во второй из них функция не определена, значит, $x=0$ – абсцисса единственной точки перегиба $O(0;0)$. На интервале $(0;1)$ график выпуклый вверх, на интервале $(1;+\infty)$ – выпуклый вниз. Исследование закончено.

Для более аккуратного построения графика найдем две вспомогательные точки: $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}-1}=-\frac{1}{6}$ $\left(\text{точка } \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{6}\right)\right)$ и $x=2$, $y=\frac{8}{4-1}=\frac{8}{3}$ $\left(\text{точка } \left(2;\frac{8}{3}\right)\right)$.

График изображен на рис. 47.

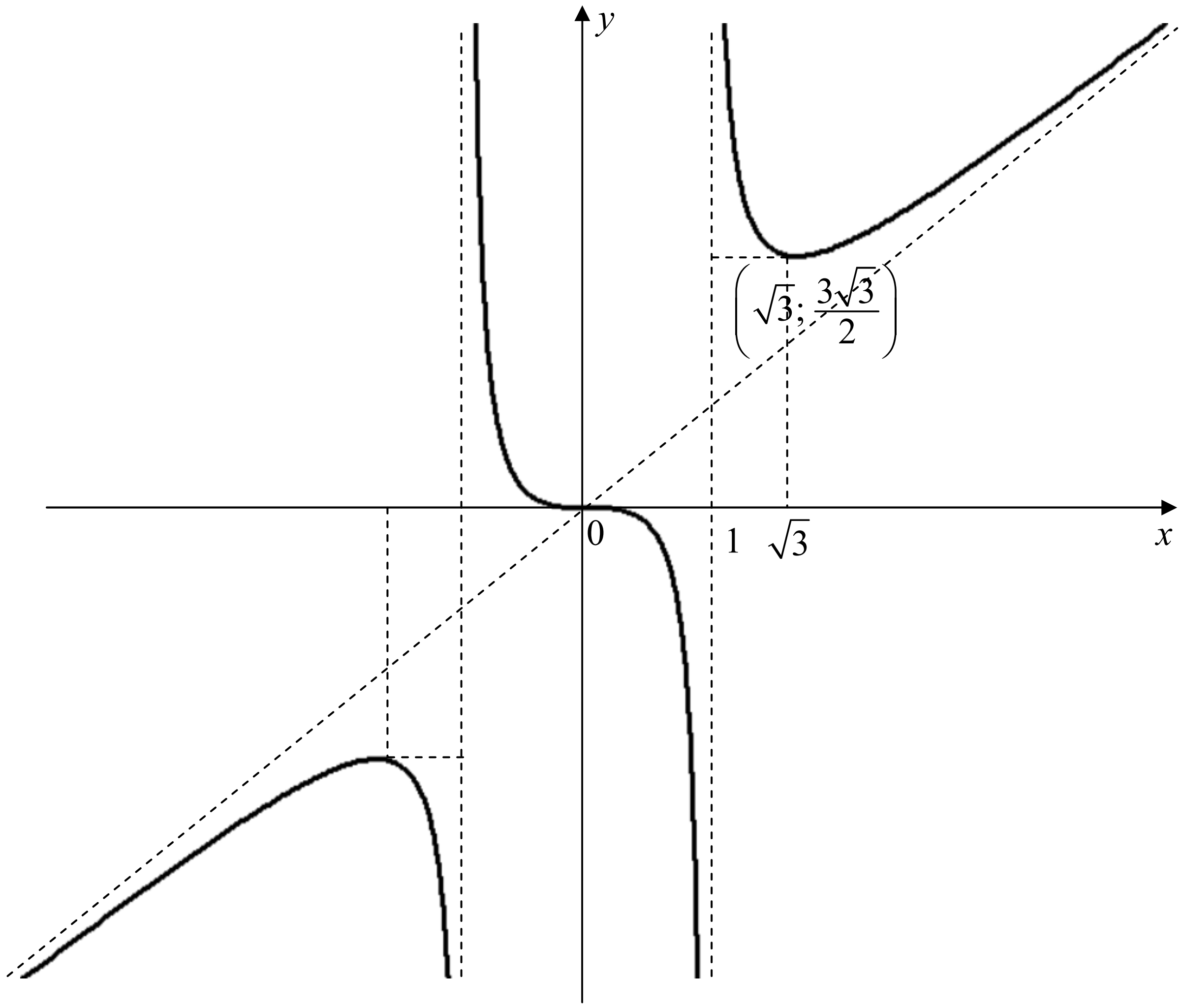

Рис. 47

Пример 2. Исследовать функцию $y = 3x^2 e^{-x}$ и построить ее график.

