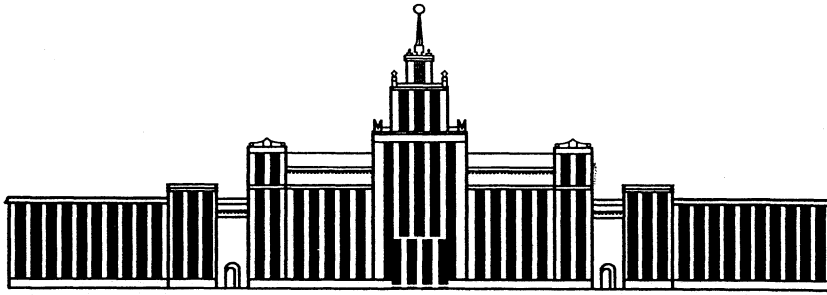
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ



ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

51(07)
Ф947

Н.А. Евдокимова, Н.А. Антропова,
Е.А. Богонос, О.В. Ястребинская

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие для студентов
энергетического факультета

Челябинск
2009

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра «Математический анализ»

51(07)
Ф947

Н.А. Евдокимова, Н.А. Антропова,
Е.А. Богонос, О.В. Ястребинская

Функции нескольких переменных

Учебное пособие для студентов
энергетического факультета

Под редакцией Л.Д. Менихеса

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2009

УДК 510(022)(075.8)
Ф947

Одобрено учебно-методической комиссией механико-математического факультета

Рецензенты:
кафедра математического анализа ЧГПУ
(зав. кафедрой к.ф.-м.н. Макаров А.С.),
д.ф.-м. н, проф. В.И. Ухоботов.

Функции нескольких переменных: учебное пособие для студентов
Ф947 энергетического факультета / Н.А. Евдокимова, Н.А. Антропова, Е.А. Богонос, О.В. Ястребинская: под редакцией Л.Д. Менихеса. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2009. – 68 с.

Учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов энергетического факультета при изучении такого раздела высшей математики, как «Функции нескольких переменных».

В нем в сжатой форме приведены определения, теоремы, утверждения и доказательства, которые должен знать студент, проиллюстрированные примерами к ним. Кроме того, имеются типовые задания по данной теме по 25 вариантов к каждой задаче. Авторы выражают глубокую благодарность профессору Л.Д. Менихесу за полезные замечания и советы во время подготовки учебного пособия к изданию.

УДК 510(022)(075.8)

ВВЕДЕНИЕ

Многие физические законы, которым подчиняются те или иные явления, описываются с использованием функций нескольких переменных, отражающих определенную зависимость между какими-то величинами. Часто речь идет о соотношении между величинами, изменяющимися с течением времени.

Поэтому, прежде чем приступать к изучению явлений и состалением математических моделей, необходимо определиться с математическим аппаратом, используемым при этом.

Большое значение, которое имеют функции нескольких переменных для математики и для ее приложений, объясняются тем, что все изучаемые процессы и явления человеческой жизнедеятельности (например, таких, как биология, экономика, электротехника и многих других) описываются с их помощью.

1. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Прежде чем перейти к изучению функций нескольких переменных, ознакомимся с некоторыми свойствами множеств, на которых эти функции задаются.

Упорядоченная совокупность n действительных чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется точкой n-мерного пространства, а сами числа $x_1, x_2, ..., x_n$ – координатами этой точки. Расстояние между двумя точками $M_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $M_2(x_1', x_2', ..., x_n')$ определяется следующим образом:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{\left(x_1 - x_1'\right)^2 + \left(x_2 - x_2'\right)^2 + ... + \left(x_n - x_n'\right)^2} \qquad (1)$$

Совокупность точек n-мерного пространства, для которых определено расстояние согласно формуле (1), называется <u>n-мерным</u> пространством и обозначается R^n.

В случае $n = 1$ пространство R^n совпадает с прямой, обозначается R.

В случае $n = 2$ – R^2 – плоскостью.

В случае $n = 3$ – R^3 – пространство.

Расстояние между точками обладает следующими свойствами:

1. Неотрицательность: $\rho(M_1, M_2) \geq 0$, причем $\rho(M_1, M_2) = 0 \Leftrightarrow M_1 = M_2$;
2. Симметричность: $\rho(M_1, M_2) = \rho(M_2, M_1)$;
3. Неравенство треугольника: $\rho(M_1, M_2) \leq \rho(M_1, M_3) + \rho(M_3, M_2)$.

Окрестностью точки M радиуса ε называется множество точек пространства, удаленных от точки M на расстояние меньше ε, запись $U(M, \varepsilon) = \left\{M \in R^n : \rho(M, \varepsilon) < \varepsilon\right\}$.

Точка M называется <u>внутренней</u> точкой множества Ω, если некоторая окрестность этой точки полностью содержится во множестве Ω. Множество Ω называется <u>открытым</u>, если оно содержит только внутренние точки.

Точка M называется точкой <u>прикосновения</u> множества Ω, если любая окрестность этой точки содержит по крайней мере одну точку из Ω.

Если у точки M из Ω существует окрестность, не содержащая никаких других точек множества Ω, кроме самой точки M, то эта точка называется <u>изолированной</u> точкой множества Ω.

Точка $M \in R^n$ называется <u>предельной</u> точкой множества Ω, если любая окрестность точки M содержит, по крайней мере, одну точку множества Ω, отличную от M.

Точка M называется <u>граничной</u> точкой множества Ω, если любая окрестность этой точки содержит точки, принадлежащие множеству Ω, и точки, не принадлежащие множеству Ω. Множество всех граничных точек множества Ω называется <u>границей</u> множества; обозначение границы – $\partial\Omega$.

Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои точки прикосновения.

Множество Ω называется ограниченным, если существует такое число C, что расстояние между любыми двумя точками множества Ω меньше, чем C; если такого числа нет, то множество называется неограниченным. Множество Ω называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя своими точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки. При этом отрезком $[M_1, M_2]$ называется множество всех точек M, представимых в виде $[M_1, M_2] = \{(1-t)M_1 + tM_2 : t \in [0;1]\}$. Множество Ω называется связным множеством, если любые его точки можно соединить непрерывной кривой линией в Ω.

Областью называется открытое связное множество. Замкнутая область – это область с присоединенной границей. Для характеристики области вводится понятие связности. Область называется односвязной, если любая замкнутая линия области может быть стянута в точку в этой области. Область, не являющаяся односвязной, называется многосвязной.

2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Понятие функции нескольких переменных

Пусть задано некоторое множество $\Omega \subset R^n$. Если каждой точке $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$ этого множества с помощью определенного закона ставится в соответствие единственное значение некоторой величины $u \in U \subset R$, то величина u называется функцией $n\,(n>1)$ переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Записывается $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ или $u = f(M)$.

В случае $n=2$ вместо $f(x_1, x_2)$ будем писать также $f(x, y)$, в случае $n=3$ вместо $f(x_1, x_2, x_3)$ – также $f(x, y, z)$.

При этом множество Ω называется областью определения функции u, а множество таких u, что $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – областью значений функции u.

Каждой функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ соответствует ее график в $(n+1)$-мерном пространстве точек $(x_1, x_2, ..., x_n, u)$. Определим это понятие для рассматриваемого здесь случая.

Определение 1. Пусть на множестве Ω пространства R^n определена функция $u = f(\mathrm{M})$, и пусть R^{n+1} – $(n+1)$-мерное пространство точек $(x_1, x_2, ..., x_n, \mathrm{u}) = (M, u)$. Множество точек пространства R^{n+1} вида $(M, f(M)) = (x_1, x_2, ..., x_n, f(M))$, где $M \in \Omega$, называется графиком функции f.

График функции нескольких переменных, так же как и график функции одной переменной, удобно использовать для геометрической интерпретации вводимых понятий и доказываемых утверждений.

Например, график функции $z = f(x, y)$, может быть изображен следующим образом (рис. 1)

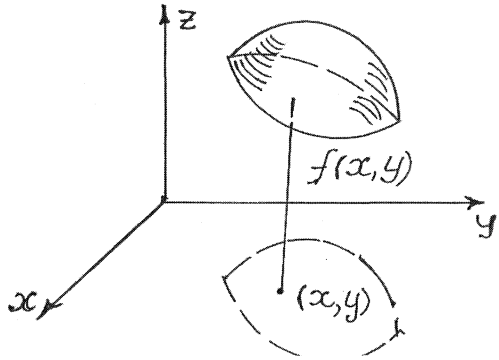


Рис. 1

Пусть по-прежнему функция f определена на множестве $\Omega \subset R^n$. Множество точек $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ пространства R^n, удовлетворяющих уравнению $f(x_1, x_2, ..., x_n) = c$, где c – некоторая постоянная, называется <u>множеством уровня</u> функции f, соответствующим данному значению c.

В случае $n = 2$ множество уровня называется также <u>линией уровня</u>, в случае $n = 3$ – <u>поверхностью уровня</u>.

Предел функции

Определим понятие предела функции нескольких переменных.

Определение 2. Пусть точка M_0 является предельной точкой множества Ω содержащегося в области определения X_f функции f.

Число a называется <u>пределом функции</u> f по множеству Ω в точке M_0 (или, то же самое, при M, стремящемся к M_0), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой точки $M \in \Omega$, $M \neq M_0$, $\rho(M_0, M) < \delta$, выполняется неравенство $|f(M) - a| < \varepsilon$.

В этом случае будем писать $\lim\limits_{\substack{M \to M_0, \\ M \in \Omega}} f(M) = a$. Иногда наряду с этим обозначением применяется равносильное обозначение $\lim\limits_{\substack{\rho(M, M_0) \to 0, \\ M \in \Omega}} f(x) = a$.

Теорема об арифметических операциях над функциями, имеющими предел, формулируется и доказывается аналогично соответствующей теореме для функций одной переменной.

Теорема. Пусть функции $f(M)$ и $g(M)$ заданы на множестве $\Omega \subset R^n$, и существуют пределы:

$$\lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in \Omega}} f(M) = b, \ \lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in \Omega}} g(M) = c.$$

Тогда существуют пределы:

$$\lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in \Omega}} \left(f(M) \pm g(M) \right) = b \pm c,$$

$$\lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in \Omega}} \left(f(M) \cdot g(M) \right) = b \cdot c,$$

$$\lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in \Omega}} \left(\frac{f(M)}{g(M)} \right) = \frac{b}{c} \ (\text{ если } c \neq 0).$$

Определение 3. Функция $f(M)$ называется <u>бесконечно малой</u> в точке $M_0 \in R^n$, если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = 0$.

3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть функция $f(M)$ задана на множестве $\Omega \subset R^n$ и точка M_0 является предельной точкой множества Ω.

Определение 1 (формальное). Функция $f(M)$ называется <u>непрерывной в точке</u> M_0, если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Уточним это формальное определение.

Определение $1'$. Функция $f(M)$ непрерывна в точке M_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой точки $M \in \Omega$, для которой $\rho(M, M_0) < \delta$, выполнено неравенство $\left| f(M) - f(M_0) \right| < \varepsilon$.

Или $\lim\limits_{M \to M_0} \left| f(M) - f(M_0) \right| = 0$.

Определение 2. Функция $f(M)$, определенная на множестве Ω, называется непрерывной на этом множестве, если она непрерывна в каждой точке $M \in \Omega$.

Обозначим $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0, ..., \Delta x_n = x_n - x_n^0$ – <u>приращения аргументов</u>, где $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$ и $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in \Omega$, Тогда следующую величину:

$$\Delta f(M) = f(M) - f(M_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, ..., x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$$

будем называть (полным) приращением функции $f(M)$ в точке M_0.

Отметим, что функция $f(M)$ непрерывна в точке M_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{M\to M_0} \Delta f(M)=0$.

Определение 3. Обозначим через

$$\Delta_k f(M)=f\left(x_1^0,\dots,x_{k-1}^0,x_k^0+\Delta x_k,x_{k+1}^0,\dots,x_n^0\right)-f\left(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0\right)$$

частное приращение функции $f(M)$ в точке M_0, соответствующее приращению аргумента Δx_k. Функция $f(M)$ называется непрерывной в точке M_0 по переменной x_k, если $\lim\limits_{\Delta x_k\to 0} \Delta_k f(M)=0$.

Замечание. Если функция непрерывна в некоторой точке, то она, очевидно, непрерывна в этой точке по каждой из переменных. Обратно, вообще говоря, неверно. Приведем соответствующий пример.

Пример 1. Пусть $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 1, & x^2+y^2=0\end{cases}$.

Тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(0+\Delta x,0)-f(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2}-1\right)=0.$$

Значит, функция $f(x,y)$ непрерывна по x в точке $(0,0)$. Аналогично доказывается непрерывность по y в точке $(0,0)$. Однако $f(x,y)$ не является непрерывной в начале координат; пусть $x_m=\dfrac{1}{m}, y_m=\dfrac{1}{m}$, тогда $f(x_m,y_m)\equiv 0$. Но

$$\lim_{M\to M_0}\left|f\left(\frac{1}{m};\frac{1}{m}\right)-f(0;0)\right|=1\neq 0.$$

Т.е. функция $f(x,y)$ не стремится при $m\to\infty$ к $f(0;0)=1$ и не является непрерывной в точке $(0,0)$ по совокупности аргументов (т.к. не выполняется определение).

Теорема 1. Пусть функции $f(M)$ и $g(M)$ определены на множестве $\Omega\subset R^n$. Если $f(M)$ и $g(M)$ непрерывны в точке $M_0\in\Omega$, то функции $f(M)\pm g(M)$, $f(M)\cdot g(M)$, $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ (при $g(M_0)\neq 0$) также непрерывны в точке M_0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1 следует из определения непрерывности функции в точке и теоремы об арифметических операциях над функциями, имеющих предел.

4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть, как и выше, $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, $f(M)$ – некоторая функция, и точка $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in \Omega$ внутренняя точка ее области определения; $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0, ..., \Delta x_n = x_n - x_n^0$, $\Delta x = M_0 M = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n)$.

Определение 1. Частной производной по переменной x_k функции $f(M)$ в точке M_0 называется предел $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{\Delta_k f}{\Delta x_k}$.

Обозначается частная производная по переменной x_k через $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(M_0)$, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f\left(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, ..., x_n^0\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_k^0, ..., x_n^0\right)}{\Delta x_k}.$$

Часто вместо $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(M_0)$ применяют обозначение $f'_{x_k}(M_0)$.

Заметим, что частная производная – это обычная производная функции одной переменной, которая получается из функции $f(M)$, если зафиксировать и считать постоянными все её переменные, кроме x_k. А поскольку из дифференцируемости функции одной переменной следует её непрерывность (в данной точке), то отсюда сразу следует, что если существует частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(M_0)$, то функция $f(M)$ непрерывна в точке M_0 по переменной x_k.

Пример 1. Для функции $f(\mathrm{x,y,z}) = x^{\frac{y}{z}}$ частные производные в точке (x, y, z) (при $x > 0, z \neq 0$) следующие:

$$f'_x = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{x} - 1}, \; f'_y = \frac{1}{z} x^{\frac{y}{x}} \ln x, \; f'_z = y x^{\frac{y}{x}} \left(-\frac{1}{z^2}\right) \ln x.$$

Определение 2. Говорят, функция $f(M)$ дифференцируема в точке M_0, если существует такая окрестность $U = U(M_0)$ в точке M_0, что для любого $x \in U(M_0)$ приращение $\Delta f = f(M) - f(M_0)$ имеет вид:

$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + ... + A_n \Delta x_n + \overline{o}(\rho), \; \rho \to 0, \qquad (1)$$

где $A_1, ..., A_n$ фиксированные числа, не зависящие от приращения переменных $\Delta x_1, ..., \Delta x_n$, $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + ... + (\Delta x_n)^2}$.

$$\bar{o}(\rho)=\frac{\bar{o}(\rho)}{\rho}\cdot\frac{(\Delta x_1)^2+...+(\Delta x_n)^2}{\rho}=\frac{\bar{o}(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_1}{\rho}\Delta x_1+...+\frac{\bar{o}(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_n}{\rho}\Delta x_n.$$

Поскольку $\left|\frac{\Delta x_k}{\rho}\right|\le 1$, а величина $\frac{\bar{o}(\rho)}{\rho}$ бесконечно мала при $\rho\to 0$, то обозначив $\alpha_k=\frac{\bar{o}(\rho)\Delta x_1}{\rho^2}$, $k=1,2,...,n$, получаем: $\bar{o}=\alpha_1\cdot\Delta x_1+...+\alpha_n\cdot\Delta x_n$, где $\alpha_1,...,\alpha_n$ бесконечно малые при $\rho\to 0$.

