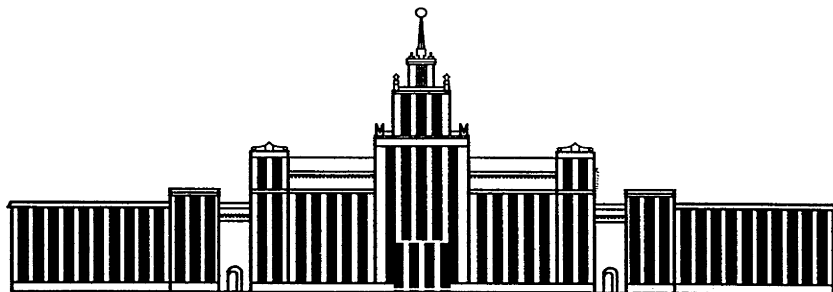

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

517(07)
Г859

А.А. Гришкевич
ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Учебное пособие

Челябинск
2012

Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра «Математический анализ»

517(07)
Г859

А.А. Гришкевич

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Учебное пособие

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2012

УДК 517.1(075.8)
Г859

Одобрено
учебно-методической комиссией механико-математического факультета

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук М.М. Кипнис, ЧГПУ,
доктор физ.-мат. наук В.Е. Федоров, ЧелГУ

Гришкевич, А.А.

Г859 Теория поля: учебное пособие / А.А. Гришкевич. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012. – 64 с.

В пособии рассмотрены основные понятия теории поля: производная по направлению, градиент скалярного поля; поток, дивергенция, линейный интеграл, циркуляция, вихрь векторного поля; потенциальные и соленоидальные поля. Приведены с доказательством теоремы Остроградского–Гаусса и Стокса. Основные операции над векторным и скалярным полями выражены в криволинейных ортогональных координатах.

Пособие предназначено для бакалавров и магистров, обучающихся по укрупненной группе специальностей 140000 в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования 3-его поколения.

УДК 517.1(075.8)

© Издательский центр ЮУрГУ, 2012

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие предназначено, в первую очередь, для студентов, обучающихся по укрупненной группе специальностей 140000 и изучающих раздел "Теория поля" дисциплины "Высшая математика" в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования 3-его поколения (ФГОС-3).

Настоящее пособие окажет существенную помощь студентам в усвоении раздела "Теория поля". Дело в том, что количество лекционных часов, отводимых на этот раздел, весьма ограничено. А самостоятельное изучение раздела "Теория поля" по стандартным учебникам (таким, как Я.С. Бугров, С.Н. Никольский "Высшая математика"; Л.Д. Кудрявцев "Курс математического анализа"; В.И. Смирнов "Курс высшей математики") затруднено, т.к. соответствующий материал, технически достаточно громоздкий, рассредоточен по разным главам указанных учебников, и восприятие его как единого целого требует определенной математической культуры. Изложение же указанного раздела в специализированных пособиях (И.А. Гольдфайн "Векторный анализ и теория поля"; Г.Д. Алапашвили "Основы векторного анализа и элементы теории поля") выходит за рамки программ математических дисциплин ФГОС-3.

Предполагается, что читатели знакомы со следующими темами разделов "Линейная алгебра и аналитическая геометрия" и "Математический анализ" дисциплины "Высшая математика": "геометрические векторы", "аналитическая геометрия", "дифференциальное исчисление функций одной переменной", "интегральное исчисление функций одной переменной", "дифференциальное исчисление функций нескольких переменных", "кратные интегралы". Знакомство с темами "поверхностные интегралы" и "криволинейные интегралы" желательно, но не является необходимым, т.к. определение соответствующих интегралов включено в текст настоящего пособия (§§ 3.2, 4.1). Знание раздела "Дифференциальные уравнения" используется только при получении уравнений векторных линий (§ 1.3).

Глава I. СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

§ 1.1. Скалярное и векторное поле

Пусть Ω – некоторая область трехмерного пространства.

Определение. Скалярным полем называется скалярная функция $\varphi(M)$, определенная в каждой точке M области Ω .

Например, скалярными полями являются распределения плотности, концентрации примесей, температуры в некотором теле; распределение давления в атмосфере Земли, и т.п.

Определение. Векторным полем называется векторная функция $\vec{\alpha}(M)$, определенная в каждой точке M области Ω .

Примеры векторных полей: поле скоростей частиц воды в реке, электрическое поле системы зарядов, магнитное поле проводника с током, гравитационное поле Земли.

Удобно изучать поля, заданные аналитически в некоторой системе координат $Oxyz$. Скалярное поле в этом случае является скалярной функцией координат точки

$$\varphi(M) = \varphi(x, y, z).$$

Векторное поле можно задать при помощи векторной функции координат

$$\vec{\alpha}(M) = \vec{\alpha}(x, y, z),$$

или, что то же, трех скалярных функций $\alpha_x(x, y, z)$, $\alpha_y(x, y, z)$, $\alpha_z(x, y, z)$, являющихся компонентами (координатами) вектора $\vec{\alpha}$ в данной системе координат.

Часто встречаются скалярные или векторные поля, изменяющиеся со временем. Такие поля называют нестационарными, а поля, не менявшиеся со временем, называют стационарными.

Например, скалярное поле плотности жесткого неподвижного тела является стационарным, а скалярное поле влажности воздуха – нестационарно, если влажность воздуха меняется со временем. Всегда нестационарны электрическое и магнитное поля, описывающие распространение электромагнитных волн.

В данном пособии рассматриваются только стационарные поля, либо нестационарные поля в фиксированный момент времени.

Иногда поле можно задать с помощью функции двух переменных координат или даже всего одной координаты. Такие поля называют двумерными или одномерными. Например, двумерно скалярное поле температур воздуха у поверхности земли. Примером одномерного скалярного поля является потенциал линейной электрической цепи. Одномерно гравитационное поле однородного тела, имеющего форму шара, т.к. поле зависит только от расстояния до центра шара и направлено к центру шара.