Решение. Функция определена для всех x. Положительна при всех $x \neq 0$ и обращается в нуль только при $x = 0$. Отсюда уже следует, что $x = 0$ является точкой минимума, что подтвердится при дальнейшем исследовании.

Функция не является ни четной, ни нечетной, не имеет точек разрыва, следовательно, не имеет вертикальных асимптот.

Она имеет при $x \to +\infty$ горизонтальную асимптоту – ось OX, т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 3 \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$. При $x \to -\infty$ предел функции равен $+\infty$, как и предел $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2 e^{-x}}{x} = -\infty$, поэтому нет наклонных асимптот.

Эти рассуждения показывают, что график имеет примерно такой вид, как на рис. 48. При этом где-то справа от нуля должна быть точка максимума.

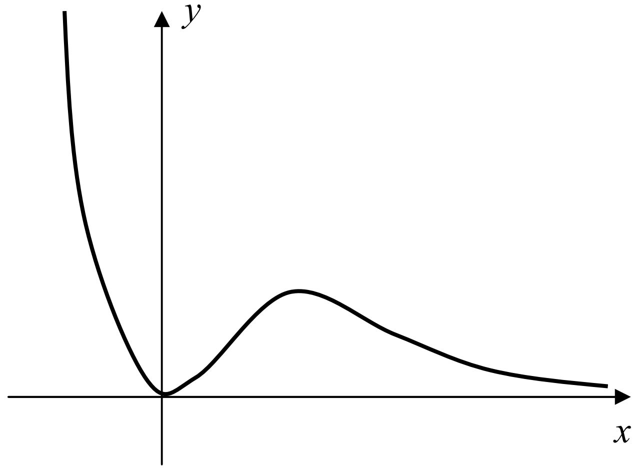

Рис. 48

Исследуем функцию с помощью производной. Имеем $y' = 3\left(2xe^{-x} - x^2e^{-x}\right) = -3xe^{-x}(x-2)$. Корни производной $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. См. рис. 49.

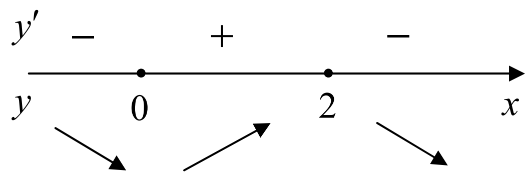

Рис. 49

Функция возрастает на $(0; 2)$ и убывает на $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$. Точка $x = 0$ – точка минимума, $y_{\min} = y(0) = 0$; $x = 2$ – точка максимума, $y_{\max} = y(2) = \dfrac{12}{e^2} \approx 1,2$.

Остается найти промежутки выпуклости и точки перегиба. Ищем $y'' = \left(3\left(2x - x^2\right)e^{-x}\right)' = 3\left((2-2x) - \left(2x - x^2\right)\right)e^{-x} = 3e^{-x}\left(x^2 - 4x + 2\right)$. Корни 2-й производной $x_1 = 2 - \sqrt{2} \approx 0,6$, $x_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3,4$.

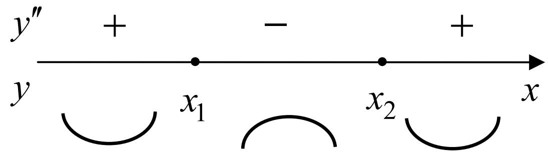

Рис. 50

По рис. 50 определяем, что в интервале $x \in (x_1; x_2)$ кривая выпукла вверх, в остальных точках – выпукла вниз.

Точки с абсциссами $x_1 \approx 0{,}6$ и $x_2 \approx 3{,}4$ и ординатами, соответственно, $y_1 \approx 0{,}6$ и $y_2 \approx 1{,}2$ являются точками перегиба.

График изображен на рис. 51.