Это позволяет получить следующее представление приращения дифференцируемой функции:

$$\Delta f=A_1\Delta x_1+...A_n\Delta x_n+\alpha_1\Delta x_1+...+\alpha_n\Delta x_n=(A,\Delta x)+(\alpha,\Delta x). \qquad (2)$$

Здесь в скалярных произведениях участвуют n-векторы $A=(A_1,...,A_n)$, $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$, $\Delta x=(\Delta x_1,...,\Delta x_n)$. При этом выражение $A_1\Delta x_1+...A_n\Delta x_n=(A,\Delta x)$ есть главная, линейная относительно приращений переменных, часть приращения функции Δf.

Определение 3. Дифференциалом (полным дифференциалом) функции $f(M)$ в точке M_0 (соответствующим вектору Δx приращения переменных) называется главная, линейная относительно приращений переменных, часть приращения функции: $df(M_0;\Delta x)=A_1\Delta x_1+...A_n\Delta x_n$, где константы $A_1,...,A_n$ определены из равенства (1). Из следующей теоремы можно понять, что же представляют собой константы $A_1,...,A_n$.

Теорема 1. (Необходимое условие дифференцируемости функции). Если функция $f(M)$ дифференцируема в точке M_0, то в этой точке существуют её частные производные f'_k по всем переменным x_k, $k=1,2,...,n$, и верны равенства: $f'_k(M_o)=A_k$, $k=1,2,...,n$, где A_k – постоянные формулы (1).

Доказательство. Возьмём вектор приращения

$$\Delta x=\Delta_k x=(0,...,0,\Delta x_k,0,...,0),$$

т.е. переместимся от точки M_0 в некоторую точку M вдоль координатной оси x_k. Поскольку функция $f(M)$ дифференцируема в точке M_0, то её приращение (согласно (1)) в данном случае имеет вид

$$\Delta f=\Delta_k f=A_k\Delta x_k+\bar{o}(\rho),\ \rho=|\Delta x_k|.$$

Следовательно, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0)=\lim\limits_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta_k f}{\Delta x_k}=A_k$, что показывает однозначность определения констант $A_1,...,A_n$ и завершает доказательство теоремы.

Следствие. Если функция $f(M)$ дифференцируема в точке M_0, то при достаточно малом ρ приращение функции имеет вид:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)\cdot\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)\cdot\Delta x_n + \bar{o}(\rho). \qquad (3)$$

Из теоремы 1 формулы (3) вытекает также, что для дифференцируемой функции можно определить дифференциал как главную, линейную относительно приращений переменных, часть приращения функции, задаваемой равенством:

$$df(M_0;\Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)\cdot\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)\cdot\Delta x_n. \qquad (4)$$

Теорема 2. Если функция $f(M)$ дифференцируема в точке M_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Используя представление (3) и неравенства: $|\Delta x_k| \le \rho$, $k = 1,2,\ldots,n$, получаем, что

$$|\Delta f| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)\cdot\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)\cdot\Delta x_n + \bar{o}(\rho)\right| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)\cdot\Delta x_1\right| + \ldots +$$

$$+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)\cdot\Delta x_n\right| + |\bar{o}(\rho)| \le \left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0)\right|\right)\cdot\rho + |\bar{o}(\rho)|.$$

Отсюда ясно, что $\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta f = 0$. Это и означает непрерывность функции $f(M)$ в данной точке M_0. Что и требовалось доказать.

Теорема 3. (Достаточное условие дифференцируемости функции). Если функция $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет все частные производные в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и все они непрерывны в самой точке M_0, то $f(M)$ дифференцируема в точке M_0.

Доказательство. Приведем рассуждения для случая $n = 2$. В общем случае доказательство приводится совершенно аналогично. Итак, пусть задана функция $f(x,y)$, удовлетворяющая условиям теоремы в точке $(x_0;y_0)$. Рассмотрим её приращение $\Delta f = f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) - f(x_0;y_0) =$

$$= \left[f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x; y_0)\right] + \left[f(x_0+\Delta x; y_0) - f(x_0;y_0)\right].$$

Применяя теорему Лагранжа к разностям в квадратных скобках, получаем: $\Delta f = f'_y(x_0+\Delta x; y_0+\Theta_1\Delta y)\Delta y + f'_x(x_0+\Theta_2\Delta x; y_0)\Delta x$, $\quad 0<\Theta_1<1$, $0<\Theta_2<1$.

Далее, в силу непрерывных частных производных в точке $(x_0;y_0)$, имеем следующие равенства:

$$f'_y(x_0+\Delta x; y_0+\Theta_1\Delta y) = f'_y(x_0;y_0) + \alpha, \quad f'_x(x_0+\Theta_2\Delta x; y_0) = f'_x(x_0;y_0) + \beta,$$

где α, β стремятся к нулю при $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$. Поэтому

$$\Delta f=\left[f'_y(x_0;y_0)+\alpha\right]\Delta y+\left[f'_x(x_0;y_0)+\beta\right]\Delta x=$$
$$=f'_y(x_0;y_0)\Delta y+f'_x(x_0;y_0)\Delta x+\alpha\Delta y+\beta\Delta x.$$

Поскольку

$$\frac{|\alpha\Delta y+\beta\Delta x|}{\rho}\le\frac{|\alpha\Delta y|+|\beta\Delta x|}{\rho}\le|\alpha|+|\beta|\to 0 \text{ при } \rho\to 0,$$

то есть $\alpha\Delta y+\beta\Delta x=\overline{o}(\rho)$. Это и означает дифференцируемость функции $f(x,y)$ в точке $(x_0;y_0)$. Теорема доказана.

Замечание. Мы рассмотрели необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции. Поскольку для независимых переменных x_k, $k=1,2,...,n$, верны равенства: $\Delta x_k=dx_k$, то дифференциал функции $f(M)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ от n независимых переменных в точке M можно представить в виде:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}(M)\cdot dx_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(M)\cdot dx_n. \qquad (5)$$

Дифференцируемость сложной функции. Полная производная

Пусть $F(t)=f(\varphi(t))$ сложная функция, где $f(M)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ и $x_i(t)=\varphi_i(t_1,...,t_k)$, $i=1,2,...,n$.

Теорема 4. Пусть функции $\varphi_i(t)=\varphi_i(t_1,...,t_k)$, $i=1,2,...,n$ – дифференцируемы в точке $t_0=(t_1^0,...,t_n^0)$ и функция $f(M)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ дифференцируема в точке $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$, где $x_i^0=\varphi_i(t_0)$, $i=1,2,...,n$. Тогда сложная функция $F(t)=f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке $t_0=(t_1^0,...,t_n^0)$.

Доказательство. Рассмотрим приращение:

$$\Delta F=F(t)-F(t_0)=f(x(t))-f(x(t_0))=f'_{x_1}\Delta x_1+...+f'_{x_n}\Delta x_n+\overline{o}(\Delta x). \qquad (6)$$

В силу дифференцируемости функций $x_i=\varphi_i(t)=\varphi_i(t_1,...,t_k)$, $i=1,2,...,n$ приращения Δx_i имеют вид:

$$\Delta x_i=\varphi_i(t)-\varphi_i(t_0)=(\varphi_i)'_{t_1}\cdot\Delta t_1+...+(\varphi_i)'_{t_k}\cdot\Delta t_k+\overline{o}_i(\Delta t),\quad i=1,2,...,n. \qquad (7)$$

Подставляя выражения (7) в (6), получаем:

$$\Delta F=\left(\sum_{i=1}^{n}f'_{x_i}\cdot(x_i)'_{t_1}\right)\cdot\Delta t_1+...+\left(\sum_{i=1}^{n}f'_{x_i}\cdot(x_i)'_{t_k}\right)\cdot\Delta t_k+\sum_{i=1}^{n}f'_{x_i}\cdot\overline{o}(\Delta t)+\overline{o}(\Delta x). \qquad (8)$$

Далее, поскольку в (7) $\overline{o}(\Delta x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta x_i$ (см. формулу (2)), то с учетом (7), имеем: $\overline{o}(\Delta x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta x_i=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot(\varphi_i)'_{t_1}\right)\Delta t_1+\ldots$.

$$\ldots+\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot(\varphi_i)'_{t_k}\right)\Delta t_k+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\overline{o}_i(\Delta t)=\overline{o}(\Delta t) \qquad (9)$$

Последнее равенство в (9) следует из того, что $|\Delta t_j|\le|\Delta t|$, $j=1,2,\ldots,k$, и, кроме того, $\alpha_i\to 0$ при $|\Delta t|\to 0$. (Действительно, из условия $|\Delta t|\to 0$ в силу дифференцируемости, а значит, и непрерывности, функций $x_i=\varphi_i(t)$ следует, что $|\Delta x|\to 0$, а следовательно, и $\alpha_i\to 0$).

Итак, из (9) и (8), учитывая также, что $\Delta t_j=dt_j$, $j=1,2,\ldots,k$, получаем:

$$\Delta F=\left(\sum_{i=1}^{n}f'_{x_i}\cdot(x_i)'_{t_1}\right)\cdot dt_1+\ldots+\left(\sum_{i=1}^{n}f'_{x_i}\cdot(x_i)'_{t_k}\right)\cdot dt_k+\overline{o}(\Delta t), \qquad (10)$$

Что и означает дифференцируемость данной сложной функции $F(t)=f(\varphi(t))$ в точке $t_0=(t_1^0,\ldots,t_n^0)$. (Здесь все частные производные вычислены в заданных точках t_0,x_0 соответственно). Теорема доказана.

Замечания.

1) Из формулы (10) видно, что дифференциал функции $F(t)$ имеет вид:

$$dF=\left(\sum_{i=1}^{n}f'_{x_i}\cdot(x_i)'_{t_1}\right)\cdot\Delta t_1+\ldots+\left(\sum_{i=1}^{n}f'_{x_i}\cdot(x_i)'_{t_k}\right)\cdot\Delta t_k, \qquad (11)$$

А её частные производные вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}=\sum_{i=1}^{n}f'_{x_i}\cdot(x_i)'_{t_j},\ j=1,2,\ldots,k.$$

В частности, если t скаляр, т. е, если функции одного аргумента t $\varphi_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$, дифференцируемы в точке t_0. И функция $f(M)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ дифференцируема в точке $M_0(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$, где $x_i^0=\varphi_i(t_0)$, $i=1,2,\ldots,n$. Тогда сложная функция $F(t)=f(\varphi(t))$ является функцией только одного переменного t, дифференцируемой в точке t_0. Поэтому можно ставить вопрос о нахождении производной $\frac{dF}{dt}$. Эта производная ищется по формуле

$$\frac{dF}{dt}=\sum_{i=1}^{n}f'_{x_i}\cdot(x_i)'_t=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt}\right)$$

и носит название формулы для вычисления полной производной $\frac{dF}{dt}$.

Инвариантность формы записи первого дифференциала

Из теоремы 4 вытекает также следующий важный факт.

Утверждение 1. Первый дифференциал функции многих переменных имеет инвариантную форму записи:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n . \qquad (12)$$

Независимо от того, является ли эта функция простой (то есть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – независимые переменные) или сложной (то есть $x_i = \varphi_i(t) = \varphi_i(t_1, \ldots, t_k)$, $i = 1, 2, \ldots, n$). При этом смысл выражений dx_i различен. В первом случае, когда x_i – независимые переменные, $dx_i = \Delta x_i$ – фиксированные приращения переменных; во втором случае $dx_i = d\varphi_i(t)$ – это дифференциалы функций $x_i(t) = \varphi_i(t_1, \ldots, t_k)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Перегруппировав слагаемые в формуле (11), получим:

$$dF = df = f'_{x_1}\left[\sum_{j=1}^{k}(x_1)'_{t_j} \cdot \Delta t_j\right] + \ldots + f'_{x_n}\left[\sum_{j=1}^{k}(x_n)'_{t_j} \cdot \Delta t_j\right],$$

где выражения в квадратных скобках представляют собой дифференциалы функций $x_i(t) = \varphi_i(t_1, \ldots, t_k)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда сразу следует равенство (12). Утверждение доказано.

Инвариантная форма первого дифференциала позволяет установить следующие правила для вычисления, которые нетрудно проверить самостоятельно:

1) $d(c \cdot f) = c \cdot df$, $c \in R$;

2) $d(f \pm g) = df \pm dg$;

3) $d(f \cdot g) = d(f) \cdot g + f \cdot d(g)$;

4) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{d(f) \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$, $g \neq 0$.

Проверьте эти равенства самостоятельно.

5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Так же как производная и дифференциал функции одной переменной связаны с касательной к линии – графику функции, так и частные

производные и полный дифференциал функции двух переменных связаны с касательной плоскостью к поверхности – графику функции.

Пусть функция $z=\varphi(x,y)$ дифференцируема при $x=x_0, y=y_0$. Рассмотрим сечение поверхности S, изображающей эту функцию, плоскостями $y=y_0$ и $x=x_0$ (рис. 2). К полученным плоским линиям на поверхности проведем касательные M_0T_x и M_0T_y в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Эти две пересекающиеся в точке M_0 прямые определяют плоскость T, которая называется касательной плоскостью к поверхности S в точке M_0. Точку M_0 называют точкой касания плоскости T с поверхностью S.

Найдем уравнение касательной плоскости. Прямая M_0T_x лежит в плоскости $y=y_0$, параллельной плоскости Oxz, причем ее угловой коэффициент относительно оси Ox равен $f'_x(x_0,y_0)$.

Поэтому уравнениями прямой M_0T_x являются

$$\begin{cases} z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0), \\ y=y_0, \end{cases}.$$

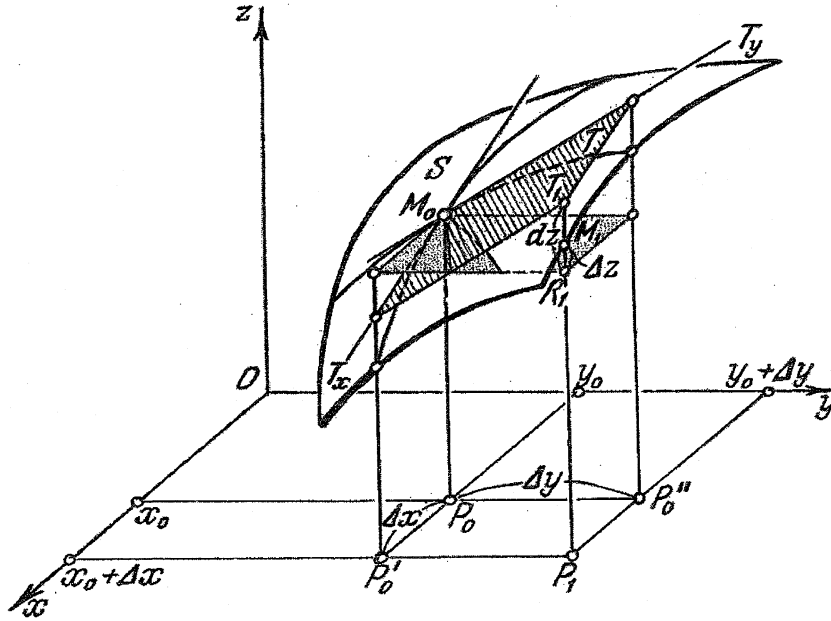


Рис. 2

Подобным же образом находим уравнение прямой M_0T_y:

$$z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),\ x = x_0.$$

Так как плоскость проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то ее уравнение можно записать в форме

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)\ .$$

Прямые M_0T_x и M_0T_y лежат в плоскости T, значит, координаты точек, лежащих на этих прямых, должны удовлетворять уравнению плоскости. Подставляя в это последнее выражение для $z - z_0$ и $y - y_0$ из уравнений прямой M_0T_x, получим

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) = A(x - x_0),$$

откуда $A = f'_x(x_0, y_0)$. Точно также найдем, что $B = f'_y(x_0, y_0)$. Следовательно, искомое уравнение касательной плоскости есть

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)\ . \qquad (13)$$

Позже, в п. 10, будет доказано, что касательная, проведенная в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к любой линии на поверхности S, проходящей через эту точку, лежит в касательной плоскости (13).

Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных вытекает из следующего предложения.

Теорема. Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ при $y = y_0$, $x = x_0$ изображается приращением аппликаты точки касательной плоскости, проведенной к поверхности $z = f(x, y)$ в ее точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Доказательство. Правая часть уравнения касательной плоскости (13) является выражением для полного дифференциала функции $z = f(x, y)$. Поэтому уравнение касательной плоскости можно придать вид $z - z_0 = (dz)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$; здесь z_0 – аппликата точки касания, z – текущая аппликата точки плоскости, а $(dz)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ – полный дифференциал функции $z = f(x, y)$, вычисленный при $y = y_0$, $x = x_0$.

Когда x получает приращение Δx, а y – приращение Δy (см. рис. 2) функция получает приращение Δz, которое представляется отрезком R_1M_1 – приращением аппликаты точки поверхности S, а дифференциал dz отрезком R_1T_1 – приращением аппликаты точки касательной плоскости T.

Отклонение полного дифференциала от приращения функции, т.е. разность $(dz-\Delta z)$, изображается отрезком M_1T_1, заключенным между поверхностью S и касательной плоскостью.

Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям

Мы видели, как применяется полный дифференциал функции одной переменной к приближенным вычислениям. Рассмотрим, как к решению аналогичных задач для функции многих переменных применяется полный дифференциал. Для простоты рассмотрим функцию двух переменных; все сказанное легко перенесется на функции большего числа переменных.

Исходным для дальнейшего является замена полного приращения функции ее полным дифференциалом, т.е. приближенное равенство

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\approx dz,$$

Справедливое при малых Δx и Δy. Заменив dz его выражением, придадим этому равенству вид

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

Если положить $x_0+\Delta x=x$, $y_0+\Delta y=y$, то это приближенное равенство можно записать так:

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0). \qquad (14)$$

Последняя формула показывает, что замена полного приращения ее полным дифференциалом привела к замене функции $f(x,y)$ в окрестности точки (x_0,y_0) <u>линейной функцией</u>. Геометрически это значит, что участок поверхности $z=f(x,y)$ заменяется соответствующим участком касательной плоскости к поверхности в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Формула (14) сразу позволяет по известным значениям $f(x_0,y_0)$, $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$ приближенно вычислять значения функции $f(x,y)$ при условии, что x мало отличается от x_0, а y от y_0.

Пример. Составить приближенную формулу для вычисления значений функции $z=\ln(xy+2y^2-2x)$ в окрестности точки $(1,1)$.

Решение.

Здесь $x_0=1$, $y_0=1$.

Последовательно вычисляем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{xy+2y^2-2x}(y-2), \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=-1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{xy+2y^2-2x}(x+4y), \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=5.$$

Так как $z_0=0$, то

$$z=\ln\left(xy+2y^2-2x\right)\approx-(x-1)+5(y-1).$$

6. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ ФУНКЦИИ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Градиент функции

Пусть функция $F(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, а кривая γ такова, что функции $x=x(t)$, $y=y(t)$, $a\le t\le b$, с помощью которых она задана в параметрической форме, удовлетворяют уравнению $F(x,y)=0$, т.е. посредством его осуществлено неявное задание кривой γ. Пусть $t_0\in[a,b]$, $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$, а функции $x(t)$, $y(t)$ дифференцируемы при $t=t_0$.

Дифференцируя при $t=t_0$ тождество $F\left(x(t),y(t)\right)=0$, $a\le t\le b$, получим

$$x_t'\frac{\partial F}{\partial x}+y_t'\frac{\partial F}{\partial y}=0,\ t=t_0.$$

Т.е. векторы $\left(x'(t_0),y'(t_0)\right)$ и $\left(\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\right)$ ортогональны.

Вектор $\vec{s}=\left(x_t',y_t'\right)$ в случае, когда он не равен нулю, как известно, является касательным вектором к кривой γ в точке $(x_0,y_0)=\left(x(t_0),y(t_0)\right)$.

Определение. Вектор

$$\left(\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\right)$$

называется <u>градиентом функции F</u> в точке $M_0(x_0,y_0)$ и обозначается через

$$gradF(x_0,y_0).$$

Т.о. градиент функции F ортогонален к кривой, неявно задаваемой уравнением $F(x,y)=0$. Прямая, перпендикулярная касательной к плоской кривой и лежащая в одной плоскости с ней, называется <u>нормалью</u> к данной кривой. Итак, градиент функции F коллинеарен нормали в соответствующей точке к кривой, задаваемой уравнением $F(x,y)=0$.

В случае дифференцируемой функции $f(M)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ её градиентом называется вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},...,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

Производная по направлению

Частные производные от функции являются производными «в направлении координатных осей». Естественно было бы определить и вычислить производную по любому фиксированному направлению. Рассмотрим это на примере функции трёх переменных.

Пусть функция f определена в δ-окрестности $U(M_0;\delta)$ точки $M_0 \in R^3$, пусть $M_1 \in U(M_0;\delta)$. Проведём через точки M_0 и M_1 прямую. За положительное направление на этой прямой возьмём направление вектора $\vec{l}=\overrightarrow{M_0M_1}$, т.е. направление от точки M_0 к точке M_1. Для всякой точки M этой прямой обозначим через M_0M ориентированную длину отрезка с началом в точке M_0 и концом в точке M, т.е. длину этого отрезка со знаком плюс, если вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ имеет тоже направление, что и вектор $\vec{l}$ и со знаком минус в противном случае.

Определение. Предел $\lim\limits_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{M_0M}$, если он существует, называется <u>производной</u> функции f в точке M_0 <u>по направлению</u> вектора $\vec{l}$ и обозначается $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$.

Пусть теперь в пространстве R^3 зафиксирована некоторая система координат x,y,z. Пусть $M_0=(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$, $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$, $\Delta z=z-z_0$ и $s=M_0M$. Найдём связь между координатами точки M и ориентированной длиной s отрезка M_0M. Пусть α, β и γ – углы, образованные вектором $\overrightarrow{M_0M_1}$ соответственно с осями Ox, Oy, Oz (рис. 3), тогда

$$x-x_0=s\cos\alpha,\ y-y_0=s\cos\beta,\ z-z_0=s\cos\gamma.$$

Вдоль прямой M_0M функция f является функцией одной переменной s, а именно

$$f(x,y,z)=f(x_0+s\cos\alpha,y_0+s\cos\beta,z_0+s\cos\gamma).$$

Производная этой функции по s (если она существует) и является <u>производной функции f в точке M_0 по направлению вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$</u>.

Заметим, что направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ через координаты точек $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ и $M(x_1,y_1,z_1)$ определяются

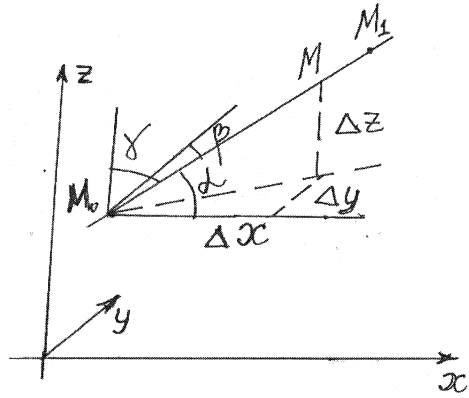


Рис. 3

следующим образом:

$$\cos\alpha = \frac{x_1 - x_0}{\rho},\ \cos\beta = \frac{y_1 - y_0}{\rho},\ \cos\gamma = \frac{z_1 - z_0}{\rho}, \tag{15}$$

$$\rho = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}.$$

Вычисляется производная по направлению по правилу дифференцирования сложной функции. Пусть функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и пусть

$$x = x_0 + s\cos\alpha,\ y = y_0 + s\cos\beta,\ z = z_0 + s\cos\gamma. \tag{16}$$

Согласно определению производной по направлению и формуле производной сложной функции имеем:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0 M} =$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + s\cos\alpha, y_0 + s\cos\beta, z_0 + s\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{s} =$$

$$= \left.\frac{df}{ds}\right|_{s=0} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds},$$

но из (16) следует, что

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha,\quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta,\quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma, \tag{17}$$

поэтому окончательно

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(M_0)}{\partial s}=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma. \quad (18)$$

Это и есть искомая формула. Таким образом, **доказана** следующая теорема.

Теорема. Пусть функция $f(x,y,z)$ дифференцируема в точке $M_0=(x_0,y_0,z_0)$. Тогда в этой точке функция f имеет производную по любому направлению и эта производная находится по формуле (18).

Следует отметить, что из полученной формулы сразу не видно, что эта производная не зависит от выбора системы координат. Эта независимость непосредственно следует из самого определения производной по направлению, откуда в свою очередь вытекает, что правая часть формулы (18) не зависит от выбора прямоугольной декартовой системы координат, а определяется только точками M_0 и M_1, или, что то же, точкой M_0 и вектором $\overrightarrow{M_0M_1}$.

Таким образом, если $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – координатные орты, то

$$grad\, f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}. \quad (19)$$

Часто оказывается удобным использование символического вектора Гамильтона

$$\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

называемого наблой. Набла является обозначением определенной операции, которую следует произвести над той или иной функцией. Для функции f, по определению, полагаем

$$\nabla f=\vec{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Формально это равенство можно рассматривать как «произведение» вектора ∇ на число f. Итак, $grad\, f$ и ∇f являются обозначением одного и того же выражения.

Пусть теперь вектор $\vec{l}$ единичный и, следовательно, $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. С помощью градиента формула для производной функции по направлению вектора $\vec{l}$ запишется следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\cos\alpha\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\cos\beta\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+\cos\gamma\cdot\frac{\partial f}{\partial z}=\vec{l}\cdot grad\, f, \quad (20)$$

где в правой части стоит скалярное произведение вектора $\vec{l}$ и $grad\, f$. Отсюда, $\vec{l}$ поскольку – единичный вектор,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = |grad\, f| \cos\varphi \text{ или } \frac{\partial f}{\partial l} = np_{\vec{l}}\, grad\, f$$

где φ – угол, образованный вектором $\vec{l}$ и $grad\, f$. Из этой формулой видно, что в случае, если в данной точке

$$|drad\, f|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \neq 0$$

то производная дифференцируемой функции по направлению достигает наибольшего значения в единственном направлении, а именно том, при котором $\cos\varphi = 1$, т.е. в направлении градиента. Из этого следует, что для заданной функции $f(M)$ градиент в каждой точке однозначно определяется самой функцией, а не зависит от выбора системы координат, как это могло бы сначала показаться из формулы (19).

Действительно, если градиент равен нулю в одной декартовой системе координат, то он равен нулю и в каждой другой подобной системе координат. В самом деле, равенство нулю в некоторой точке, согласно формуле (20), равносильно равенству нулю в этой точке производных по всем направлениям, последнее же не зависит от выбора декартовой системы координат, поскольку от этого выбора не зависит производная по направлению. Если же градиент не равен нулю, то его независимость от выбора декартовой системы координат следует непосредственно из доказанного выше его геометрического смысла: направление градиента показывает направление наибыстрейшего роста функции (оно единственно), а его величина равна производной в этом направлении.

Возьмем теперь любую непрерывно дифференцируемую кривую без особых точек, проходящую через точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, и такую, что вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ является её касательным вектором. Обозначим через s переменную длину дуги этой кривой, отсчитываемую от точки M_0 в таком направлении, чтобы вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ давал положительное направление на касательной. Если $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ – представление этой кривой, то

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha,\ \frac{dy}{ds} = \cos\beta,\ \frac{dz}{ds} = \cos\gamma$$

(см. 17). Поэтому, если взять производную в точке (x_0, y_0, z_0) от дифференцируемой функции $f(x, y, z)$ по данной кривой, т.е. при $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, иначе говоря, взять производную от функции

$f\left(x(s),y(s),z(s)\right)$ по s, то для этой производной будет справедлива формула (18). Это означает, что производная в некоторой точке от функции вдоль кривой, проходящей через указанную точку, совпадает с производной по направлению касательной к этой кривой в той же точке.

Всё сказанное переносится на случай любого числа n переменных ($n \geq 2$).

Замечание. Из того, что функция в некоторой точке имеет производные по всем направлениям, не следует, что функция в этой точке дифференцируема.

Пример. Функция $f(x,y)=\begin{cases} 0, если\, y \neq x^2, или\, x=y=0, \\ 1, если\, y=x^2, \quad x^2+y^2>0, \end{cases}$

имеет в точке $(0,0)$ по любому направлению производную, равную нулю. Однако, в точке $(0,0)$ функция f разрывна и, тем более, не дифференцируема (рис. 4).

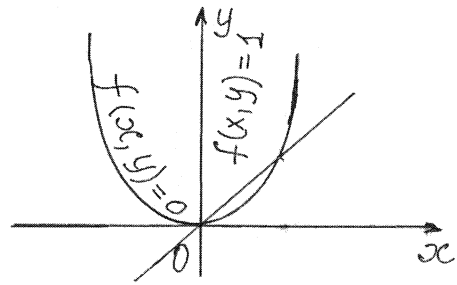


Рис. 4

7. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Частные производные высших порядков

Пусть задана функция $f(x,y)$. Тогда каждая из её частных производных (если они существуют) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, которые также называются частными производными первого порядка, снова является функцией независимых переменных x, y и может, следовательно, также иметь частные производные. Частная производная $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ обозначается через $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ или f''_{xx},

а $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ через $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ или f''_{xy}. Таким образом, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx}$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=f''_{xy}$,

и, аналогично, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=f''_{yx}$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy}$. Производные $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}$ называются частными производными второго порядка. Рассматривая частные производные от них, получим всевозможные частные производные третьего порядка: $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$ и т.д.

Аналогично определяются частные производные произвольного порядка и для функций любого числа переменных.

Определение. Частная производная (по любой из независимых переменных) от частной производной порядка $(m-1)$, $m=1,2,\ldots$, называется частной производной порядка m.

Частная производная, полученная дифференцированием по различным переменным, называется смешанной частной производной. Частная же производная, полученная дифференцированием только по одной переменной, называется чистой частной производной.

Число различных частных производных при увеличении m возрастает, однако оказывается, что при определённых предположениях многие из них совпадают, а именно смешанные частные производные по одним и тем же переменным не зависят от порядка дифференцирования.

Теорема 1. Пусть функция $f(x,y)$ определена вместе со своими частными производными $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), причем f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в этой точке, тогда

$$f''_{xy}(x_0, y_0)=f''_{yx}(x_0, y_0). \tag{21}$$

Доказательство. Пусть функция $f(x,y)$ определена вместе с производными $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ в δ-окрестности точки (x_0, y_0) и пусть Δx и Δy фиксированы так, что $(\Delta x)^2+(\Delta y)^2<\delta^2$. Пусть, как и раньше, Δ_x и соответственно Δ_y – приращения функции f по аргументу x, соответственно аргументу y, в точке (x_0, y_0). Введём обозначения $\Delta_{xy} f=\Delta_x(\Delta_y f)$, $\Delta_{yx} f=\Delta_y(\Delta_x f)$ и покажем, что

$$\Delta_{xy} f=\Delta_{yx} f. \tag{22}$$

Действительно,

$$\Delta_{xy}f=\Delta_x\left(\Delta_y f\right)=\Delta_x\left[f\left(x_0,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)\right]=$$

$$\left[f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0+\Delta x,y_0\right)\right]-\left[f\left(x_0,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)\right];\quad (23)$$

аналогично,

$$\Delta_{yx}f=\Delta_y\left(\Delta_x f\right)=$$

$$=\left[f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0+\Delta y\right)\right]-\left[f\left(x_0+\Delta x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)\right].\quad (24)$$

Сравнивая (24) и (23), убеждаемся в справедливости соотношения (22).