Скалярное поле называют плоским, если оно может быть описано функцией двух декартовых координат. Векторное поле называют плоским, если его можно описать векторной функцией двух декартовых координат, и при этом составляющая поля вдоль третьей координаты равна нулю. Пример плоского векторного поля – магнитное поле системы достаточно длинных параллельных прямолинейных проводников электрического тока.

Поля, встречающиеся в природе, материальны, т.е. не зависят от наблюдателя. Система координат вводится наблюдателем для удобства описания полей. В разных системах координат одно и то же поле представляется различными функциями. Но величины, являющиеся объективными характеристиками поля, не должны зависеть от выбора системы координат. Такие величины называют инвариантами.

Скалярные и векторные поля – инварианты, поскольку при их определении не используется система координат. Инвариантами являются также расстояние между двумя точками, длина кривой, площадь поверхности, объем области, скалярное произведение векторов, проекция вектора на заданное направление и некоторые другие величины. Не являются инвариантами координаты векторного поля, поскольку они зависят от выбора системы координат.

В дальнейшем система координат $Oxyz$ считается правой декартовой. Ортогональную прямолинейную систему координат называют правой, если можно хотя бы мысленно сориентировать наблюдателя так: первая координатная ось – Ox направлена от наблюдателя вправо, вторая – Oy – вперед, третья – Oz – вверх. Орты координатных осей Ox , Oy , Oz будем обозначать соответственно \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} .

В декартовых координатах проекция векторного поля

$$\bar{\alpha}(x, y, z) = \alpha_x(x, y, z)\bar{i} + \alpha_y(x, y, z)\bar{j} + \alpha_z(x, y, z)\bar{k}$$

на произвольное направление, заданное ортом

$$\bar{n} = \cos(\bar{n}, x)\bar{i} + \cos(\bar{n}, y)\bar{j} + \cos(\bar{n}, z)\bar{k},$$

может быть записана в следующем виде

$$\text{пр}_n \bar{\alpha} = \bar{\alpha} \cdot \bar{n} = \alpha_x \cos(\bar{n}, x) + \alpha_y \cos(\bar{n}, y) + \alpha_z \cos(\bar{n}, z). \quad (1.1)$$

Поскольку проекция вектора $\bar{\alpha}$, на направление \bar{n} – инвариант, то из формулы (1.1) следует, что выражение справа – инвариант, несмотря на то, что оно зависит от неинвариантных компонент (векторов $\bar{\alpha}$ и \bar{n}).

В дальнейшем функции $\varphi(x, y, z)$, $\alpha_x(x, y, z)$, $\alpha_y(x, y, z)$, $\alpha_z(x, y, z)$, задающие поля, будем считать непрерывными в области Ω , а если потребуется, и непрерывно дифференцируемыми.

§ 1.2. Поверхности уровня

Рассмотрим скалярное поле $\varphi(x, y, z)$. Пусть в некоторой точке пространства $M_0(x_0, y_0, z_0)$ функция $\varphi(x, y, z)$ принимает значение $\varphi_0 = \varphi(M_0) = \varphi(x_0, y_0, z_0)$. Отметим все точки, в которых значение функции равно φ_0 . Такие точки, вообще

говоря, образуют поверхность (в предположении, что функция $\varphi(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные по всем переменным, не обращающиеся одновременно в ноль).

Поверхность, на которой значение поля остается постоянным $\varphi(x, y, z) = \text{const}$, называется поверхностью равного уровня или изоповерхностью. Обычно строится семейство поверхностей равного уровня, на которых поле принимает соответственно значения $\varphi_0 = \varphi(M_0)$, $\varphi_1 = \varphi(M_1)$, ..., $\varphi_k = \varphi(M_k)$, $M_0, M_1, \dots, M_k \in \Omega$. Эти поверхности служат геометрическим изображением скалярного поля. Например, на синоптических картах наносятся линии равного уровня для скалярного поля давления – изобары (линии, потому что здесь рассматривается двумерное пространство – карта поверхности Земли).

§ 1.3. Векторные линии

Рассмотрим векторное поле $\vec{a}(x, y, z)$. Для его наглядного изображения введем векторные линии, т.е. такие линии, во всякой точке которых вектор \vec{a} имеет направление касательной к линии (рис. 1.1).

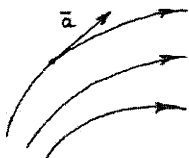


Рис. 1.1

Приближенно векторные линии можно построить следующим образом. Выберем какую-нибудь точку и отложим вдоль отвечающего этой точке вектора отрезок весьма малой длины ε ; с концом этого отрезка поступим аналогичным образом, и т.д. В результате получится ломаная линия, которая тем ближе будет представлять векторную линию, чем меньше взято ε .

На практике векторные линии нередко определяют экспериментально, в частности, при визуализации течений. Например, для экспериментального определения векторных линий проводят фотографирование с малой выдержкой течений жидкости с подмешанными в них взвешенными частицами специальных порошков. Векторные линии магнитного поля легко увидеть, если насыпать на лист бумаги мелкие железные опилки и снизу поднести к нему магнит.

Пусть векторная линия L задана векторным уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k},$$

где s – естественный параметр кривой, равный по модулю длине участка кривой от некоторой фиксированной точки до переменной точки M . Параметр s монотонно возрастает при движении точки M по кривой в направлении, указанном векторами поля.

Возьмем на линии L два соседних значения аргумента s и $s + \Delta s$, найдем соответствующие им значения вектора $\vec{r}(s)$ и $\vec{r}(s + \Delta s)$, составим приращение

вектора, т.е. разность $\Delta \vec{r} = \vec{r}(s + \Delta s) - \vec{r}(s)$. На рис. 1.2 эта разность представляется вектором $\overline{MM_1}$.