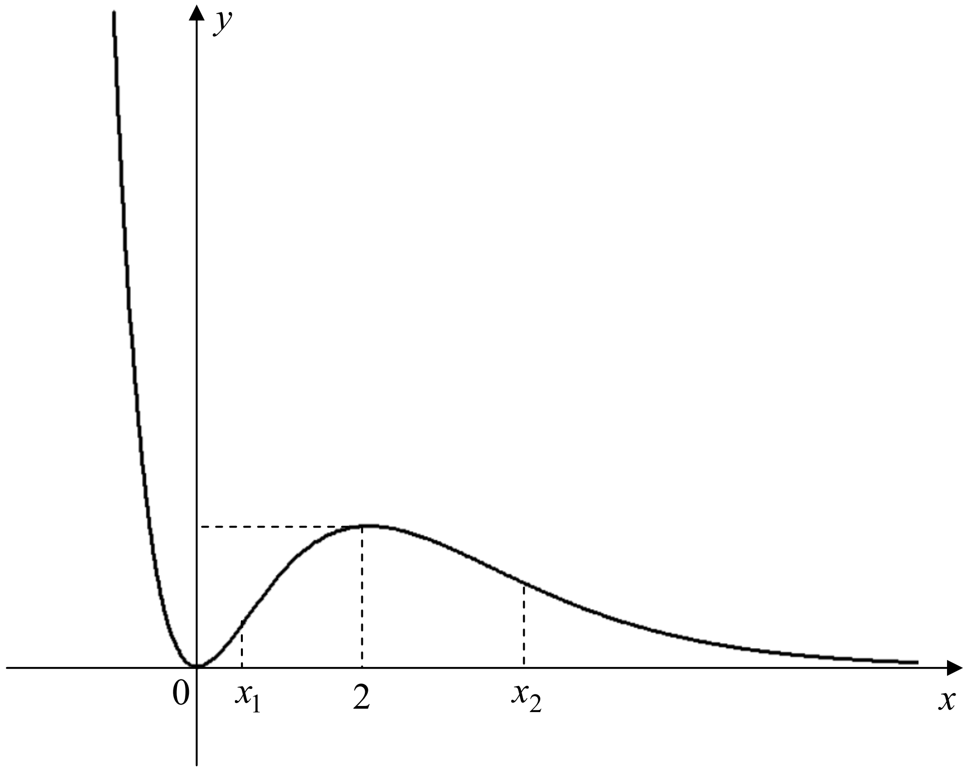

Рис. 51

Пример 3. Исследовать функцию $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$ и построить ее график.

Решение. Функция определена и непрерывна на всей числовой оси. Имеет два корня: $x = 0$ и $x = 5$, при этом положительна при $x > 5$, отрицательна при $x < 5$. При $x \to \pm\infty$ имеет бесконечный предел (того же знака, что и x).

Также и $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{y}{x} = +\infty$, следовательно, у графика нет никаких асимптот.

Эскиз графика предлагаем сделать самостоятельно.

Далее $y' = \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{2(x-5)}{3\sqrt[3]{x}} = \dfrac{3x + 2x - 10}{3\sqrt[3]{x}} = \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{x-2}{\sqrt[3]{x}}$. Производная равна нулю при $x = 2$ и не существует в точке $x = 0$.

Диаграмма знаков на рис. 52 указывает на возрастание функции при $x < 0$ и $x > 5$ и убывание при $0 < x < 2$. При этом в точке $x = 0$ получается «острый» мак-

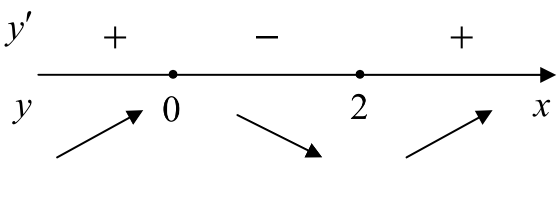

Рис. 52

симум $\left(y_{\max}=y(0)=0\right)$, а в точке $x=2$ – гладкий минимум $\left(y_{\min}=y(2)=-3\sqrt[3]{4}\approx-4{,}8\right)$.