Положим теперь $\varphi(x)=\mathrm{f}\left(\mathrm{x},\mathrm{y}_0+\Delta y\right)-f\left(x,y_0\right)$, тогда (23) можно переписать в виде

$\Delta_{xy}f=\varphi\left(x_0+\Delta x\right)-\varphi\left(x_0\right)$.

В силу того, что в рассматриваемой окрестности точки $\left(x_0,y_0\right)$ существует частная производная f'_x, функция $\varphi(x)$ дифференцируема на отрезке с концами в точках x_0 и $x_0+\Delta x$. Из теоремы Лагранжа о конечных приращениях следует, что

$$\Delta_{xy}f=\varphi'\left(x_0+\Theta_1\Delta x\right),\ 0<\Theta_1<1.$$

Но $\varphi'(x)=\mathrm{f}'_{\mathrm{x}}\left(\mathrm{x},\mathrm{y}_0+\Delta y\right)-f'_x\left(x,y_0\right)$, а поэтому

$$\Delta_{xy}f=\left[f'_x\left(x_0+\Theta_1\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f'_x\left(x_0+\Theta_1\Delta x,y_0\right)\right]\Delta x.$$

Применяя ещё раз теорему о конечных приращениях, но теперь уже по переменной y, будем иметь

$$\Delta_{xy}f=f''_{xy}\left(x_0+\Theta_1\Delta x,y_0+\Theta_2\Delta y\right)\Delta x\Delta y,\ 0<\Theta_1<1,\ 0<\Theta_2<1.\qquad (25)$$

Совершенно аналогично, пологая $\phi(y)=\mathrm{f}\left(\mathrm{x}_0+\Delta x,\mathrm{y}_0\right)-f\left(x_0,y\right)$, имеем

$$\Delta_{xy}f=\phi\left(y_0+\Delta y\right)-\phi\left(y_0\right)=\phi'\left(y_0+\Theta_3\Delta y\right)\Delta y=$$

$$=\left[f'_y\left(x_0+\Delta x,y_0+\Theta_3\Delta y\right)-f'_y\left(x_0,y_0+\Theta_3\Delta y\right)\right]\Delta y=$$

$$=f''_{yx}\left(x_0+\Theta_4\Delta x,y_0+\Theta_3\Delta y\right)\Delta x\Delta y,\ 0<\Theta_3<1,\ 0<\Theta_4<1.\qquad (26)$$

Согласно (22), левые части равенства (26) и (25) равны между собой, равны и правые; приравнивая их и сокращая на $\Delta x\Delta y$ при $\Delta x\neq 0$ и $\Delta y\neq 0$, получим

$$f''_{xy}\left(x_0+\Theta_1\Delta x,y_0+\Theta_2\Delta y\right)=$$

$$f''_{yx}\left(x_0+\Theta_4\Delta x,y_0+\Theta_3\Delta y\right),\ 0<\Theta_i<1,\ i=1,2,3,4.\qquad (27)$$

В силу непрерывности частных производных f''_{xy} и f''_{yx} в точке (x_0, y_0) переходя в (27) к пределу при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, получаем (21).

Замечание. Из доказанной теоремы по индукции следует, что если у функции n переменных смешанные частные производные m-го порядка непрерывны в некоторой точке, то они не зависят от порядка дифференцирования.

Определение 1. Функция, имеющая в некоторой точке (или, соответственно, на некотором открытом множестве) непрерывные частные производные всех порядков до некоторого порядка m включительно, называется m раз <u>непрерывно дифференцируемой</u> в этой точке (на этом множестве).

Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные первые и вторые частные производные на некотором открытом плоском множестве Ω (т.е. дважды непрерывно дифференцируема на множестве Ω). Из непрерывности на множестве Ω частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следует дифференцируемость самой функции $z(x, y)$ в каждой точке этого множества. Таким образом, для всех точек $(x, y) \in \Omega$ определен дифференциал $dz = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} dy$.

Поскольку, согласно сделанным предположениям, частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ имеют на открытом множестве непрерывные частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}, \ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ и } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y},$$

то $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ также дифференцируемы на множестве Ω. Поэтому дифференциал dz, рассматриваемый как функция только переменных x и y, в свою очередь является дифференцируемой на множестве Ω функцией. Вычислим дифференциал от первого дифференциала dz, считая dx и dy фиксированными, а точку (x, y) – пинадлежащей области Ω: $(x, y) \in \Omega$,

$$d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial x} dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y} dy\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dy\right) dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy\right) dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(dx dy + dy dx) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy dy.$$

В случае непрерывности смешанных частных производных $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ они совпадают, поэтому для их обозначения может быть использован один и тот же символ, поэтому

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \qquad (28)$$

Определение 2. Вторым дифференциалом $d^2 z$ функции $z = f(x, y)$ в данной точке называется дифференциал от первого дифференциала, т.е. (28).

Пример. Пусть $z = x^3 \cos^2 y$. Найти $d^2 z$.

Решение: $dz = 3x^2 \cos^2 y\, dx - x^3 \sin 2y dy$,

$d^2 z = 6x \cos^2 y\, dx^2 - 6x^2 \sin 2y dxdy - 2x^2 \cos^2 2y\, dy^2$.

Аналогичным образом при непрерывности частных производных третьего порядка можно вычислить и дифференциал от второго дифференциала $d\left(d^2 z\right)$. Именно, чтобы в предположении непрерывности у рассматриваемой функции $z(x, y)$ всех её частных производных до порядка $(m+1)$ включительно на некотором открытом множестве получить ее дифференциал $d^{m+1} z$, надо взять дифференциал от дифференциала $d^m z$ порядка m. При этом для дифференциалов порядка $m = 1, 2, \ldots$ справедлива формула

$$d^m z = \sum C_n^k \frac{\partial^m z}{\partial x^{m-k} \partial y^k} dx^{m-k} dy^k, \qquad (29)$$

ее обычно символически записывают в виде:

$$d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^{(m)} f(x, y). \qquad (30)$$

Формула (29) легко доказывается по индукции.

Замечание: Следует иметь в виду, что если имеется сложная функция, где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, то второй дифференциал функции f, записанный через дифференциалы переменных x и y, уже не будет иметь вид (28), а будет выглядеть сложнее. И в случае дифференциала высшего порядка не имеет места инвариантность формы дифференциала относительно выбора переменных. Убедимся в этом. В силу инвариантности формы первого дифференциала имеем $dz = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} dy$. Затем получаем

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial z}{\partial x}d(dx) + \frac{\partial z}{\partial y}d(dy) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y,$$

так как

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y \partial x}.$$

Определение дифференциалов высших порядков функции двух переменных естественным образом переносится на функции большего числа переменных. Дифференциал m-го порядка от функции n переменных $y = y(x_1,...,x_n)$ имеет вид

$$d^m y = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^{(m)} y(x_1,...,x_n). \qquad (31)$$

Формула Тейлора

Для функции многих переменных, аналогично случаю одной переменной, имеет место формула Тейлора.

Теорема 1. (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). Пусть функция $f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – $(m+1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности $U = U(M_0)$ точки $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. Тогда для всякой точки M, $M \in U(M_0)$ приращение функции $\Delta f = f(M) - f(M_0)$ представимо в виде:

$$\Delta f = f(M) - f(M_0) = df(M_0) + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + ... + \frac{d^m f(M_0)}{m!} + R_m, \qquad (32)$$

Где остаточный член имеет следующий вид (называемым остаточным членом в форме Лагранжа):

$$R_m = \frac{\mathrm{d}^{m+1} f(N)}{(m+1)!}, \text{ где } N(x_1^0 + \Theta\Delta x_1, x_2^0 + \Theta\Delta x_2, ..., x_n^0 + \Theta\Delta x_n),\ \Theta \in (0;1). \qquad (33)$$

Доказательство. Рассмотрим сложную функцию $F(t) = f(N) = f(x_1^0 + t\Delta x_1, ..., x_n^0 + t\Delta x_n)$. Эта функция одной переменной, в силу условий теоремы, удовлетворяет всем требованиям для представления её по формуле Тейлора - Маклорена, рассмотренной в первом семестре, при $t_0 = 0, t = 1, \Delta t = 1$. Таким образом, можно записать:

$$F(1)-F(0)=F'(0)+\frac{F''(0)}{2!}+\ldots+\frac{F^{(m)}(0)}{m!}+\frac{F^{(m+1)}(\Theta)}{(m+1)!}. \qquad (34)$$

Заметим, что поскольку внутренние функции $x_k(t)=x_k^0+t\Delta x_k$ являются линейными, то производные сложной функции $F(t)$ в точке $t_0=0$ легко вычисляются и имеют вид:

$$F'(0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)\cdot\Delta x_i=df(M_0),$$

$$F''(0)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(M_0)\Delta x_i\Delta x_j=d^2f(M_0), \qquad (35)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F^{(m)}(0)=d^m f(M_0),$$

$$F^{(m+1)}(\Theta)=d^m f(M_0+\Theta\rho),$$

(проверить равенства (35) самостоятельно). Подставляя эти равенства в (34), получаем и искомую формулу (32), и формулу для остаточного члена (33), что и требовалось. Теорема доказана.

8. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть уравнение $F(x,y)=0$ определяет y как некоторую функцию $y=\varphi(x)$. Если в уравнение подставить вместо y функцию $\varphi(x)$, то получим тождество $F(x,\varphi(x))=0$. Следовательно, производная по x от функции $F(x,y)$, где $y=\varphi(x)$, также должна быть равной нулю. Дифференцируя по правилу дифференцирования сложной функции, найдем $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$, откуда

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Эта формула выражает производную неявной функции $F(x,y)$.

Пример 1. $F(x,y)=x^2+y^2-1$.

Имеем $\frac{\partial F}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}=2y$; значит, $y'=-\frac{x}{y}$.

Пусть, теперь уравнение $F(x,y,z)=0$ определяет z как некоторую функцию $z=\varphi(x,y)$ независимых переменных x и y. Если в уравнение подставить вместо z функцию $\varphi(x,y)$, то получим тождество

$$F\left[x,y,\varphi(x,y)\right]=0.$$

Следовательно, частные производные по x и по y от функции $F(x,y,z)$, где $z=\varphi(x,y)$, также должны быть равны нулю. Дифференцируя, найдем $F'_x+F'_z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$, $F'_y+F'_z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Эти формулы выражают частные производные неявной функции $z=\varphi(x,y)$ через производные заданной функции $F(x,y,z)$. При $F'_z=0$ эти формулы теряют смысл.

Пример 2. Найдем частные производные функции z, заданной уравнением $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$ (уравнение сферы). Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial F}{\partial z}=2z;$$

значит,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}.$$

В этом примере можно найти явное выражение функции и проверить правильность полученных результатов. Но это возможно далеко не всегда.

В общем случае, когда уравнение $F(M,u)=0$ (т.е. уравнение $F(x_1,x_2,...,x_n,\mathrm{u})=0$)

Определяет u как некоторую функцию от $x_1,x_2,...,x_n$, аналогично предыдущему найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=-\frac{F'_{x_1}}{F'_u},\ \frac{\partial u}{\partial x_2}=-\frac{F'_{x_2}}{F'_u},\ ....,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}=-\frac{F'_{x_n}}{F'_u}.$$

9. ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим вектор $\vec{OA}=\vec{r}$, начало которого совпадает с началом координат, а концом является некоторая точка $A(x,y,z)$.

Такой вектор называют *радиусом – вектором.* Выразим этот вектор через проекции на оси координат:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,. \qquad (36)$$

Пусть проекции вектора $\vec{r}$ суть функции некоторого параметра t:

$$\left.\begin{aligned} x &= \phi(t), \\ y &= \varphi(t), \\ z &= \chi(t). \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Тогда вектор $\vec{r}$ можно записать так:

$$\vec{r} = \phi(t)\vec{i} + \varphi(t)\vec{j} + \chi(t)\vec{k} \text{ или коротко } \vec{r} = \vec{r}(t). \qquad (36')$$

При изменении t изменяются x, y, z, и точка A – конец вектора $\vec{r}$ – опишет в пространстве некоторую линию, которую называют <u>годографом</u> вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (рис. 5). Уравнение (36) или (36′) называют <u>векторным уравнением</u> линии в пространстве. Уравнения (37) называют <u>параметрическими уравнениями</u> линии в пространстве. С помощью этих уравнений для каждого значения t определяют координаты x, y, z соответствующей точки кривой.

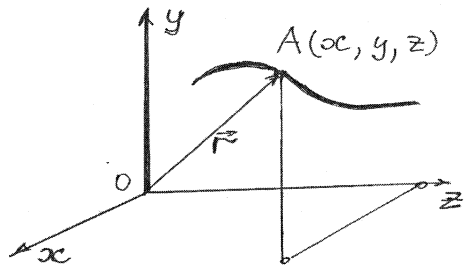


Рис. 5

Замечание. Кривая в пространстве может быть также определена как геометрическое место точек пересечения двух поверхностей; следовательно, такая кривая может быть задана двумя уравнениями двух поверхностей:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(x, y, z) &= 0, \\ \Phi_2(x, y, z) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

Так, **например**, уравнения

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 4, \\ z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

являются уравнениями окружности, получающейся в пересечении сферы и плоскости (рис. 6).

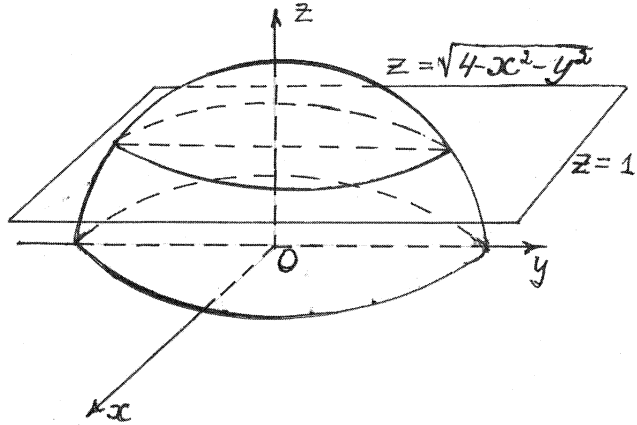


Рис. 6

При изменении t вектор $\vec{r}$ в формулах (36) или (36′) изменяется в общем случае по величине и по направлению. Говорят, что $\vec{r}$ есть <u>векторная функция</u> от скалярного аргумента t. Допустим, что

$$\lim_{t\to t_0}\phi(t)=\phi_0,\ \lim_{t\to t_0}\varphi(t)=\varphi_0,\ \lim_{t\to t_0}\chi(t)=\chi_0.$$

Тогда говорят, что вектор $\vec{r}_0=\phi_0\vec{i}+\varphi_0\vec{j}+\chi_0\vec{k}$ есть предел вектора $\vec{r}=\vec{r}(t)$, и пишут (рис.7) $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}_0$. Очевидно равенство $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\vec{r}(t)\right|=\left|\vec{r}_0\right|$.

Возьмем теперь какое-нибудь фиксированное значение t, соответствующее определенной точке M на кривой, и дадим t приращение Δt; тогда мы получим вектор $\vec{r}(t+\Delta t)=\phi(t+\Delta t)\vec{i}+\varphi(t+\Delta t)\vec{j}+\chi(t+\Delta t)\vec{k}$, который определяет на кривой некоторую точку M_1 (рис. 7).