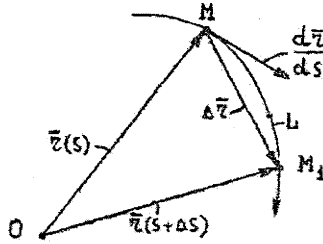


Рис. 1.2

Составим далее отношение

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{\vec{r}(s + \Delta s) - \vec{r}(s)}{\Delta s} = \frac{\Delta x}{\Delta s} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta s} \vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta s} \vec{k}.$$

Вектор $\Delta \vec{r} / \Delta s$ коллинеарен вектору $\Delta \vec{r} = \overline{MM_1}$, т.к. получается из последнего умножением на скалярный множитель $1 / \Delta s$.

Перейдем к пределу при $\Delta s \rightarrow 0$ и, если предел существует, обозначим его

$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \vec{i} + \frac{dy}{ds} \vec{j} + \frac{dz}{ds} \vec{k}.$$

Производная $\frac{d\vec{r}}{ds}$ есть вектор, направленный по касательной к векторной линии в точке M . Действительно, направление касательной является предельным для направления секущей $\Delta \vec{r} = \overline{MM_1}$.

Там, где вектор $\vec{\alpha}(M)$ отличен от нуля, касательная к векторной линии существует. Запишем условие коллинеарности векторов $\frac{d\vec{r}}{ds}$ и $\vec{\alpha}$ в координатной форме

$$\frac{dx}{ds} : \alpha_x = \frac{dy}{ds} : \alpha_y = \frac{dz}{ds} : \alpha_z.$$

Умножая на дифференциал длины дуги ds , получим систему дифференциальных уравнений векторных линий

$$\frac{dx}{\alpha_x} = \frac{dy}{\alpha_y} = \frac{dz}{\alpha_z}. \tag{1.2}$$

Интегрирование системы двух дифференциальных уравнений (1.2) дает систему двух уравнений:

$$F_1(x, y, z) = C_1, F_2(x, y, z) = C_2, \tag{1.3}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Рассматриваемые в совокупности уравнения (1.3) определяют двухпараметрическое семейство векторных линий.

Линия, имеющая касательную в каждой точке, непрерывно изменяющуюся

вместе с точкой касания, называется гладкой. В частности, для непрерывных векторных полей векторные линии – гладкие. Для гладких линий существуют производные от функций $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$, входящих в параметрические уравнения.

Отметим также, что величины $|\Delta\vec{r}|$ (длина хорды MM_1) и Δs (длина дуги MM_1) являются эквивалентными бесконечно малыми для гладких линий, поэтому модуль вектора $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$ равен единице, а производные координат по параметру s есть направляющие косинусы касательной $\vec{\tau}$ к кривой

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\vec{\tau}, x), \quad \frac{dy}{ds} = \cos(\vec{\tau}, y), \quad \frac{dz}{ds} = \cos(\vec{\tau}, z). \quad (1.4)$$

Из последних соотношений, в частности, следует формула для дифференциала длины дуги гладкой кривой

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (1.5)$$

Пример 1.1. Найти уравнения векторных линий поля $\vec{\alpha}(M) = x\vec{i} - y\vec{j} - 2z\vec{k}$.

Решение. Дифференциальные уравнения векторных линий (1.2) для заданного поля имеют вид

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} = -\frac{dz}{2z}.$$

Решая полученные уравнения, имеем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}, \quad \ln x + \ln y = \ln C_1, \quad xy = C_1; \\ -\frac{dy}{y} = -\frac{dz}{2z}, \quad \ln y = (\ln z + \ln C_2)/2, \quad y^2 = C_2z. \end{aligned}$$

Таким образом, векторными линиями здесь являются линии пересечения гиперболических цилиндров $xy = C_1$ с параболическими цилиндрами $y^2 = C_2z$.

Глава 2. ГРДИЕНТ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

§ 2.1. Производная скалярного поля по направлению

Выберем некоторую точку $M(x, y, z)$ области Ω и рассмотрим, как будет меняться скалярное поле φ вдоль различных направлений, проходящих через эту точку. Проведем через точку M какую-либо прямую и обозначим через \vec{l} ее орт. Затем возьмем на этой прямой соседнюю с $M(x, y, z)$ точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

Обозначим MM_1 через Δl ; $\Delta l = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$, если векторы $\overline{MM_1}$ и \vec{l} направлены в одну сторону; $\Delta l = -\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$, если векторы $\overline{MM_1}$ и \vec{l} направлены в противоположные стороны. Функция φ получит

при этом приращение $\Delta\varphi = \varphi(M_1) - \varphi(M)$ (рис. 2.1). Заметим, что величину Δl можно считать координатой точки M_1 на числовой прямой с ортом \bar{l} и началом в точке M .

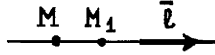


Рис. 2.1

Определение. Производной $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ скалярного поля φ по направлению вектора \bar{l} в точке M называется предел

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \lim_{\substack{\Delta l \rightarrow 0 \\ (M_1 \rightarrow M)}} \frac{\Delta\varphi}{\Delta l},$$

если он существует.

Производная скалярного поля по направлению характеризует скорость изменения (возрастания при $\frac{\partial\varphi}{\partial l} > 0$, убывания при $\frac{\partial\varphi}{\partial l} < 0$) поля $\varphi(M)$ в точке M по направлению \bar{l} .

Иногда рассматривают изменение скалярного поля $\varphi(M)$ вдоль гладкой направленной кривой L . Скалярное поле $\varphi(M)$ на линии L является функцией одной переменной s

$$\varphi = \varphi(s),$$

где s – естественный параметр кривой L . Скорость изменения скалярного поля вдоль линии L определяется как производная $\frac{d\varphi}{ds}$.