Вторая производная $y''=\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x}-\dfrac{x-2}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2}}=\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{2(x+1)}{\sqrt[3]{x^2}}$ имеет критические точки $x=-1$ и $x=0$. Из рис. 53 ясно, что в точке, где $x=-1$ $\left(\text{точка } (-1;\,0)\right)$, имеется перегиб. График выпуклый вверх в промежутке $(-\infty;\,-1)$ и выпуклый вниз в каждом из промежутков $(-1;\,0)$ и $(0;\,+\infty)$.

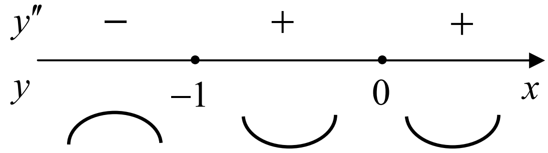

Рис. 53

При построении графика (см. рис. 54) требуется внимание к точке максимума $x=0$ и ее окрестности. Если изобразить максимум гладким, то слева и справа от $x=0$ на графике появятся две дополнительные точки перегиба, которых не должно быть, согласно результатам исследования.

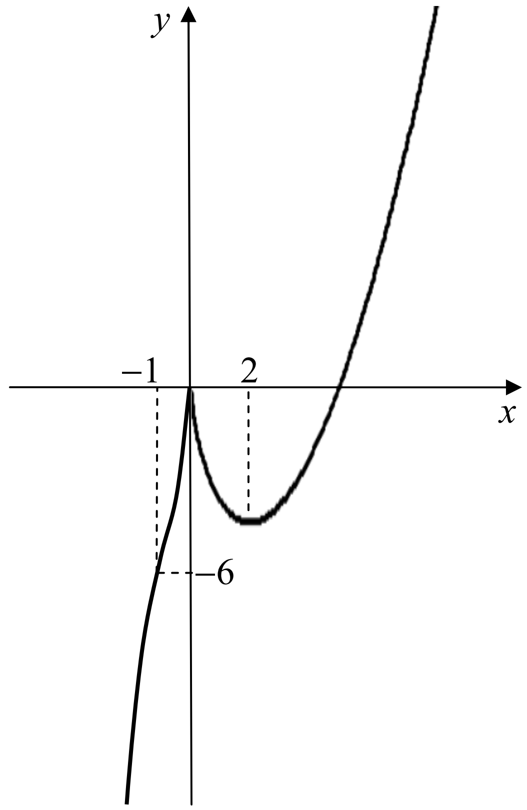

Рис. 54

Пример 4. Исследовать функцию $y = x - \ln\sin x$, $x \in (0;\, \pi)$ и построить ее график.

Решение. Здесь область определения задана в условии задачи, но требуется выяснить поведение функции вблизи граничных точек. При $0 < x < \pi$ $\sin x > 0$, так что $\ln\sin x$, а вместе с ним и данная функция определена всюду внутри промежутка. Т.к. при малых x $\sin x \sim x$, то $\lim\limits_{x\to 0+0} \ln\sin x = \lim\limits_{x\to 0+0} \ln x = -\infty$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(x - \ln\sin x\right) = +\infty$. Аналогично и $\lim\limits_{x\to \pi}\left(x - \ln\sin x\right) = +\infty$, поэтому $x = 0$ и $x = \pi$ – вертикальные асимптоты графика. Других асимптот нет.

Можно еще заметить, что функция положительна при указанных x, т.к. $x > 0$, а $\ln\sin x \le 0$.

Переходим к рассмотрению производных. $y' = 1 - \operatorname{ctg} x$. Из множества решений уравнения $y' = 0$ $\left(x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right)$ в интервал $(0;\, \pi)$ попадает только точка $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Несложно убедиться, что это точка минимума, и $y_{\min} = y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4} - \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 1$.

Затем $y'' = \dfrac{1}{\sin^2 x} > 0$. Откуда следует, что график всюду выпуклый вниз (см. рис. 55).