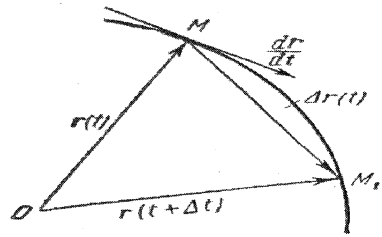


Рис. 7

Найдем приращение вектора $\vec{r}(t)$:

$$\Delta\vec{r}(t)=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)=$$

$$=\left[\phi(t+\Delta t)-\phi(t)\right]\vec{i}+\left[\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)\right]\vec{j}+\left[\chi(t+\Delta t)-\chi(t)\right]\vec{k}=M\vec{M}_1.$$

Рассмотрим отношение $\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$ приращения векторной функции к приращению скалярного аргумента; это, очевидно, есть вектор, коллинеарный с вектором $\Delta\vec{r}(t)$, так как получается из него умножением на скалярный множитель $\frac{1}{\Delta t}$. Мы можем записать этот вектор так:

$$\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}=\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=$$

$$=\frac{\phi(t+\Delta t)-\phi(t)}{\Delta t}\vec{i}+\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}\vec{j}+\frac{\chi(t+\Delta t)-\chi(t)}{\Delta t}\vec{k}_1.$$

Если функции $\phi(t),\varphi(t),\chi(t)$, имеют производные при выбранном значение t, то множители, стоящие при $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, в пределе при $\Delta t\to 0$ обратятся в производные $\phi'(t),\varphi'(t),\chi'(t)$. Следовательно, в этом случае предел $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t\to 0$ существует и равен вектору $\phi'(t)\vec{i}+\varphi'(t)\vec{j}+\chi'(t)\vec{k}$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\phi'(t)\vec{i}+\varphi'(t)\vec{j}+\chi'(t)\vec{k}.$$

Вектор, определяемый последним равенством, называется <u>производной</u> от вектора $\vec{r}(t)$ по скалярному аргументу t. Производную обозначают символом $\frac{d\vec{r}}{dt}$ или $\vec{r}'$. Таким образом,

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{r}'=\phi'(t)\vec{i}+\varphi'(t)\vec{j}+\chi'(t)\vec{k} \text{ или } \frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

Выясним направление вектора $\frac{d\vec{r}}{dt}$.

По определению касательной направление секущей MM_1 в пределе дает направление касательной, следовательно, вектор производной $\frac{d\vec{r}}{dt}$ направлен по касательной к кривой в точке M. Длина вектора $\frac{d\vec{r}}{dt}$ определяется формулой

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\sqrt{\left[\phi'(t)\right]^2+\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\chi'(t)\right]^2}.$$

На основании полученных результатов легко написать уравнение касательной к кривой $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ в точке $M(x,y,z)$, имея в виду, что в

уравнении кривой $x=\phi(t), y=\varphi(t), z=\chi(t)$. Уравнение касательной будет иметь вид

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}, \tag{39}$$

где X, Y, Z – переменные точки касательной.

Пример 1. Написать уравнение касательной к винтовой линии $x=a\cos t, y=a\sin t, z=amt$ при произвольном значении t и при $t=\frac{\pi}{4}$.

Решение.

$$\frac{dx}{dt}=-\sin t,\ \frac{dy}{dt}=a\cos t,\ \frac{dz}{dt}=am.$$

По формуле (39) имеем

$$\frac{X-a\cos t}{-a\sin t}=\frac{Y-a\sin t}{a\cos t}=\frac{Z-amt}{am}.$$

В частности, при $t=\frac{\pi}{4}$ получим

$$\frac{X-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{-\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{Y-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{Z-am\frac{\pi}{4}}{am}.$$

Так же как и в случае плоской кривой, прямая, перпендикулярная к касательной и проходящая через точку касания, называется <u>нормалью</u> к пространственной кривой в данной точке. Нормалей к данной пространственной кривой в данной точке можно, очевидно, провести бесконечно много. Все они лежат в плоскости, перпендикулярной к касательной прямой. Эта плоскость называется <u>нормальной плоскостью</u>.

Из условия перпендикулярности нормальной плоскости к касательной (36) получаем уравнение нормальной плоскости:

$$\frac{dx}{dt}(X-x)+\frac{dy}{dt}(Y-y)+\frac{dz}{dt}(Z-z)=0. \tag{40}$$

Пример 2. Написать уравнение нормальной плоскости к винтовой линии в точке, для которой $t=\frac{\pi}{4}$.

Решение. На основании примера 1 и формулы (40) получаем:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(X-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(Y-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)+m\left(Z-am\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

10. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Пусть имеем поверхность, заданную уравнением вида

$$F(x,y,z)=0. \qquad (41)$$

Введем следующее определение.

Определение 1. Прямая линия называется касательной к поверхности в некоторой точке $P(x,y,z)$, если она является касательной к какой-либо кривой, лежащей на поверхности и проходящей через точку P.

Так как через точку P проходит бесконечное число различных кривых, лежащих на поверхности, то и касательных к поверхности, проходящих через эту точку, будет, вообще говоря, бесконечное множество.

Введем понятие об особых и обыкновенных точках поверхности $F(x,y,z)=0$.

Если в точке $M(x,y,z)$ все три производные $\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}$ равны нулю или хотя бы одна из этих производных не существует, то точка M называется <u>особой</u> точкой поверхности. Если в точке $M(x,y,z)$ все три производные $\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}$ существуют и непрерывны, причем хотя бы одна из них отлична от нуля, то точка M называется <u>обыкновенной</u> точкой поверхности.

Теорема. Все касательные прямые к данной поверхности (41) в ее обыкновенной точке P лежат в одной плоскости.

Доказательство. Рассмотрим на поверхности некоторую линию L, проходящую через данную точку P поверхности (рис. 8). Пусть рассматриваемая кривая задана параметрическими уравнениями $x=\phi(t), y=\varphi(t), z=\chi(t)$ (см. 37).

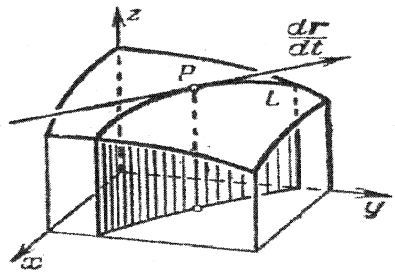


Рис. 8

Касательная к кривой будет касательной к поверхности. Уравнения этой касательной имеют вид

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}. \qquad (39)$$

Если выражения (37) подставить в уравнение (38), то это уравнение превратится в тождество относительно t. Так как кривая (37) лежит на поверхности (41). Дифференцируя его по t, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0. \qquad (42)$$

Рассмотрим, далее, векторы $\vec{N}$ и $\frac{d\vec{r}}{dt}$, проходящие через точку P:

$$\vec{N}=\frac{\partial F}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}. \qquad (43)$$

Так как точка P – обыкновенная, то проекции этого вектора $\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}$ в точке P одновременно в нуль не обращаются и потому $\left|\vec{N}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}\neq 0$. Вектор

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}\ -$$

– касательный к кривой, которая проходит через точку P и лежит на поверхности. Проекция этого вектора вычисляется на основании уравнения (39) при значении параметра t, соответствующем точке P. Вычислим скалярное произведение векторов $\vec{N}$ и $\frac{d\vec{r}}{dt}$, которое равно сумме произведений одноименных проекций:

$$\vec{N}\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

На основании равенства (42) выражение, стоящее в правой части, равно нулю, следовательно, $\vec{N}\frac{d\vec{r}}{dt}=0$. Из последнего равенства следует, что вектор $\vec{N}$ и касательный вектор $\frac{d\vec{r}}{dt}$ к кривой (36) в точке P перпендикулярны. Про веденное рассуждение справедливо для любой кривой (36), проходящей через точку P и лежащей на поверхности. Следовательно, каждая касательная к поверхности в точке P перпендикулярна к одному и тому же вектору $\vec{N}$ и потому все эти касательные лежат в одной плоскости, перпендикулярной к вектору $\vec{N}$. Теорема доказана.

Тогда дадим еще одно определение касательной плоскости:

Определение 2. Плоскость, в которой расположены все касательные прямые к линиям на поверхности, проходящим через данную ее точку P, называется касательной плоскостью к поверхности в точке P (рис. 9).

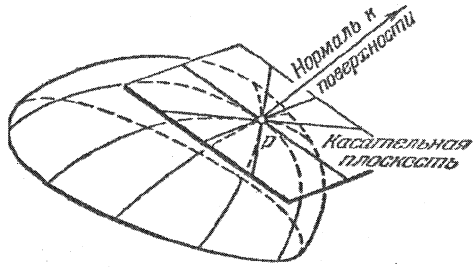


Рис. 9

Заметим, что в особых точках поверхности может не существовать касательная плоскость. В таких точках касательные прямые к поверхности могут не лежать в одной плоскости. Так, например, вершина конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$ является особой точкой. Касательные к конической поверхности в этой точке не лежат в одной плоскости (они сами образуют коническую поверхность).

Напишем уравнение касательной плоскости к поверхности (41) в обыкновенной точке. Так как эта плоскость перпендикулярна к вектору (43),то, следовательно, ее уравнение имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0. \qquad (44)$$

Если уравнение к поверхности задано в форме $z = f(x, y)$, или $z - f(x, y) = 0$, то

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} = 1,$$

А уравнение касательной плоскости в этом случае примет вид

$$Z - z = \frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y). \qquad (44')$$

Замечание. Если в формуле $(44')$ положим $X - x = \Delta x, Y - y = \Delta y$, то эта формула примет вид

$$Z - z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

Ее правая часть представляет полный дифференциал функции $z = f(x, y)$. Следовательно, $Z - z = dz$. Таким образом, полный дифференциал функции

двух переменных в точке $M(x,y)$, соответствующий приращениям Δx и Δy независимых переменных x и y, равен соответствующему приращению аппликаты (z) касательной плоскости к поверхности, которая является графиком функции $z = f(x,y)$.

Определение 3. Прямая, проведенная через точку $P(x,y,z)$ поверхности (41) перпендикулярно к касательной плоскости, называется <u>нормалью</u> к поверхности (см. рис. 9).

Напишем уравнение нормали. Так как ее направление совпадает с направлением вектора (43), то ее уравнения будут иметь вид

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \qquad (45)$$

Если уравнение поверхности задано в форме $z = f(x,y)$, или $z - f(x,y) = 0$, то уравнение примет вид

$$\frac{X-x}{-\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-y}{-\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z-z}{1}.$$

Замечание. Пусть поверхность (43) есть поверхность уровня для некоторой функции трех переменных $u = u(x,y,z)$, т.е.

$F(x,y,z) = u(x,y,z) - C = 0$.

Очевидно, что вектор (43), направленный по нормали к поверхности уровня $F(x,y,z) = u(x,y,z) - C = 0$, будет

$$\vec{N} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

т.е. $\vec{N} = grad\, u$.

Этим мы докали, что <u>градиент</u> функции $u = u(x,y,z)$ направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку.

Пример. Написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ в точке $P(1,2,3)$.

Решение. $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$;

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x;\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y;\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z;$$

При $x = 1; y = 2; z = 3$ имеем:

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2; \frac{\partial F}{\partial y} = 4; \frac{\partial F}{\partial z} = 6$.

Следовательно, уравнение касательной плоскости будет:

$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0$ или $x+2y+3z-14=0$.

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6} \text{ или } \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}.$$

11. МАКСИМУМ И МИНИМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение 1. Функция двух переменных $z=f(x,y)$ имеет максимум в точке $M_0(x_0,y_0)$ (т.е. при $x=x_0$ и $y=y_0$), если $f(x_0,y_0)>f(x,y)$ для все точек (x,y), достаточно близких к точке (x_0,y_0) и отличных от нее.

Определение 2. Функция двух переменных $z=f(x,y)$ имеет минимум в точке $M_0(x_0,y_0)$, если $f(x_0,y_0)<f(x,y)$ для всех точек (x,y), достаточно близких к точке (x_0,y_0) и отличных от нее.

Минимум и максимум функции называются экстремумами функции, т.е. говорят, что функция имеет экстремум в данной точке, если эта функция имеет максимум или минимум в данной точке.

Пример 1. Функция

$$z=(x-1)^2+(y-2)^2-1$$

достигает минимум при $x=1$, $y=2$, т.е. в точке $(1,2)$. Действительно, $f(1,2)=-1$, а так как $(x-1)^2$ и $(y-2)^2$ всегда положительны при $x\neq 1$, $y\neq 2$, то

$$(x-1)^2+(y-2)^2-1>-1,$$

то есть

$$f(x,y)>f(1,2).$$

Геометрическая картина, соответствующая данному случаю, изображена на рисунке 10.

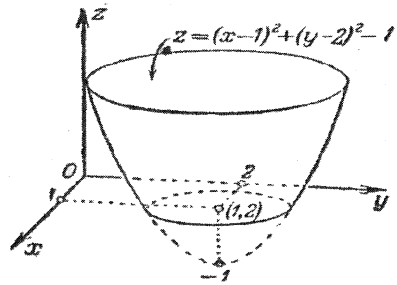


Рис. 10

Данные определения максимума и минимума функции можно перефразировать следующим образом.

Положим $x = x_0 + \Delta x$; $y = y_0 + \Delta y$; тогда

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0) = \Delta f.$$

1) если $\Delta f < 0$ при всех достаточно малых отличных от нуля приращениях независимых переменных, то функция $f(x,y)$ достигает максимума в точке $M(x_0,y_0)$.

2) если $\Delta f > 0$ при всех достаточно малых отличных от нуля приращениях независимых переменных, то функция $f(x,y)$ достигает минимума в точке $M(x_0,y_0)$.

Эта формулировка переносится без изменения на функции любого числа переменных.

Теорема 1. (Необходимое условие экстремума.) Если функция $z = f(x,y)$ достигает экстремума при $x = x_0$ и $y = y_0$, то каждая частная производная первого порядка от z или обращается в нуль при этих значениях аргументов, или не существует.

Действительно, дадим переменной y определенное значение, именно $y = y_0$, тогда функция $f(x,y_0)$ будет функцией одного переменного x. Так как при $x = x_0$ она имеет экстремум (максимум или минимум), то, следовательно, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ или равно нулю, или не существует. Совершенно аналогично можно доказать, что $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ или равно нулю, или не существует.

Эта теорема не является достаточной для исследования вопроса об экстремальных значениях функции, но позволяет находить эти значения в тех случаях, в которых мы заранее уверены в существовании максимума или минимума. В противном случае требуется дополнительное исследование.

Пример 2. Функция $z = x^2 - y^2$ имеет производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$, которые обращаются в нуль при $x = 0$ и $y = 0$, Но эта функция при указанных значениях не имеет ни максимума, ни минимума. Действительно, эта функция равна нулю в начале координат и принимает в как угодно близких точках от начала координат как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, значение нуль не является ни максимумом, ни минимум (рис 11).

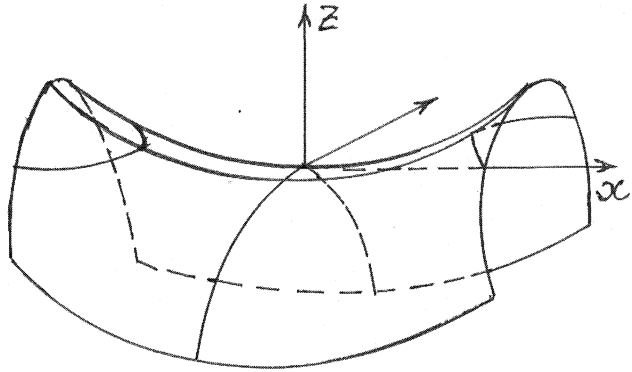


Рис. 11

Определение. Точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ (или не существует) и $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ (или не существует), называются критическими точками функции $z=f(x,y)$,

Если функция достигает экстремума в какой-либо точке, то (в силу теоремы 1) это может случиться только в критической точке.