Теорема (о производной скалярного поля по направлению). Если функция $\varphi = \varphi(x, y, z)$ дифференцируема в точке M , то производная скалярного поля $\varphi(M)$ в точке M по направлению, заданному ортом

$$\bar{\tau} = \cos(\bar{\tau}, x)\bar{i} + \cos(\bar{\tau}, y)\bar{j} + \cos(\bar{\tau}, z)\bar{k},$$

существует и равна

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cos(\bar{\tau}, x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cos(\bar{\tau}, y) + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cos(\bar{\tau}, z). \quad (2.1)$$

Доказательство. Рассмотрим гладкую кривую L , касающуюся в точке M прямой, заданной ортом $\bar{\tau}$ (рис. 2.2).

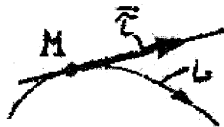


Рис. 2.2

Воспользуемся параметрическими уравнениями линии L

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s)$$

с естественным параметром s . Для гладкой кривой функции $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ дифференцируемы, и их производные равны координатам орта касательной. При указанных предположениях скалярное поле $\varphi(M)$ на линии L является сложной дифференцируемой функцией параметра $\varphi(s) = \varphi(x(s), y(s), z(s))$. По формуле дифференцирования сложной функции

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds}.$$

Правая часть здесь такая же как и в формуле (2.1), она полностью определяется значениями частных производных функции $\varphi(x, y, z)$ и производными координат по длине дуги

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\bar{\tau}, x), \quad \frac{dy}{ds} = \cos(\bar{\tau}, y), \quad \frac{dz}{ds} = \cos(\bar{\tau}, z).$$

Следовательно, производная $\frac{d\varphi}{ds}$ одна и также вдоль всякой линии, касающейся заданной прямой, в частности, совпадает с производной скалярного поля по направлению $\bar{\tau}$, т.е.

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}.$$

Замечание. Производная скалярного поля φ в точке M по направлению касательной \bar{l} к поверхности уровня, проходящей через точку M , равна нулю.

В этот легко убедиться, достаточно рассмотреть кривую L , лежащую на поверхности уровня $\varphi = \text{const}$ и касающуюся прямой, заданной ортом \bar{l} . Вдоль такой кривой $\varphi = \text{const}$ и, следовательно, $\frac{d\varphi}{dl} = 0$.

Пример 2.1. Вычислить производную поля

$$\varphi = x^2 + y^2x + z$$

в точке $M(1, 2, 3)$ по направлению вектора $\overline{MM_1}$, $M_1(3, 0, 3)$.

Решение. Найдем орт заданного направления: $\overline{MM_1} = (2, -2, 0)$, $|\overline{MM_1}| = 2\sqrt{2}$, $\bar{\tau} = \overline{MM_1}/|\overline{MM_1}| = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$. Отсюда $\cos(\bar{\tau}, x) = 1/\sqrt{2}$, $\cos(\bar{\tau}, y) = -1/\sqrt{2}$, $\cos(\bar{\tau}, z) = 0$. Вычислим частые производные функции в точке $M = (1, 2, 3)$: $\varphi'_x(x, y, z) = 2x + y^2$, $\varphi'_y(x, y, z) = 2xy$, $\varphi'_z(x, y, z) = 1$, $\varphi'_x(1, 2, 3) = 6$, $\varphi'_y(1, 2, 3) = 4$, $\varphi'_z(1, 2, 3) = 1$. По формуле (2.1) получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = 6/\sqrt{2} - 4/\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

§ 2.2. Градиент скалярного поля

Рассмотрим правую часть формулы (2.1). Она содержит проекцию вектора

$$\bar{g} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

на направление орта $\bar{\tau} = (\cos(\bar{\tau}, x), \cos(\bar{\tau}, y), \cos(\bar{\tau}, z))$. Согласно формуле (2.1) эта проекция равна производной скалярного поля φ по направлению $\bar{\tau}$. Т.к. для любого орта $\bar{\tau}$ производная по направлению – инвариант, то вектор \bar{g} также не зависит от выбора системы координат. Этот вектор называют градиентом скалярного поля φ и обозначают

$$\text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \bar{k}. \quad (2.2)$$

Таким образом, формула (2.1) может быть записана в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \text{pr}_{\bar{\tau}} \text{grad} \varphi.$$

Очевидно, проекция вектора \bar{g} на направление, совпадающее с направлением вектора \bar{g} , максимальна и равна длине вектора \bar{g} . Поэтому можно сказать, что градиент скалярного поля имеет направление, по которому производная скалярного поля максимальна, а модуль градиента равен максимальному значению производной по направлению.

Отметим также, что поскольку производная скалярного поля по направлению любой касательной к поверхности уровня равна нулю, то вектор-градиент имеет нулевую проекцию на касательную плоскость. Следовательно, если градиент в точке M не равен нулевому вектору, то он является нормалью к поверхности уровня, проходящей через точку M .

Из других обозначений вектора-градиента скалярной функции φ укажем, как наиболее употребляемое, $\nabla \varphi$, где знак " ∇ " читается "набла". Из формулы (2.2) видно, что ∇ можно рассматривать как дифференциальный оператор $\nabla = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z}$, который, будучи применен к скаляру φ , дает $\text{grad} \varphi$. Этот оператор можно рассматривать также как символический вектор, иногда его называют оператором Гамильтона.

Пример 2.2. Найти градиент скалярного поля $u = xy^2z^3$.

Решение. По определению $\text{grad} u = (u'_x, u'_y, u'_z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$.

Пример 2.3. Найти производную поля $u = x + y^2 + z^2$ в точке $M = (1, 1, 1)$ в направлении градиента.

Решение. Пусть вектор \bar{l} коллинеарен градиенту поля u в точке M , т.е.

$$\bar{l} \parallel (\text{grad} u)_M = \bar{i} + (2y)_M \bar{j} + (2z)_M \bar{k} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}.$$

Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad}u|_M = \sqrt{1+2^2+2^2} = 3$.

Пример 2.4. Пусть $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$ – дифференцируемые функции. Доказать соотношение $\text{grad}(uv) = v \cdot \text{grad}(u) + u \cdot \text{grad}(v)$.