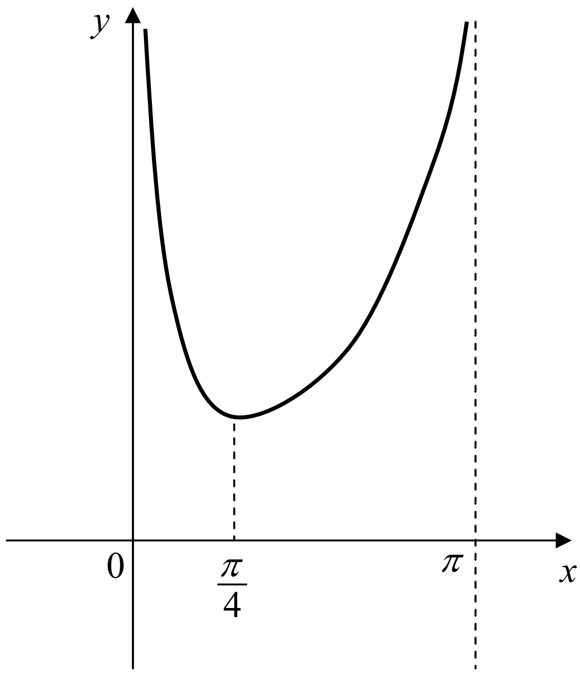

Рис. 55

Пример 5. Исследовать функцию $y=|x|e^{\frac{1}{x^2}}$ и построить ее график.

Решение. Область определения $D:(-\infty;\,0)\cup(0;\,\infty)$, причем, ввиду четности функции, можно вести исследование при $x>0$, а при построении графика использовать симметрию относительно оси OY. При $x>0$ имеем $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$.

Найдем предел $\lim\limits_{x\to 0+0} y$, представляющий неопределенность $[0\cdot\infty]$. Заменим $\frac{1}{x}$ на z (при $x\to 0+0$ $z\to+\infty$), получим $\lim\limits_{z\to+\infty}\frac{e^{z^2}}{z}=+\infty$. Следовательно, $x=0$ – вертикальная асимптота. Очевидно, что $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$.

Ищем наклонную асимптоту $y=kx+b$: $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x^2}}=1$, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x^2}}-1\right)=[0\cdot\infty]$. Та же замена $\frac{1}{x}=z$ приводит предел к виду $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^{z^2}-1}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^{z^2}-1}{z^2}\cdot z=0$. Итак, $y=x$ – наклонная асимптота графика при $x\to+\infty$. Эскиз выполните самостоятельно.

Найдем точку экстремума. $y'=e^{\frac{1}{x^2}}-\frac{2xe^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}=e^{\frac{1}{x^2}}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)=0$ при $x=\sqrt{2}$ (при $x>0$). Это точка минимума и $y_{\min}=y\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2e}\approx 2{,}3$.

Далее $y''=\left(e^{\frac{1}{x^2}}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)\right)'=-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)+e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{4}{x^3}=e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}\left(-1+\frac{2}{x^2}+2\right)=$
$=e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)>0$ при всех $x>0$. Значит, кривая на этом промежутке выпуклая вниз, точек перегиба нет.

График изображен на рис. 56.

Упражнение 153. Исследуйте функции и постройте их графики: а) $y=1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}$; б) $y=\frac{x^2+2x+4}{x+2}$; в) $y=3x-\sqrt{x^3}$; г) $y=2x-\arcsin x$.

Упражнение 154. Исследуйте функции и постройте их графики: а) $y=x-2\,\mathrm{arctg}\,x$; б) $y=\frac{\ln x}{x}$; в) $y=\frac{e^x}{(x-1)^2}$.