Теорема 2.(Достаточное условие экстремума) Пусть в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0,y_0)$, функция $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно; пусть, кроме того, точка $M_0(x_0,y_0)$ является критической точкой функции $f(x,y)$, т.е. $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0$. Тогда при $x=x_0$ и $y=y_0$:

1) функция $f(x,y)$ имеет максимум, если

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)>0 \text{ и } \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}<0;$$

2) функция $f(x,y)$ имеет минимум, если

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)>0 \text{ и } \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}>0;$$

3) функция $f(x,y)$ не имеет ни минимума, ни максимума, если

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)<0;$$

4) если $\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)=0$, то экстремум может быть и может не быть (в этом случае требуется дальнейшее исследование).

Доказательство. Напишем формулу Тейлора второго порядка для функции $f(x,y)$ (32):

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(\Delta x)^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(\Delta y)^2\right]+a_0(\Delta\rho)^3,$$

где $\Delta\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, а a_0 – ограничен.

По условию $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0$, следовательно,

$$\Delta f=(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=$$

$$=\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2\right]+a_0(\Delta\rho)^3. \qquad (46)$$

Обозначим теперь значения вторых частных производных в точке $M_0(x_0,y_0)$ через A. B, C: $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{M_0}=A$; $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_{M_0}=B$; $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{M_0}=C$. Обозначим через φ угол между направлением отрезка M_0M, где M есть точка $M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$, и осью OX; тогда $\Delta x=\Delta\rho\cos\varphi$; $\Delta y=\Delta\rho\sin\varphi$. Подставляя эти выражения в формулу для Δf, найдем:

$$\Delta f=\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[A\cos^2\varphi+2B\cos\varphi\sin\varphi+C\sin^2\varphi+2a_0\Delta\rho\right]. \qquad (47)$$

Предположим, что $A\neq 0$.

Разделив и умножив на A выражение, стоящее в квадратных скобках, получим:

$$\Delta f=\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[\frac{(A\cos\varphi+B\sin\varphi)^2+(AC-B^2)\sin^2\varphi}{A}+2a_0\Delta\rho\right]. \qquad (48)$$

Рассмотрим теперь четыре возможных случая.

1) Пусть $AC-B^2>0$, $A<0$. Тогда в числителе дроби стоит сумма двух неотрицательных величин. Они одновременно в нуль не обращаются, так первый член обращается в нуль при $tg\varphi=-\frac{A}{B}$, второй при $\sin\varphi=0$.

Если $A<0$, то дробь есть отрицательная величина, не обращающаяся в нуль. Обозначим ее через $\left(-m^2\right)$; тогда $\Delta f=\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[-m^2+2a_0\Delta\rho\right]$, где m не зависит от $\Delta\rho$, $a_0\Delta\rho\to 0$ при $\Delta\rho\to 0$. Следовательно, при достаточно малых $\Delta\rho$ будет: $\Delta f<0$, или

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)<0.$$

Но тогда для всех точек $\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)$, достаточно близких к точке $\left(x_0,y_0\right)$, имеет место неравенство

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)<f\left(x_0,y_0\right),$$

а это означает, что в точке $\left(x_0,y_0\right)$ функция $f(x,y)$ достигает максимума.

2) Пусть $AC-B^2>0$, $A>0$. Тогда, аналогично рассуждая, получим: $\Delta f=\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[m^2+2a_0\Delta\rho\right]$ или $f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)>f\left(x_0,y_0\right)$, т.е. функция $f(x,y)$ имеет минимум в точке $\left(x_0,y_0\right)$.

3′) Пусть $AC-B^2<0$, $A>0$. В этом случае функция не имеет ни максимума, ни минимума. Функция возрастает, когда мы движемся из точки $\left(x_0,y_0\right)$ по одним направлениям, и убывает, когда мы движемся по другим направлениям. Действительно, при перемещении вдоль луча $\varphi=0$, имеем:

$$\Delta f=\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[A+2a_0\Delta\rho\right]>0;$$

при движении вдоль этого луча функция возрастает. Если же перемещаться вдоль луча $\varphi=\varphi_0$, такого, что $tg\varphi_0=-\frac{A}{B}$, то при $A>0$ будет:

$$\Delta f=\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[\frac{AC-B^2}{A}\sin^2\varphi+2a_0\Delta\rho\right]<0;$$

при движении вдоль этого луча функция убывает.

3″) Пусть $AC-B^2<0$, $A<0$. В этом случае функция тоже не имеет ни максимума, ни минимума. Исследование проводится так же, как и в случае 3′.

3‴) Пусть $AC-B^2<0$, $A=0$. Тогда $B\neq 0$ и равенство (47) можно переписать в виде

$$\Delta f=\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[\sin\varphi\left(2B\cos\varphi+C\sin\varphi\right)+2a_0\Delta\rho\right].$$

При достаточно малых значениях φ выражение, стоящее в круглых скобках, сохраняет знак, так оно близко к $2B$, а множитель $\sin\varphi$ меняет знак в зависимости от того, будет ли φ больше нуля или меньше нуля (после выбора $\varphi>0$ и $\varphi<0$ мы можем ρ выбрать настолько малым, что $2a_0$ не

будет изменять знак всей квадратной скобки). Следовательно, и в этом случае Δf меняет знак при различных φ, т.е. при различных Δx и Δy, следовательно, и в этом случае нет ни максимума, ни минимума.

Таким образом, каков бы ни был знак A имеем всегда следующее положение:

Если $AC - B^2 < 0$ в точке (x_0, y_0), то функция не имеет в этой точке ни максимума, ни минимума. В этом случае поверхность, служащая графиком функции, может вблизи этой точки иметь, например, форму седла (см. рис.11). Говорят, что функция имеет в этой точке минимакс.

4) Пусть $AC - B^2 = 0$. В этом случае на основании формул (47) и (48) сделать заключения о знаке Δf нельзя. Так, например, при $A \neq 0$ будем иметь:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 \left[\frac{(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2}{A} + 2a_0\Delta\rho \right];$$

при $\varphi = arctg\left(-\frac{A}{B}\right)$ знак Δf определяется знаком $2a_0$, здесь требуется специальное дальнейшее исследование (например, с помощью формулы Тейлора более высокого порядка или каким – либо иным способом). Таким образом, теорема полностью доказана.

Пример 3. Исследовать на максимум и минимум функцию $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

Решение. 1) Находим критические точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3; \ \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 2.$$

Решая систему уравнений $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0, \\ -x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$, получаем $x = -\frac{3}{4}$; $y = \frac{1}{3}$.

2) Находим производные второго порядка в критической точке $\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{3}\right)$ и определяем характер критической точки:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2; \ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1; \ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2; \ AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0.$$

Следовательно, в точке $\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{3}\right)$ данная функция имеет минимум, а именно: $z_{\min} = -\frac{4}{3}$.

12. МАКСИМУМ И МИНИМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ, СВЯЗАННЫХ ДАННЫМИ УРАВНЕНИЯМИ (УСЛОВНЫЕ МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ)

Во многих задачах на разыскание наибольших и наименьших значений функции вопрос сводится к разысканию максимумов и минимумов функции от нескольких переменных, которые не являются независимыми, а связаны друг с другом некоторыми добавочными условиями (например, они должны удовлетворять данным уравнениям).

Рассмотрим, **например**, такую задачу. Из данного куска жести площадью $2a$ надо сделать закрытую коробку в форме параллелепипеда, имеющую наибольший объем.

Обозначим объем длину, ширину и высоту коробки через x, y, z. Задача сводится к разысканию максимума функции $\vartheta = xyz$ при условии, что $2xy + 2xz + 2yz = 2a$. Здесь мы имеем задачу на условный экстремум: переменные x, y, z связаны условием $2xy + 2xz + 2yz = 2a$. Рассмотрим методы решения таких задач.

Рассмотрим сначала вопрос об условном экстремуме функции двух переменных, если эти переменные связаны одним условием.

Пусть требуется найти максимумы и минимумы функции

$$u = f(x, y), \tag{49}$$

при условии, что x и y связаны уравнением

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{50}$$

При наличии условия (50) из двух переменных независимым будет только одно, например x, так как y определяется из равенства (50) как функция от x. Если бы мы разрешили уравнение (46) относительно y, то, вставляя в равенство (49) вместо y найденное выражение, получили бы функцию одного переменного x и свели бы задачу к задаче об исследовании на максимум и минимум функции одного независимого переменного x.

Но можно решить поставленную задачу, не разрешая уравнение (50) относительно x или y. При тех значениях x, при которых функция u может иметь максимум или минимум, производная от u по x должна обращаться в нуль.

Из (49) находим $\frac{dz}{dx}$, помня, что y есть функция от x:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Следовательно, в точках экстремума

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0. \qquad (51)$$

Из равенства (50) находим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0. \qquad (52)$$

Это равенство удовлетворяется для всех x и y, удовлетворяющих уравнению (50).

Умножив члены равенства (52) на неопределенный пока коэффициент λ и сложив их с соответствующими членами равенства (51), получим:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)+\lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0$$

или

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0\ . \qquad (53)$$

Последнее равенство выполняется во всех точках экстремума, Подберем λ так, чтобы для значений x и y, соответствующих экстремуму функции u, вторая скобка в равенстве (53) обратилась в нуль $\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0$ (для определенности будем предполагать, что в критических точках $\frac{\partial \varphi}{\partial y}\neq 0$). Но тогда при этих значениях x и y из равенства (53) следует равенство $\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0$. Таким образом, получатся, что в точках экстремума удовлетворяются три уравнения:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0,\\ \varphi(x,y)=0\end{cases} \qquad (54)$$

с тремя неизвестными x, y,λ. Из этих уравнений определяем x, y и λ, которое играло только вспомогательную роль и нам в дальнейшем не требуется.

Из вывода следует, что уравнения (54) являются необходимыми условиями условного экстремума, т.е. в точках экстремума удовлетворяются уравнения (54). Но не при всяких x и y (и λ), удовлетворяющих уравнениям

(54), будет иметь место условный экстремум. Требуется дополнительное исследование характера критической точки. При решении конкретных задач иногда удается установить характер критической точки на основании существа задачи. Заметим, что левые части уравнений (54) суть частные производные функции

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y) \tag{55}$$

по переменным x, y, λ.

Таким образом, для того, чтобы найти значения x и y, удовлетворяющих условию (50), при которых функция $u=f(x,y)$ может иметь условный максимум или условный минимум, нужно составить вспомогательную функцию (55), приравнять к нулю ее частные производные по x, y, λ и из полученных трех уравнений (54) определить искомые x и y (и вспомогательный множитель λ). Рассмотренный метод распространяется на исследование условного экстремума функции любого числа переменных.

Пусть требуется найти максимумы и минимумы функции n переменных $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ при условии, что переменные $x_1,x_2,...,x_n$ связаны m $(m<n)$ уравнениями;

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,x_2,...,x_n)=0, \\ \varphi_2(x_1,x_2,...,x_n)=0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m(x_1,x_2,...,x_n)=0, \end{cases} \tag{56}$$

Для того чтобы найти значения $x_1,x_2,...,x_n$, при которых могут быть условные максимумы и минимумы, нужно составить функцию

$$F(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,....,\lambda_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)+\lambda_1\varphi_1(x_1,x_2,...,x_n)+$$
$$+\lambda_2\varphi_2(x_1,x_2,...,x_n)+...+\lambda_m\varphi_m(x_1,x_2,...,x_n).$$

Приравнять нулю ее частные производные по $x_1,x_2,...,x_n$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+...+\lambda_m\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}+...+\lambda_m\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_2}=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}+...+\lambda_m\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}=0 \end{cases} \tag{57}$$

И из $(m+n)$ уравнений (56) и (57) определить $x_1, x_2, ..., x_n$ и вспомогательные неизвестные $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$. Так же как и для функции двух переменных, вопрос о том, будет ли найденное значение функции иметь максимум или минимум или не будет иметь ни того, ни другого, в общем случае оставляем открытым. Этот вопрос мы будем решать на основании вспомогательных соображений.

Пример. Вернемся к задаче, сформулированной в начале этого пункта: найти максимум функции $\vartheta = xyz$ при условии, что

$$xy + xz + yz - a = 0 \quad (x > 0, y > 0, z > 0) \tag{58}$$

Составим вспомогательную функцию $F(x, y, \lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - a)$. Найдем ее частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} yz + \lambda(y+z) = 0, \\ xz + \lambda(x+z) = 0, \\ xy + \lambda(x+y) = 0. \end{cases} \tag{59}$$

Задача сводится к решению системы четырех уравнений (58) и (59) с четырьмя неизвестными (x, y, z и λ). Для решения этой системы умножим первое из уравнений (59) на x, второе – на y, третье – на z и сложим их; принимая во внимание равенство (58), находим $\lambda = -\dfrac{3xyz}{2a}$. Вставляя в уравнения (59) найдем значение λ, получим: $\begin{cases} yz\left[1 - \dfrac{3x}{2a}(y+z)\right] = 0, \\ xz\left[1 - \dfrac{3y}{2a}(x+z)\right] = 0, \\ xy\left[1 - \dfrac{3z}{2a}(x+y)\right] = 0. \end{cases}$ Так как x, y, z по смыслу задачи отличны от нуля, из последних уравнений имеем: $\dfrac{3x}{2a}(y+z) = 1$, $\dfrac{3y}{2a}(x+z) = 1$, $\dfrac{3z}{2a}(x+y) = 1$. Из первых уравнений находим $x = y$, из второго и третьего уравнений $y = z$. Но в таком случае из уравнения (58) получаем $x = y = z = \sqrt{\dfrac{a}{3}}$. Это – единственная система значений x, y, z, при которых может быть максимум или минимум.

Можно доказать, что полученное решение дает максимум. Впрочем, это ясно и из геометрических соображений (в условиях задачи объем коробки не может быть неограниченно большим; следовательно, естественно ожидать, что при каких – то определенных значениях сторон этот объем будет наибольшим).

Итак, для того чтобы объем коробки был наибольшим, эта коробка должна быть кубом, ребро которого равно $\sqrt{\frac{a}{3}}$.

13. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Пример 1. Найти и изобразить область определения функции.

$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$

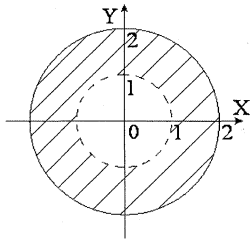


Рис. 12

Решение. Данная функция определена и принимает действительные значения при

$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ 4 - x^2 - y^2 > 0 \end{cases}$ (рис. 12).

Перепишем неравенства в виде $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$.

Таким образом, искомая область D есть кольцо, заключенное между окружностями радиуса R=1 и R=2 с центром в начале координат. При этом внутренняя окружность включается в область D, а внешняя окружность в область D не входит.

Пример 2. Вычислить предел: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{1 - \sqrt{1 + x^2 y^2}}{x^2 + y^2}$.

Решение. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{1 - \sqrt{1 + x^2 y^2}}{x^2 + y^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\left(1 - \sqrt{1 + x^2 y^2}\right)\left(1 + \sqrt{1 + x^2 y^2}\right)}{\left(x^2 + y^2\right)\left(1 + \sqrt{1 + x^2 y^2}\right)} =$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y^2}{\left(x^2 + y^2\right)\left(1 + \sqrt{1 + x^2 y^2}\right)}$,

перейдем к полярным координатам: $\begin{bmatrix} x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, \\ x^2 + y^2 = \rho^2, \\ x \to 0, y \to 0 \Rightarrow \rho \to 0 \end{bmatrix}$. Получим

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^4 \cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi}{\rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\left(1 + \sqrt{1 + \rho^4 \cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi}\right)} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2 \cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi}{1 + \sqrt{1 + \rho^4 \cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi}} = 0,$$

так как $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\rho^2}{1+\sqrt{1+\rho^4\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi}}=0$, а функция $f(\varphi)=\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi$ ограничена.