Решение. Воспользовавшись определением градиента поля (2.2),

$$\begin{aligned} \text{grad}(uv) &= \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} uv + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} uv + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} uv = \\ &= \bar{i} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \bar{j} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \bar{k} \left(v \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial v}{\partial z} \right) = v \text{grad}(u) + u \text{grad}(v). \end{aligned}$$

Пример 2.5. Найти единичный вектор \bar{n} , нормальный к поверхности, заданной неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$, в точке M ,

$$F(M) = 0, \quad \left(F'_x(M)\right)^2 + \left(F'_y(M)\right)^2 + \left(F'_z(M)\right)^2 \neq 0.$$

Решение. Найдем вектор \bar{N} , нормальный к поверхности в точке M , или, другими словами, вектор, ортогональный касательной плоскости в точке M .

Рассмотрим скалярное поле $F(x, y, z)$. Ясно, что поверхность $F(x, y, z) = 0$ является поверхностью уровня поля F , проходящей через точку M . Поскольку градиент скалярного поля ортогонален поверхности уровня, то $\bar{N} = \text{grad}F|_M = \left(F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M)\right)$.

В этом случае

$$\bar{n} = \pm \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|} = \pm \left(\frac{F'_x(M)}{|\bar{N}|}, \frac{F'_y(M)}{|\bar{N}|}, \frac{F'_z(M)}{|\bar{N}|} \right), \quad (2.3)$$

где $|\bar{N}| = \sqrt{\left(F'_x(M)\right)^2 + \left(F'_y(M)\right)^2 + \left(F'_z(M)\right)^2}$.

Пример 2.6. Найти единичный вектор \bar{n} , нормальный к поверхности, заданной явным уравнением $z = f(x, y)$, в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ ($z_0 = f(x_0, y_0)$).

Решение. Очевидно, $f(x, y) - z = 0$ есть неявное уравнение поверхности. Воспользовавшись рассуждениями предыдущего примера, имеем вектор $\bar{N} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1)$, нормальный к поверхности в точке M . Следовательно,

$$\bar{n} = \pm \left(\frac{f'_x(x_0, y_0)}{|\bar{N}|}, \frac{f'_y(x_0, y_0)}{|\bar{N}|}, -\frac{1}{|\bar{N}|} \right), \quad (2.4)$$

где

$$|\bar{N}| = \sqrt{\left(f'_x(x_0, y_0)\right)^2 + \left(f'_y(x_0, y_0)\right)^2 + 1}.$$

Глава 3. ДИВЕРГЕНЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

§ 3.1. Ориентация поверхности

Разобьем произвольно поверхность S на конечное число участков (подповерхностей) S_1, S_2, \dots, S_m таким образом, чтобы граница каждого участка состояла из единственной замкнутой кривой, а каждая граничная точка любого участка являлась либо граничной точкой исходной поверхности, либо граничной точкой хотя бы одного другого участка (рис. 3.1).

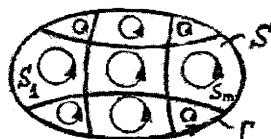


Рис. 3.1

Замкнутую кривую можно обойти в одном из двух направлений – по часовой стрелке или против часовой стрелки. Если для границы каждого участка можно указать направление обхода (например, против часовой стрелки, как на рис. 3.1) так, что каждая общая часть границы двух смежных участков проходится в противоположных направлениях, то поверхность называется ориентируемой, а выбранные направления обхода называются ориентацией поверхности.

Если связная поверхность ориентируема, то изменение направления обхода границы любого участка на противоположное влечет за собой изменение обхода и всех оставшихся участков. Отсюда следует возможность только двух ориентаций поверхности. Одну из этих двух ориентации, обычно обход против часовой стрелки, называют положительной (и обозначают через S^+), а противоположную ориентацию – отрицательной (и обозначают S^-).

Ориентации границ участков S_1, S_2, \dots, S_m порождают ориентацию границы Γ поверхности S (см. рис. 3.1). Такая ориентация границы Γ поверхности S называется ориентацией, согласованной с ориентацией поверхности S .

В качестве примеров ориентируемых поверхностей можно привести плоскость, сферу, любую поверхность, задаваемую уравнением $z = f(x, y)$, где f, f'_x, f'_y – функции, непрерывные в некоторой области плоскости Oxy и др. Примером неориентируемой поверхности может служить так называемый лист Мебиуса (рис. 3.2); его можно получить, если полоску бумаги $ABCD$ склеить так, чтобы точка A совпала с точкой C , а точка B – с точкой D , т.е. повернув перед склеиванием один из краев на 180° . Легко видеть, что при разбиении линиями AB, MN листа Мебиуса на две поверхности S_1 и S_2 , указанной выше ориентации не может быть выбрано (если AB проходится в разных направлениях, то MN – в одном направлении, и наоборот).

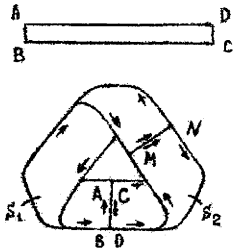


Рис. 3.2

Гладкой называют поверхность, в каждой точке которой имеется касательная плоскость, положение которой непрерывно изменяется вместе с точкой касания.

В каждой точке гладкой поверхности можно провести орт нормали к ней в одном из двух противоположных направлений. Согласуем направление нормали \vec{n} с ориентацией (под)поверхности, содержащей точку M , по правилу штопора: ориентация границы (под)поверхности соответствует направлению вращения ручки штопора, а направление нормали \vec{n} – движению самого штопора (рис. 3.3).

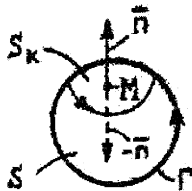


Рис. 3.3

Ясно, что для гладкой ориентированной поверхности единичная нормаль \vec{n} , выбранная указанным выше образом, является непрерывной функцией точки поверхности. При изменении ориентации поверхности изменяется и нормаль, приобретая противоположное направление.