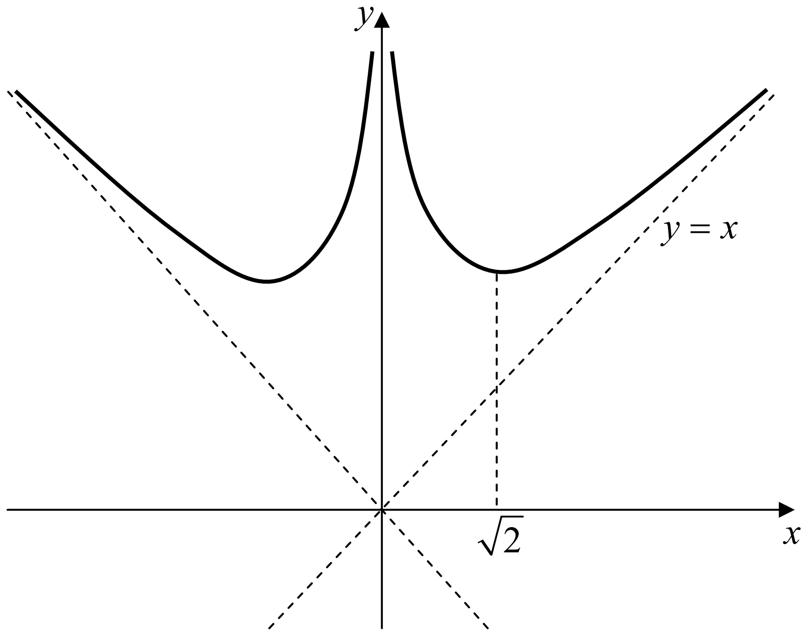

Рис. 56

Упражнение 155. Исследуйте функции и постройте их графики: а) $y = x^5 + 2x^3 + x$; б) $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$; в) $y = \sin x - \sin^2 x$.

Дополнительные упражнения к разделу III

Упражнение 156. При каких значениях a функция $y = \frac{x^3}{3} - 2ax^2 + x - 2$ возрастает на всей числовой оси?

Упражнение 157. При каких значениях a функция $y = e^x\left(x^2 + ax + 3\right)$ возрастает на всей числовой оси?

Упражнение 158. При каких значениях a функция $y = 4\sin\frac{x}{2} + \left(1 - 2a\right)x$ убывает на всей числовой оси?

Упражнение 159. Для функции, заданной графиком (рис. 57), определите:

а) интервалы монотонности и точки экстремума;

б) критические точки (производная равна нулю или не существует);

в) наибольшее и наименьшее значения.

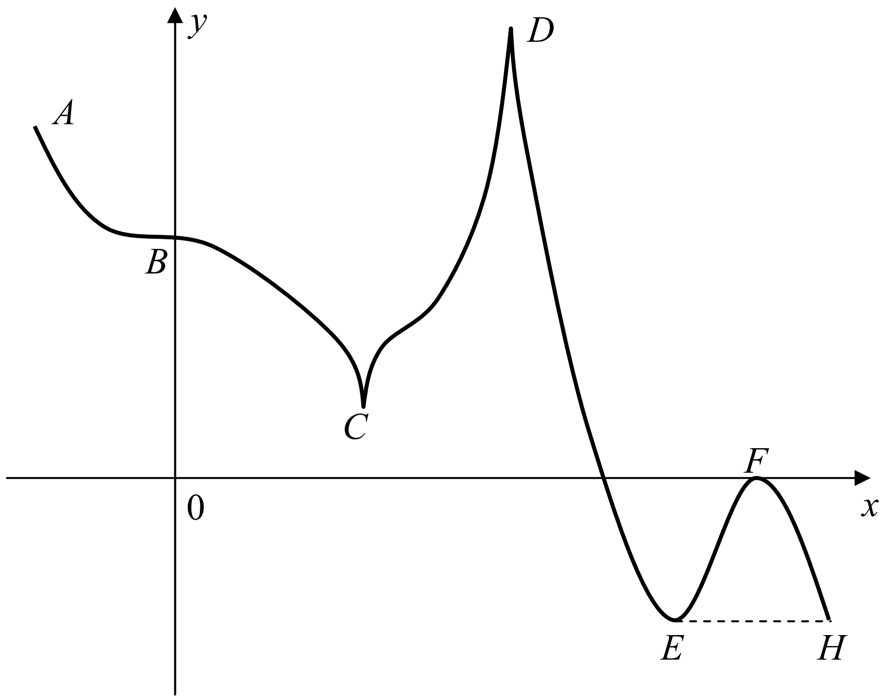

Рис. 57

Упражнение 160. Найдите промежутки монотонности и экстремумы функций: а) $y = 2\ln x - x^2$; б) $y = 3\sqrt[3]{x} - x^2$; в) $y = 2\sin x + \cos 2x$.

Упражнение 161. Найдите промежутки монотонности и экстремумы функций: а) $y = \frac{-x^2 + 6x - 13}{x - 3}$; б) $y = \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{x},\ x < 1, \\ x^2 - 2x,\ x \geq 1. \end{array}\right.$.

Упражнение 162. Найдите наибольшее и наименьшее значения функций на заданном промежутке:

а) $f(x)=\dfrac{4\left(x^2+3\right)}{x^2-2x+5}$, $x\in[-3;3]$; б) $f(x)=\sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$, $x\in[1;5]$;

в) $f(x)=\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{x}$, $x\in\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{3}\right]$.