Пример 3. Дана функция $z=y\ln(x+y)-xe^{x+y}$. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x+y}-e^{x+y}-xe^{x+y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\ln(x+y)+\frac{y}{x+y}-xe^{x+y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y}{(x+y)^2}-e^{x+y}-e^{x+y}-xe^{x+y}=-\frac{y}{(x+y)^2}-2e^{x+y}-xe^{x+y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+y}-\frac{y}{(x+y)^2}-xe^{x+y}=\frac{2}{x+y}-\frac{y}{(x+y)^2}-xe^{x+y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x+y}-\frac{y}{(x+y)^2}-e^{x+y}-xe^{x+y}$$

$$-\frac{y}{(x+y)^2}-2e^{x+y}-xe^{x+y}+\frac{2}{x+y}-\frac{y}{(x+y)^2}-xe^{x+y}=$$

$$2\left(\frac{1}{x+y}-\frac{y}{(x+y)^2}-e^{x+y}-xe^{x+y}\right)$$

$-\dfrac{2y}{(x+y)^2}-2e^{x+y}-2xe^{x+y}+\dfrac{2}{x+y}=-\dfrac{2y}{(x+y)^2}-2e^{x+y}-2xe^{x+y}+\dfrac{2}{x+y}$, что и требовалось доказать.

Пример 4. Найти производные z'_x и z'_y от функции, заданной неявно.

$$z^2-2xyz+\cos(x-z)=0$$

Решение. Если функция $z=f(x,y)$ задана неявным уравнением $F(x,y,z)=0$, то частные производные находятся по формулам

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z} \text{ и } z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Находим последовательно все частные производные:

$F'_x=-2yz-\sin(x-z)$, $F'_y=-2xz$, $F'_z=2z-2xy+\sin(x-z)$.

Тогда, $z'_x = \dfrac{2yz + \sin(x-z)}{2z - 2xy + \sin(x-z)}$, $z'_y = \dfrac{2xz}{2z - 2xy + \sin(x-z)}$.

Обратите внимание, что для нахождения частных производных нет необходимости выражать z через x и y в явном виде.

Пример 5. Дана функция $z = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$ и две точки $A(2;1)$ и $B(2,02;1,05)$. Требуется вычислить приближенное значение z функции в точке B, исходя из значения z_0 функции в точке A и заменив приращение функции при переходе от точки A к точке B дифференциалом.

Решение. Используя формулу для приближенного вычисления, вычислим приближенное значение z функции в точке B:

$z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx z'_x|_{(x_0;y_0)} \cdot \Delta x + z'_y|_{(x_0;y_0)} \cdot \Delta y + z(x_0;y_0)$.

$x = x_0 + \Delta x = 2 + 0,02$, $y = y_0 + \Delta y = 1 + 0,05$.

Вычислим $z_0 = z(x_0;y_0) = z(2;1) = \dfrac{2-1}{2^2+1^2} = \dfrac{1}{5} = 0,2$,

$z'_x = \dfrac{y^2 + 2xy - x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $z'_x(x_0;y_0) = \dfrac{1^2 + 2\cdot 2\cdot 1 - 2^2}{(2^2+1^2)^2} = \dfrac{1}{25} = 0,04$,

$z'_y = \dfrac{y^2 - 2xy - x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $z'_y(x_0;y_0) = \dfrac{1^2 - 2\cdot 2\cdot 1 - 2^2}{(2^2+1^2)^2} = -\dfrac{7}{25} = -0,28$.

Подставив найденные значения в формулу, получаем:

$z = z(2,02;1,05) \approx 0,04 \cdot 0,02 + (-0,28)\cdot 0,05 + 0,2 \approx 0,1868$.

Ответ: 0,1868

Пример 6. Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой к поверхности в точке $A(x;y;z)$.

a) $z = \sqrt{x^2+y^2} - xy$, $A(3;4;-7)$.

b) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$, $A(1;2;-1)$.

Решение.

a) Если поверхность задана уравнением $z = f(x;y)$, то уравнение касательной плоскости, проходящей через точку $A_0(x_0;y_0;z_0)$, имеет вид $z - z_0 = z'_x(A_0)\cdot(x - x_0) + z'_y(A_0)\cdot(y - y_0)$;

канонические уравнение нормали в точке $A_0(x_0;y_0;z_0)$:

$\dfrac{x - x_0}{z'_x(A_0)} = \dfrac{y - y_0}{z'_y(A_0)} = \dfrac{z - z_0}{-1}$.

В нашем случае

$z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - y$, $z'_x(A) = \dfrac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} - 4 = \dfrac{3}{5} - 4 = -\dfrac{17}{5}$,

$z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x$, $z'_y(A) = \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} - 3 = \frac{4}{5} - 3 = -\frac{11}{5}$.

Составим уравнение касательной плоскости:

$z + 7 = -\frac{17}{5}(x-3) - \frac{11}{5}(y-4)$ или $17x + 11y + 5z - 60 = 0$.

Составим канонические уравнение нормали:

$\frac{x-3}{-\frac{17}{5}} = \frac{y-4}{-\frac{11}{5}} = \frac{z+7}{-1}$ или $\frac{x-3}{17} = \frac{y-4}{11} = \frac{z+7}{5}$.

b) Если поверхность задана уравнением $F(x;y;z) = 0$, то уравнение касательной плоскости, проходящей через точку $A_0(x_0;y_0;z_0)$, имеет вид $F'_x(A_0)\cdot(x-x_0) + F'_y(A_0)\cdot(y-y_0) + F'_z(A_0)\cdot(z-z_0) = 0$;

канонические уравнение нормали в точке $A_0(x_0;y_0;z_0)$:

$\frac{x-x_0}{F'_x(A_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(A_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(A_0)}$.

В нашем случае

$F'_x = 3x^2 + yz$, $F'_x(A) = 1$,

$F'_y = 3y^2 + xz$, $F'_y(A) = 11$,

$F'_z = 3z^2 + xy$, $F'_z(A) = 5$

Составим уравнение касательной плоскости:

$(x-1) + 11(y-2) + 5(z+1) = 0$ или $x + 11y + 5z - 18 = 0$.

Составим канонические уравнение нормали:

$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}$.

Пример 7. Найти точки экстремума функции $z = 2x^2 + y^2 - 2x - 3y + xy$

Решение.

1) Найдем стационарные точки функции из условия: $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 2 + y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 3 + x$. Получаем систему:

$$\begin{cases} 4x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/7 \\ y = 10/7 \end{cases}.$$

Получили одну стационарную точку $\left(\frac{1}{7};\frac{10}{7}\right)$

2) Проверим стационарную точку на экстремум:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4;\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1;\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2;$$

Найдем определитель $\Delta=\begin{vmatrix} AB \\ BC \end{vmatrix}$

$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=7>0\Rightarrow$ точка $\left(\frac{1}{7};\frac{10}{7}\right)$ является точкой экстремума, а так как $A=4>0\Rightarrow$ это точка минимума.

Ответ: точка $\left(\frac{1}{7};\frac{10}{7}\right)$ – точка минимума.

Пример 8: Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=2x^2+y^2-2x-3y+xy$ в замкнутой области $D: x=0; y=1; x+y=2$

Решение:

1) Найдем стационарные точки функции из условия: $\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=0.$

$\frac{\partial z}{\partial x}=4x-2+y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y-3+x.$ Получаем систему:

$$\begin{cases} 4x+y=2 \\ x+2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1/7 \\ y=10/7 \end{cases}.$$

Получили одну стационарную точку $\left(\frac{1}{7};\frac{10}{7}\right)$

2) Построим на координатной плоскости заданную область D (рис. 13).

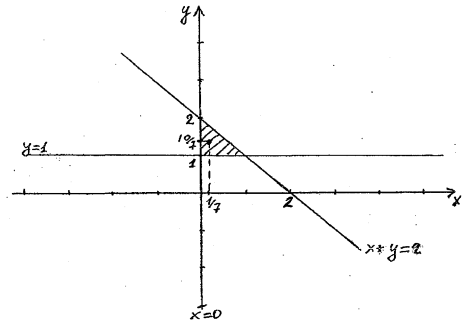


Рис. 13

Точка $\left(\frac{1}{7};\frac{10}{7}\right)$ принадлежит заданной области, так как $x=\frac{1}{7}>0$, $y=\frac{10}{7}>1$, $\frac{1}{7}+\frac{10}{7}=\frac{11}{7}<2$. Найдем значение функции в этой точке:

$z(\frac{1}{7};\frac{10}{7})=-\frac{112}{49}=-2\frac{2}{7}$.

3) Рассмотрим поведение функции z на границах области.

1. $y=1;\quad 0\le x\le 1$

$z=2x^2+1^2-2x-3+x=2x^2-x-2$; исследуем поученную функцию на наибольшее и наименьшее значения на области $0\le x\le 1$;

$z'=0\Rightarrow z'=4x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{4}$.

$x=\frac{1}{4}\in[0;1]\Rightarrow$ находим значение функции z в этой точке:

$z(\frac{1}{4})=-2\frac{1}{8}$; а также значение функции на концах отрезка:

$z(0)=-2;$

$z(1)=-1.$

2. $x=0;\quad 1\le y\le 2$

$z=y^2-3y$; исследуем поученную функцию на наибольшее и наименьшее значения на области $1\le y\le 2$;

$z'=0\Rightarrow z'=2y-3=0\Rightarrow y=\frac{3}{2}$.

$y=\frac{3}{2}\in[1;2]\Rightarrow$ находим значение функции z в этой точке:

$z(\frac{3}{2})=-\frac{9}{4}=-2\frac{1}{4}$; а также значение функции на концах отрезка:

$z(1)=-2;$

$z(2)=-2.$

3. $y=2-x;\quad 0\le \mathrm{x}\le 1$

$z=2x^2+(2-x)^2-2x-3(2-x)+x(2-x);$

$z=2x^2-x-2$, исследуем поученную функцию на наибольшее и наименьшее значения на области $0\le x\le 1$;

$z'=0\Rightarrow z'=4x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{4}$.

$x=\frac{1}{4}\in[0;1]\Rightarrow$ находим значение функции z в этой точке:

$z(\frac{1}{4})=-2\frac{1}{8}$; а также значение функции на концах отрезка:

$z(0)=-2;$

$z(1)=-1.$

4) Из всех найденных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее. Получаем: наибольшее $z(1;1)=-1$; наименьшее $z(\frac{1}{7};\frac{10}{7})=-\frac{112}{49}=-2\frac{2}{7}$.

Ответ: наибольшее $z(1;1)=-1$; наименьшее $z(\frac{1}{7};\frac{10}{7})=-2\frac{2}{7}$.

Пример 9. Исследовать на условный экстремум методом Лагранжа функцию:

$z=2x+6y$ при $x^2+y^2=10$.

Решение:

$z=2x+6y$ - функция, $x^2+y^2=10$ - уравнение связи.

1) Составим вспомогательную функцию:

$\Phi(x,y,\lambda)=2x+6y+\lambda\left(x^2+y^2-10\right)$, λ -множитель Лагранжа.

2) Решим систему уравнений (необходимое условие экстремума):

$$\begin{cases}\Phi'_x(x,y,\lambda)=2+2\lambda x=0\\ \Phi'_y(x,y,\lambda)=6+2\lambda y=0\\ \Phi'_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+y^2-10=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{\lambda}\\ y=-\frac{3}{\lambda}\\ x^2+y^2-10=0\end{cases}\Rightarrow\left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2+\left(-\frac{3}{\lambda}\right)^2-10=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow\lambda^2=1$, $\lambda\neq 0$

$$\left[\begin{array}{l}\lambda_1=1\\ x_1=-1\\ y_1=-3\end{array}\right.,\qquad\left[\begin{array}{l}\lambda_2=-1\\ x_2=1\\ y_2=3\end{array}\right.$$

$M_1(-1,-3)$, $M_2(1,3)$.

3) В условиях задачи условный максимум или условный минимум может быть только в полученных точках M_1 и M_2.

$z(M_1)=2\cdot(-1)+6\cdot(-3)=-20$

$z(M_2)=2\cdot 1+6\cdot 3=20$.

Так как функция $z=2x+6y$ непрерывна на данном замкнутом ограниченном множества, то в точке $M_1(-1,-3)$ находится условный минимум $z_{\min}=z(-1,-3)=-20$, а в точке $M_2(1,3)$ – условный максимум $z_{\max}=z(1,3)=20$.

Ответ. $z_{\min}=-20$, $z_{\max}=20$.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

Задача 1

Найти и изобразить на плоскости область определения функции:

1. $z=\sqrt{2x+y}+\sqrt{x-2y}$
2. $z=\ln x+\ln(y^2-4x)$
3. $z=\sqrt{x-2\sqrt{y}}$
4. $z=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2-\frac{1}{2}y^2}}$
5. $z=\ln(y^2-4x+8)^{-1}$
6. $z=\arccos\dfrac{x^2+y^2}{9}$
7. $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$
8. $z=\sqrt{\ln\dfrac{9}{x^2+y^2}}$
9. $z=\arcsin\dfrac{x}{5}+\sqrt{xy}$
10. $z=\sqrt{y\sin x}$
11. $z=\ln(9x^2-36x+4y^2+8y+4)$
12. $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$
13. $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$
14. $z=(\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}-1)^{-\frac{1}{2}}$
15. $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$
16. $z=\arccos\dfrac{x}{x^2+y^2}$
17. $z=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+x}}$
18. $z=\operatorname{arctg}\sqrt{e^{-xy}-1}$

19. $z = \ln(-x) + \sqrt[3]{\sin xy}$

20. $z = x + 2\sqrt{-5 - 6y - y^2}$

21. $z = \ln(5x^2 + 9y - 30x + 9)$

22. $z = x^2 y \sqrt[4]{x^2 + y^2 + y}$

23. $z = \sqrt{x + \sqrt{6 - 2y} - 2}$

24. $z = \ln(3 - 4\sqrt{x - 1} - y)$

25. $z = \arccos \dfrac{x^2}{y^2}$

Задача 2

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 2}} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 - 2xy + y^2 + x - y}$;

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 3}} \left(1 + xy^2\right)^{\frac{y}{x^7 y + xy^2}}$;

3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2 y^2 + 4} - 2}{x^2 + y^2}$;

4. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} (1 + xy)^{\frac{2}{x^2 + xy}}$;

5. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\ln(1 + 2xy)}{\sin 3xy}$;

6. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2 - \sqrt{x + y + 4}}{x + y}$;

7. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \dfrac{tg 2xy}{x^2 y}$;

8. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to -1}} \dfrac{x^3 + y^3}{2x + 2y}$;

9. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$;

10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2y^2+9}-3}$;

11. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{x^3-y^3}{3x^3+5yx-3x^2y-5y^2}$;

12. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin^2\left(4x^2y\right)}{\cos 8xy-1}$;

13. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{\sin^2 x}{y^3x^2-x^3}$

14. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin x^2y}{3x^2y}$

15. $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to 1}} \dfrac{16y^2-x^2}{3x^2-y^2x-12xy+4y^3}$

16. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{\sin x^3y}{x^2+y^2}$

17. $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ y\to 1}} \dfrac{x^2-25y^2}{2x^2+3xy^2-10xy-15y^3}$

18. $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to 1}} \dfrac{16y^2-x^2}{2x^3-5xy^3-8x^2y+20y^4}$

19. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{yx^3-x^2}{\sin^2 4x}$

20. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 3}} \dfrac{27x^3-y^3}{12x^2y+6x^4-4y^2x-2x^3y}$

21. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \dfrac{x^2-4y^2}{8y^3-x^3}$

22. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \left(1+x^2y\right)^{\frac{x}{2y}}$

23. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} (1-xy)^{\frac{x^2+y^2}{x}}$

24. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{16-x^2y^2}-4}{x^2+y^2}$

25. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{y^2-4x^2}{y^3-8x^3}$

Задача 3

Проверить равенства:

1. Дана функция $z=\dfrac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{16y}}$. Показать, что $\dfrac{\partial z}{\partial y}=4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
2. Дана функция $z=ytg\left(x+y\right)$. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.
3. Дана функция $z=\cos x^2-2xy\sin x^2$. Показать, что $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.
4. Дана функция $z=x\cos\left(x+y\right)+y\sin\left(x+y\right)$. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.
5. Дана функция $z=\ln\left(x^2+y^2+2x+1\right)$. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.
6. Дана функция $z=\sin\left(x+\cos y\right)$. Показать, что $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
7. Дана функция $z=e^{xy}$. Показать, что $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2xyz=0$.
8. Дана функция $z=x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Показать, что $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.
9. Дана функция $z=\ln\left(x+e^{-y}\right)$. Показать, что $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$.
10. Дана функция $z=e^{tgx}arctg\left(y^2-1\right)$. Показать, что $z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$.
11. Дана функция $z=\dfrac{1}{y}\left[\ln\left(2x+y\right)+e^{2x-y}\right]$. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{4}{y^2}\cdot\dfrac{\partial}{\partial y}\left(y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$.