Совокупность всех точек поверхности с выбранными в них направлениями нормали называется стороной поверхности. Поэтому ориентированные поверхности называют еще двусторонними, обозначая стороны посредством S^+ , S^- . При этом задание ориентации поверхности соответствует заданию стороны поверхности, и наоборот, задание стороны поверхности соответствует заданию ориентации поверхности.

В дальнейшем будем рассматривать только ориентированные поверхности, гладкие или кусочно-гладкие, т.е. состоящие из конечного числа гладких кусков, примыкающих один к другому по ребру – общей части их контуров. Понятно, что на границе двух гладких участков кусочно-гладкой поверхности касательная плоскость и нормаль могут не существовать.

Всякая замкнутая кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая некоторую область трехмерного пространства, ориентируема. Одна из ориентаций состоит из единичных нормалей, направленных в область (внутренние нормали), а другая

состоит из единичных нормалей, направленных наружу из области (внешние нормали). При этом говорят соответственно о внутренней или внешней стороне поверхности.

§ 3.2. Поверхностный интеграл I рода

Пусть в каждой точке M поверхности S задана скалярная функция $\varphi(M)$. Разобьем поверхность на m частей. Обозначим через ΔS_i площадь части с номером i , а через λ – наибольший из диаметров частей. Выберем на каждой части произвольную точку M_i , и рассмотрим предел интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^m \varphi(M_i) \Delta S_i \quad (3.1)$$

при $\lambda \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$). Если предел существует и если он не зависит от способа разбиения поверхности и выбора точек M_i , то этот предел называется поверхностным интегралом I рода и обозначается

$$\iint_S \varphi(M) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)} \sum_{i=1}^m \varphi(M_i) \Delta S_i.$$

Поверхностный интеграл I рода называют также интегралом по площади поверхности. В силу определения поверхностный интеграл I рода не зависит от ориентации поверхности.

Поверхностный интеграл I рода существует, если функция $\varphi(M)$ непрерывна, а поверхность S – гладкая или кусочно-гладкая. Если поверхность S кусочно-гладкая, то

$$\iint_S \varphi(M) dS = \sum_{i=1}^k \iint_{S_i} \varphi(M) dS,$$

где S_i , $i=1, 2, \dots, k$ – гладкие поверхности (указанное позволяет в дальнейшем ограничиться рассмотрением гладких поверхностей).

К вычислению поверхностного интеграла I рода приводится, например, задача определения заряда поверхности S при известном распределении плотности заряда $\varphi(M)$.

Один из способов вычисления поверхностного интеграла – сведение к двойному интегралу. Пусть поверхность S однозначно проектируется, например, на координатную плоскость Oxy в область D_z , и $\vec{n}(M)$ – орт нормали к поверхности. Обозначим через ΔS_{zi} площадь проекции i -й части поверхности. Исходя из определения площади поверхности, можно доказать, что следующие бесконечно малые величины эквивалентны

$$\Delta S_i \sim \frac{\Delta S_{zi}}{|\cos(\vec{n}_i, z)|}, \quad (3.2)$$

рис. 3.4.

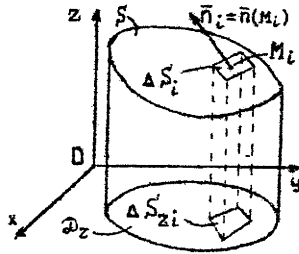


Рис. 3.4

Воспользуемся свойством предела интегральной суммы (если этот предел существует) не изменяться при замене слагаемых на эквивалентные бесконечно-малые величины

$$\iint_S \varphi(M) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)} \sum_{i=1}^m \varphi(M_i) \Delta S_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)} \sum_{i=1}^m \frac{\varphi(M_i)}{|\cos(\vec{n}_i, z)|} \Delta S_{zi}.$$

Справа стоит предел, равный по определению двойному интегралу по проекции D_z , поэтому

$$\iint_S \varphi(M) dS = \iint_{D_z} \frac{\varphi(M)}{|\cos(\vec{n}, z)|} dS_z. \quad (3.3)$$

Аналогично, если S однозначно проектируется в область D_y на плоскости Ozx или в область D_x на плоскости Oyz , то поверхностный интеграл можно представить двойным интегралом по, соответствующей проекции

$$\iint_S \varphi(M) dS = \iint_{D_y} \frac{\varphi(M)}{|\cos(\vec{n}, y)|} dS_y, \quad (3.4)$$

$$\iint_S \varphi(M) dS = \iint_{D_x} \frac{\varphi(M)}{|\cos(\vec{n}, x)|} dS_x. \quad (3.5)$$

При определенных предположениях подынтегральные функции в правых частях (3.3) – (3.5) допускают достаточно простые аналитические выражения. Пусть, например, уравнение поверхности имеет вид $z = z(x, y)$, тогда $\varphi(M) = \varphi(x, y, z) = \varphi(x, y, z(x, y))$. Используя выражения (2.4) для направляющих косинусов нормали, найдем

$$\frac{1}{|\cos(\vec{n}, z)|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

В этом случае подынтегральная функция в правой части (3.3) может быть представлена

$$\frac{\varphi(M)}{|\cos(\vec{n}, z)|} = \varphi(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

§ 3.3. Поток векторного поля через поверхность

Задача (о потоке жидкости через поверхность). Рассмотрим стационарное векторное поле

$$\vec{V}(M) = V_x(x, y, z)\vec{i} + V_y(x, y, z)\vec{j} + V_z(x, y, z)\vec{k}$$

скоростей несжимаемой жидкости с единичной плотностью. Вычислим количество Π жидкости, протекающей за единицу времени через некоторую гладкую ориентированную поверхность S , ограниченную пространственной кривой L .