Упражнение 163. Две капли с начальными массами m_1 и m_2 падает с некоторой высоты, равномерно испаряясь (коэффициент пропорциональности k одинаков для обеих капель). В какой момент времени суммарная кинетическая энергия капель минимальна?

Упражнение 164. В концах отрезка длины l расположены два источника света I_1 и I_2. Найдите на отрезке наименее освещенную точку. (Освещенность точки обратно пропорциональна квадрату ее расстояния от источника света.)

Упражнение 165. Через точку $P(1;4)$ проведите прямую так, чтобы: а) сумма длин положительных отрезков, отсекаемых ею от координатных осей, была минимальной; б) площадь треугольника, образованного ею с положительными полуосями координат, была минимальной.

Упражнение 166. По двум взаимно перпендикулярным улицам движутся к перекрестку два автомобиля со скоростями v_1 и v_2 (км/ч). В некоторый начальный момент времени машины находятся на расстоянии соответственно a_1 и a_2 км от перекрестка. В какой момент времени расстояние между автомобилями будет минимальным?

Упражнение 167. Найдите наибольший член последовательности $u_n=\dfrac{n^2}{n^3+500}$.

Упражнение 168. Найдите интервалы выпуклости и точки перегиба графиков функций: а) $f(x)=x^2+\sqrt{1+x}$; б) $f(x)=x^2(\ln x-1)$; в) $f(x)=x\sin(\ln x)$.

Упражнение 169. Найдите асимптоты графиков функций: а) $f(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{2x+1}{x^2-2}$; б) $f(x)=\dfrac{3x}{2}\ln\left(e-\dfrac{1}{3x}\right)$; в) $f(x)=3\sqrt{x^2+9}$.

Упражнение 170. Проведите полное исследование и постройте графики функций: а) $y=\dfrac{1-x^3}{x^2}$; б) $y=x+\ln\left(x^2-1\right)$; в) $y=2x-1+\dfrac{1}{x+2}$; г) $y=\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}$;

д) $y=\arcsin x-2x$; е) $y=3\sqrt[3]{x^2}-2x$; ж) $y=\sqrt{1-e^{-x^2}}$; з) $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$;

и) $y=\sin x\sin 3x$ (без точек перегиба).

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. Понятие производной. Техника дифференцирования
1.1. Начальные сведения о производной ... 3
1.2. Геометрический смысл производной. Касательная и нормаль к плоской линии ... 7
1.3. Производные основных элементарных функций. Простейшие правила дифференцирования ... 12
1.4. Дифференцирование сложной функции ... 18
1.5. Дифференцирование неявной функции ... 22
1.6. Производная функции, заданной параметрически ... 27
1.7. Дифференциал, его геометрический смысл и применение в приближенных вычислениях ... 30
1.8. Производные и дифференциалы высших порядков ... 34
1.9. Повторное дифференцирование неявной функции и функции, заданной параметрически ... 37
Дополнительные упражнения к разделу I ... 40
II. Основные теоремы и формулы дифференциального исчисления
2.1. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши ... 42
2.2. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя ... 49
2.3. Формула Тейлора для многочлена ... 55
2.4. Биномиальная теорема Ньютона (формула бинома Ньютона) ... 57
2.5. Формула Тейлора для функции $f(x)$ ... 59
Дополнительные упражнения к разделу II ... 64
III. Экстремумы. Наибольшее и наименьшее значения. Исследование функции
3.1. Условия монотонности функции. Экстремумы. Необходимый признак экстремума. Первый достаточный признак экстремума ... 65
3.2. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке ... 72
3.3. Решение текстовых задач на отыскание наибольших (или наименьших) значений функции ... 76
3.4. Применение второй производной ... 82
3.5. Асимптоты графика функции ... 88
3.6. Исследование функций. Построение графиков ... 94
Дополнительные упражнения к разделу III ... 105

Электронное издание

Вадим Анатольевич Могильницкий,
Светлана Александровна Шунайлова

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Учебное пособие

Издательский центр Южно-Уральского государственного
университета

Подписано в печать 01.06.2011. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 6,28. Заказ 206.