12.Дана функция $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2$.

13.Дана функция $z=x^y$. Показать, что $y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(1+y\ln x\right)\frac{\partial z}{\partial x}$.

14.Дана функция $z=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

15.Дана функция $z=xe^{y/x}$. Показать, что $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

16.Дана функция $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

17.Дана функция $z=\left(x-2y\right)^2+\sin\left(x+2y\right)$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

18.Дана функция $z=xtg\left(x+y\right)+yctg\left(x+y\right)$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

19.Дана функция $z=\frac{1}{2}\left[\cos\left(x-y\right)+\sin\left(x+y\right)\right]$. Показать, что $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial x}\right)=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

20.Дана функция $z=xe^y+ye^x$. Показать, что $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=x\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}+y\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$.

21.Дана функция $z=x\sin y$. Показать, что $\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}$.

22.Дана функция $z=\frac{xy}{x-y}$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2}{x-y}$.

23.Дана функция $z=\ln\left(x^2+1\right)+\frac{2xy}{x^2+1}$. Показать, что $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

24.Дана функция $z=\ln x^3\sin^2 y$. Показать, что $z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$.

25.Дана функция $z=x^2\sin\frac{y}{x}$. Показать, что $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^2\sin\frac{y}{x}$.

Задача 4

Найти производные z'_x и z'_y от функции, заданной неявно:

1. $z^3 + \sin(xz) + \operatorname{arctg}(y+z) = 2$
2. $x^y - 5xyz = 20x^z$
3. $\ln(x+z) - \dfrac{xy}{2} = 25z$
4. $e^{xyz} + \dfrac{x+z}{y} = x^3$
5. $\sin(xyz) - x^2y + z = 0$
6. $\operatorname{arctg}(\dfrac{z}{x}) + 2^{xy} = z$
7. $(x^2+y^2+z^2)^2 - a^2(x^2 - y^z) = 0$
8. $xze^y + z^2xy = 5$
9. $ye^{xz} + 2z^3x^2y = 0$
10. $x^2e^{yz} + xyz = 3$
11. $z\sin(x^2y) + xyz = 10$
12. $\operatorname{arctg}(2x-3y) + xzy = 8$
13. $e^{xz} - \cos(2xz) + y^2 = 0$
14. $e^{yz} + 2\sin(x^2y) + z = 0$
15. $x^y + zx - yz = 0$
16. $z\ln(x+z) - \dfrac{xy}{3} = 0$
17. $xz - e^{\frac{z}{y}} + x^3 + y^3 = 0$
18. $z^2\ln(y+z) - \dfrac{xy}{2} = 1$
19. $yz - e^{\frac{x}{y}} + z^2 + x^3 + 4y^3 = 0$
20. $z^3\ln(x+y) - 3x^2y = 10$
21. $xyz - e^{\frac{z}{5}} + x^2 + y^2 = 0$
22. $x^2\ln(yz) + \dfrac{y}{z} - 7 = 0$
23. $\cos^3(xy) + \cos^3(yz) + \cos^3(xz) = 1$
24. $e^{yxz} + \sin(xy) + zx = 0$
25. $\cos(x^2yz) + xy + 5z = 0$

Задача 5

Дана функция $z = f(x;y)$ и две точки $A(x_0;y_0)$ и $B(x_1;y_1)$. Требуется вычислить приближенное значение функции z в точке B, исходя из значения z_0 функции в точке A и заменив приращение функции при переходе от точки A к точке B дифференциалом:

1. $z = x^y$, $A(1;2)$, $B(1,04;2,05)$.
2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $A(4;3)$, $B(4,05;2,95)$.
3. $z = \operatorname{arctg}(\frac{x}{y} - 1)$, $A(2;1)$, $B(1,98;1,02)$.
4. $z = x^{y+1}$, $A(1;2)$, $B(0,98;2,02)$.
5. $z = x^3y^4 + 1$, $A(2;1)$, $B(2,02;0,97)$.
6. $z = \ln(x^3 + y^3)$, $A(0;1)$, $B(0,08;0,99)$.
7. $z = \ln(\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{y} - 1)$, $A(1;1)$, $B(1,02;0,98)$.
8. $z = \ln(\sqrt{x} - \sqrt[3]{y})$, $A(4;1)$, $B(4,02;1,03)$.
9. $z = x^{2y}$, $A(1;2)$, $B(1,02;2,02)$.
10. $z = \sqrt{2x + y^2}$, $A(8;3)$, $B(8,01;3,03)$.
11. $z = x^{13}y^{21}$, $A(1;1)$, $B(1,02;0,97)$.
12. $z = x^5y^4$, $A(1;1)$, $B(1,03;0,99)$.
13. $z = x^2 \cdot \sqrt{21 + y^2}$, $A(2;2)$, $B(2,03;2,01)$.
14. $z = \ln(x^3 + y^2)$, $A(0;1)$, $B(0,04;1,04)$.
15. $z = \frac{x^2}{10}\sqrt{21 + y^2}$, $A(4;2)$, $B(4,01;1,95)$.
16. $z = 2x^3 + 3xy^2 + y^2$, $A(1;1)$, $B(1,02;1,05)$.
17. $z = x^4 + 2x^2y + y^4$, $A(1;2)$, $B(1,01;1,97)$.
18. $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$, $A(2;1)$, $B(2,01;1,03)$.
19. $z = \sqrt{x^4 + y^3}$, $A(1;2)$, $B(1,02;1,98)$.
20. $z = \sqrt[3]{x^3 + y}$, $A(2;117)$, $B(2,025;117,15)$.
21. $z = y^3 \cdot \sqrt{12 + x^2}$, $A(2;3)$, $B(2,02;2,98)$.
22. $z = x^2 \cdot \sqrt{13 + y}$, $A(3;3)$, $B(3,02;3,03)$.
23. $z = \ln(\sqrt[5]{x} - \sqrt[4]{y} + 1)$, $A(1;1)$, $B(1,05;0,98)$.

24. $z=\ln(x^2+y^2)$, $A(1;0)$, $B(1,04;0,04)$.

25. $z=\sqrt{5e^x+y^2}$, $A(0;2)$, $B(0,02;2,03)$.

Задача 6

Составить уравнения касательной плоскости и нормальной прямой к поверхности в точке $A(x;y;z)$:

1. $z=x^2+xy+y^2$, $A(1;2;7)$.
2. $z^2=2x^2+3y^2$, $A(1;-1;5)$.
3. $z=x^2+3xy-6y$, $A(4;1;22)$.
4. $x^2-y^2-5z=0$, $A(0;5;-5)$.
5. $z=\sin x\cdot\cos y$, $A(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{1}{2})$.
6. $x^2+y^2+3z^2=1$, $A(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{\sqrt{6}})$.
7. $z=3x^2-xy+2y^2$, $A(-1;3;24)$.
8. $x^2yz+2x^2z-3xyz+2=0$, $A(1;0;-1)$.
9. $z=2xy-5x+3y^2$, $A(3;4;57)$.
10. $100x^2+75y^2-12z^2+300=0$, $A(3;0;-10)$.
11. $z=3x^2+4xy-y^2$, $A(0;1;-1)$.
12. $-z^2+x^2-2y^2=3$, $A(-2;0;1)$.
13. $z=3x^2-xy+x+y$, $A(1;3;4)$.
14. 14. $x^2+z^2=5$, $A(-1;6;2)$.
15. $z=x^2-y^2+6x+3y$, $A(2;3;16)$.
16. $x^3y-8yz+4y^3-xz^2=2$, $A(1;-1;7)$.
17. $z=\ln(x^2+y^2)$, $A(1;0;0)$.
18. $x^2+y^2+(z-2)^2=2$, $A(0;1;1)$.
19. $z=xy-2x+2y^2$, $A(1;2;8)$.
20. $x^2+2y^2-4z^2=5$, $A(1;2;1)$.
21. $z=x^2-y^2+5x+4y$, $A(3;3;27)$.
22. $e^z+xy-z=3$, $A(2;1;0)$.
23. $z=\sin\frac{x}{y}$, $A(\pi;1;0)$.
24. $(z^2-x^2)xyz-y^5=5$, $A(1;1;2)$.
25. $z=x^2+2xy+3y^2$, $A(2;1;11)$.

Задача 7

Найти точки экстремума функции:

1. $z = 2x^2 - 3y^2 + 4x \cdot y - 6x + 2y$
2. $z = 3x^2 - y^2 - x \cdot y + x + 3y$
3. $z = -x^2 - 2y^2 + 3 \cdot x \cdot y + 4 \cdot x + 6$
4. $z = 4x^2 + y^2 + 2x \cdot y - 5y$
5. $z = -3x^2 - 3y^2 + x \cdot y + 2x + y$
6. $z = 2x^2 + y^2 + 5x \cdot y - 3x - 2y$
7. $z = -x^2 + 3y^2 - x \cdot y + 4x - 3y + 2$
8. $z = -x^2 - 2y^2 + 3x \cdot y - 6x + y + 3$
9. $z = x^2 + 5y^2 - 10x \cdot y + 3x - 4y + 1$
10. $z = -x^2 - 3y^2 + 5x \cdot y - 4x - 2y + 6$
11. $z = x^2 + 4y^2 + 3x \cdot y - 3x - y + 6$
12. $z = x^2 + y^2 + 4x \cdot y + 6x - 3y + 7$
13. $z = -3x^2 - 5y^2 + 3x \cdot y + 10x - 3$
14. $z = 5x^2 - 3y^2 + 8x \cdot y - 6x - 10y + 100$
15. $z = -2x^2 + y^2 - 3x \cdot y + 5x + 5y + 2$
16. $z = 5x^2 + 3y^2 - 4x \cdot y - x + y - 3$
17. $z = 4x^2 - 4y^2 + x \cdot y + 3x - 5y$
18. $z = -4x^2 + y^2 + x \cdot y + 8x + 6y + 10$
19. $z = 3x^2 + 5y^2 - 3x \cdot y - 5x - y + 12$
20. $z = 2x^2 + 3y^2 + 2x \cdot y + 4x + y + 8$
21. $z = x^2 - 2y^2 - 2x \cdot y - 3x - 7y - 6$
22. $z = -8x^2 + y^2 + 4x \cdot y + 2x + 3y + 14$
23. $z = -7x^2 - 6y^2 - 7x \cdot y - 6x - 7y - 10$
24. $z = 5x^2 + 4y^2 + 3x \cdot y + 3x + 5y + 2$
25. $z = x^2 - 3y^2 - 4x \cdot y - 4x - 3y - 1$

Задача 8

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D:

1. $z = x^2 + y^2 - 5$; $D: x^2 + y^2 \le 1$
2. $z = 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 10$; $D: 0 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 3$
3. $z = x^2 - 3xy + 2x - y^2$; $D: x = -1;\ y=0;\ y + x = 1$
4. $z = x^2 - xy + x + y^2$; $D: x = 0;\ y = -1;\ y = \frac{x}{2} + 1$
5. $z = x^2 + y^2 - 4xy + 5$; $D: 0 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 2$
6. $z = 3 - x^2 - y^2 + 4x - y$; $D: x = 0;\ y = -1;\ x + y = 2$
7. $z = 2x^2 - 4y^2 + 3xy - x$; $D: x = 1;\ y = 0;\ y = x$
8. $z = x^2 + 3y^2 - x + 3y$; $D:\ y \le 0;\ x^2 + y^2 = 1$
9. $z = x^2 + y^2 - 3xy + 3x$; $D:\ -1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2$
10. $z = 3x^2 - y^2 + 4xy - y$; $D:\ x = -1,\ y = -1,\ x + y = 1$
11. $z = -x^2 + 4y^2 + 2xy + 2x + y$; $D:\ x = 2,\ y = 0,\ y = -x$
12. $z = -x^2 + 2xy + 5$; $D:\ y = 0\ \ y = 4 - x^2$
13. $z = x^2 - y^2 + 3xy - 5x$; $D:\ x = 1,\ y = 0\ ,\ x + y = -2$
14. $z = 3x^2 - xy + y^2$; $D:\ -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3$
15. $z = 2x^2 + 3y^2 + 3xy - x$; $D:\ 0 \le x \le 2,\ \ -1 \le y \le 1$
16. $z = -x^2 - 2y^2 + 4xy + y$; $D:\ x = 1,\ y = -1,\ x + y = -1$
17. $z = x^2 - y^2 - 2xy - 4x$; $D:\ 0 \le x \le 2,\ -2 \le y \le 0$
18. $z = x^2 + xy - 5$; $D:\ y \ge 0,\ x^2 + y^2 = 4$
19. $z = -x^2 - y^2 + 3$; $D:\ x^2 + y^2 = 9$
20. $z = -x^2 - y^2 + xy + 4x - y$; $D:\ 1 \le x \le 3,\ -1 \le y \le 2$
21. $z = x^2 + 2y^2 + 5 + 2x$; $D:\ x^2 = 4 - y^2,\ y \le 0$
22. $z = x^2 - 6y^2 + xy$; $D:\ 0 \le x \le 3,\ -1 \le y \le 1$
23. $z = -x^2 + 3y^2 + 3xy + x$; $D:\ y = 0,\ y = x - 1,\ x = 0$
24. $z = -x^2 - y^2 + 3xy + 1$; $D:\ x = 1,\ y = 0,\ y = x^2$
25. $z = -x^2 - y^2 - xy + 4$; $D:\ y^2 = 9 - x^2,\ y \le 0$

Задача 9

Исследовать на условный экстремум методом Лагранжа функцию:

1. $z = x^2 + 2y^2$ при $3x + 2y = 11$;
2. $z = xy$ при $2x + 3y - 5 = 0$;
3. $z = (x+1)^2 + y^2$ при $y^2 - x^3 = 0$;
4. $z = xy$ при $x + y = 1$;

5. $z=\cos^2 x+\cos^2 y$ при $x-y=\frac{\pi}{4}$;

6. $z=x^2+y^2$ при $x+y=1$

7. $z=x^2+y^2-xy+x+y-4$ при $x+y+3=0$;

8. $z=x^2+y^2$ при $y^2-x=0$;

9. $z=xy^2$ при $x+2y=1$;

10. $z=x+2y$ при $x^2+y^2=1$;

11. $z=x+y$ при $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}$;

12. $z=2x+y$ при $x^2+y^2=5$;

13. $z=x^2+y^2$ при $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$;

14. $z=x$ при $y^2-x^3=0$;

15. $z=2x+y$ при $x^2+y^2=1$;

16. $z=x^2+y^2$ при $(x-1)^2+y^2=4$;

17. $z=xy$ при $(x-1)^2+y^2-1=0$;

18. $z=x+y$ при $xy-1=0$;

19. $z=xy$ при $x^2+y^2=2$;

20. $z=x+2y$ при $x^2+y^2=5$;

21. $z=x^2+y^2$ при $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$;

22. $z=x+y$ при $x^2+y^2=2$;

23. $z=xy$ при $x^2+y^2=1$;

24. $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ при $x+y=2$;

25. $z=x^2+y^2$ при $x^2+2y^2=8$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа для ВТУЗов./ А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1969.
2. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа/ Л.Д. Кудрявцев. – М.:Высшая школа, 1981. – Т. 1.
3. Садовничая, И.В. Математический анализ. Функции многих переменных: теория и задачи./ И.В. Садовничая, Т.Н. Фоменко. – М.:ООО «МАКС Пресс», 2008.
4. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов/ Н.С. Пискунов. – М.:Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1966. – Т. 1.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Техн. редактор А.В. Миних

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 22.06.2009. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 3,95. Тираж 100 экз. Заказ 362/461. Цена С.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.