Разобьем произвольно поверхность S на m частей, не имеющих общих внутренних точек, с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_m$. В каждой части ΔS_i выберем произвольно точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ (рис. 3.5). Пусть $\vec{n}(M)$ – орт нормали к поверхности S в точке M , согласованный с ориентацией поверхности S . Угол между векторами $\vec{n}_i = \vec{n}(M_i)$ и $\vec{V}_i = \vec{V}(M_i)$ обозначим через φ . При достаточно мелком разбиении поверхности S приближенно можно считать, что скорость во всех точках i -й части постоянна и равна $\vec{V}(M_i)$, а частичные поверхности – плоские. При указанных предположениях количество Π_i жидкости, протекающей через i -ю часть поверхности за единицу времени в направлении нормали \vec{n}_i , приближенно равно объему цилиндра с основанием ΔS_i и высотой $h = |\vec{V}_i| \cos \varphi$, т.е. $\Pi_i \approx \Delta S_i \cdot h = \Delta S_i |\vec{V}_i| \cos \varphi$. Так. $|\vec{n}_i| = 1$, то

$$\Pi_i \approx \Delta S_i |\vec{V}_i| |\vec{n}_i| \cos \varphi = \Delta S_i (\vec{V}_i \cdot \vec{n}_i),$$

где $\vec{V}_i \cdot \vec{n}_i$ – скалярное произведение векторов \vec{V}_i и \vec{n}_i .

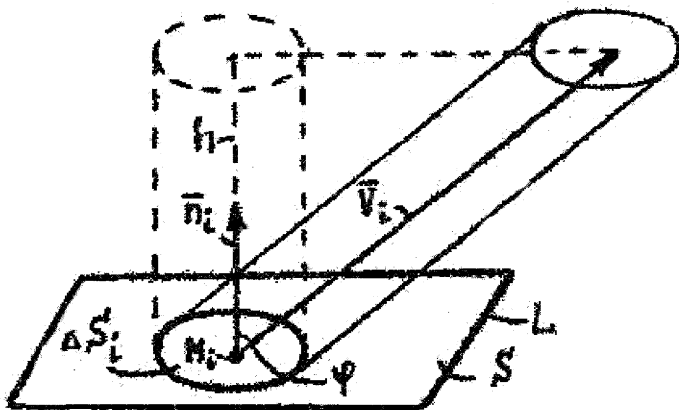


Рис. 3.5

Общее количество Π жидкости, протекающее через поверхность за единицу времени, равно сумме количеств жидкости, протекающих через отдельные площадки ΔS_i , и может быть приближенно выражено формулой

$$\Pi = \sum_{i=1}^m \Pi_i \approx \sum_{i=1}^m (\bar{V}_i \cdot \bar{n}_i) \Delta S_i.$$

Количество Π жидкости равно пределу

$$\Pi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m (\bar{V}_i \cdot \bar{n}_i) \Delta S_i,$$

если он существует. Здесь λ – наибольший из диаметров частей поверхности.

Рассмотрим функцию $\bar{V} \cdot \bar{n}$. Т.к. V_x, V_y, V_z и направляющие косинусы вектора \bar{n} непрерывные функции координат x, y, z точки поверхности S , то скалярное произведение

$$V_n = \bar{V} \cdot \bar{n} = V_x \cos(\bar{n}, x) + V_y \cos(\bar{n}, y) + V_z \cos(\bar{n}, z) \quad (3.6)$$

есть функция, непрерывная на поверхности S . Следовательно, приведенный выше предел существует и равен поверхностному интегралу от скалярной функции (3.6) – проекции V_n вектора \bar{V} на направление \bar{n} нормали к поверхности –

$$\Pi = \iint_S V_n dS.$$

Определение. Поток Π векторного поля $\bar{\alpha}(M)$ через поверхность S в сторону, определяемую единичным вектором нормали \bar{n} , называется поверхностный интеграл

$$\Pi = \iint_S \bar{\alpha} \cdot \bar{n} dS = \iint_S \alpha_n dS. \quad (3.7)$$

Здесь $\bar{\alpha} \cdot \bar{n}$ – скалярное произведение вектора поля и орта нормали, равное нормальной составляющей α_n вектора $\bar{\alpha}$.

В общем случае физический смысл потока векторного поля связан с количеством векторных линий, проходящих через данную поверхность. Например, если $\bar{\alpha}$ – вектор индукции магнитного поля, то магнитный поток равен числу магнитных силовых линий, пронизывающих поверхность.

Поток вектора меняет знак при смене ориентации поверхности, т.к. меняет знак проекция α_n вектора $\bar{\alpha}$ при изменении направления нормали на противоположное.

Особый интерес представляет поток векторного поля через замкнутую поверхность, обозначаемый

$$\oint \alpha_n dS,$$

где кружок на знаке интеграла указывает, что поверхность S замкнута. Обычно, если это не оговорено особо, за направление вектора \bar{n} берут направление внешней нормали к поверхности S .

Рассмотрим более подробно случай потока векторного поля через замкнутую поверхность применительно к потоку несжимаемой жидкости постоянной

плотности. Если S – замкнутая поверхность, ограничивающая некоторый объем, то вытекающая жидкость дает положительную часть потока, втекающая – отрицательную. Иначе говоря, если мы проведем векторные линии вектора \vec{V} , то элементарные площадки поверхности, где эти линии входят в объем, дают отрицательный вклад в общий поток, а там, где линии выходят – положительный вклад. Таким образом, поток вектора \vec{V} равен количеству жидкости, вытекающему из данного объема в единицу времени (отрицательный знак потока указывает на то, что жидкость втекает в данный объем). Количество жидкости внутри объема, ограниченного замкнутой поверхностью S , должно все время оставаться неизменным. Когда поток положителен, то это значит, что из объема вытекает жидкости больше чем втекает; но при постоянстве количества жидкости внутри объема это возможно только тогда, когда внутри объема существуют источники, питающие поток. Если же поток вектора отрицателен, то количество вытекающей жидкости меньше количества втекающей жидкости, следовательно, внутри объема имеются стоки, поглощающие излишек жидкости.

Говорят, что источники – точки, откуда векторные линии начинаются, а стоки – точки, где векторные линии кончаются (рис. 3.6). По аналогии в магнитном поле источником считают северный полюс магнита, а стоком – южный полюс магнита.



Рис. 3.6

В декартовой системе координат возможны различные формы записи потока вектора через поверхность.

Выражая скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{n}$ через координаты векторов, получим

$$\Pi = \iint_S (\alpha_x \cos(\vec{n}, x) + \alpha_y \cos(\vec{n}, y) + \alpha_z \cos(\vec{n}, z)) dS. \quad (3.8)$$

Интеграл от суммы трех функций равен сумме трех интегралов, первый из которых – поток составляющей α_x вектора \vec{a} :

$$\Pi_x = \iint_S \alpha_x \cos(\vec{n}, x) dS. \quad (3.9)$$

Потоки остальных компонент вектора \vec{a} , обозначим соответственно Π_y и Π_z .

Преобразуем выражение (3.9), для чего разобьем поверхность S на части следующих видов:

1) S_x^+ – часть S , которая однозначно проектируется в область D_x^+ на плоскости Oyz и имеет острый угол нормали с осью Ox в каждой внутренней точке;

2) S_x^- – часть S , также однозначно проектирующаяся в область D_x^- на плоскости Oyz , но имеющая тупой угол между нормалью во внутренних точках и осью Ox ;

3) S_x^0 — часть S , нормаль к которой в каждой точке перпендикулярна оси Ox .

Для частей вида S_x^+ знак $\cos(\bar{n}, x)$ положителен, и составляющая потока Π_x по формуле (3.5) преобразуется так

$$\iint_{S_x^+} \alpha_x \cos(\bar{n}, x) dS = \iint_{D_x} \alpha_x \frac{\cos(\bar{n}, x)}{|\cos(\bar{n}, x)|} dS_x = \iint_{D_x} \alpha_x dS_x.$$

Для частей вида S_x^- знак $\cos(\bar{n}, x)$ отрицателен, поэтому

$$\iint_{S_x^-} \alpha_x \cos(\bar{n}, x) dS = \iint_{D_x} \alpha_x \frac{\cos(\bar{n}, x)}{|\cos(\bar{n}, x)|} dS_x = - \iint_{D_x} \alpha_x dS_x.$$

Наконец, для частей вида S_x^0 , проектирующихся в линию, $\cos(\bar{n}, x) = 0$, поэтому

$$\iint_{S_x^0} \alpha_x \cos(\bar{n}, x) dS = 0.$$

В декартовых координатах элемент площади dS_x на плоскости Oyz обозначается в виде произведения дифференциалов $dydz$, поэтому естественно ввести следующее обозначение для поверхностного интеграла

$$\Pi_x = \iint_S \alpha_x dydz.$$

Однако следует помнить, что здесь формально $dydz = \cos(\bar{n}, x) dS$ (сравни с (3.2)). Поэтому при вычислении последнего интеграла в декартовых координатах необходимо разбить поверхность S на части вида S_x^+ , S_x^- , S_x^0 и учесть в соответствующих слагаемых знак косинуса угла нормали с осью Ox (т.е. умножить на +1, на -1, либо на 0).

Аналогичное обозначение можно ввести для составляющих потока Π_y и Π_z , общий поток выражается при этом суммой интегралов

$$\Pi = \iint_S \alpha_x dydz + \iint_S \alpha_y dzdx + \iint_S \alpha_z dxdy.$$

Принято знак интегрирования ставить только перед первым слагаемым без скобок

$$\Pi = \iint_S \alpha_x dydz + \alpha_y dzdx + \alpha_z dxdy. \quad (3.10)$$

Интеграл (3.10) называют поверхностным интегралом II рода или поверхностным интегралом по координатам. Этот интеграл можно было бы определить и как предел интегральной суммы (аналогично сумме (3.1)).

Выведем формулу вычисления поверхностного интеграла (3.7) в том важном случае, когда поверхность S задана параметрически

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

или, что почти то же самое, в векторной форме

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}.$$

Здесь точки (u, v) принадлежат области D на параметрической плоскости Ouv .

Функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ – непрерывно дифференцируемые в замкнутой области D , причем модули $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|$, $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|$ в нуль не обращаются. Между областью D и поверхностью S имеется взаимно однозначное соответствие (рис. 3.7, 3.8).

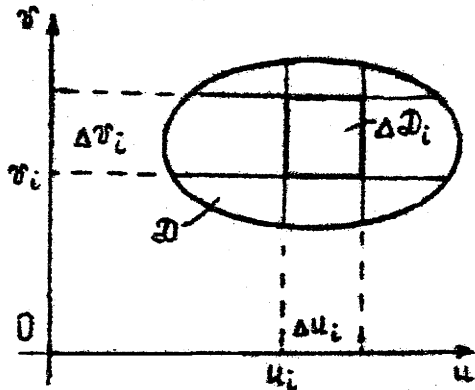


Рис. 3.7

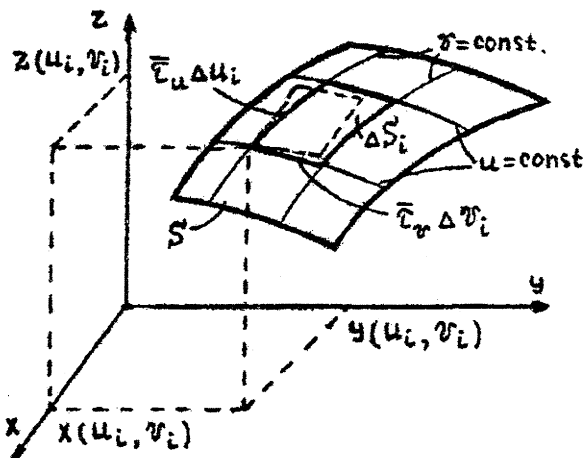


Рис. 3.8

Прямоугольнику со сторонами Δu_i , Δv_i на рис. 3.7, ограниченному координатными прямыми $u = u_i$, $u = u_i + \Delta u_i$, $v = v_i$, $v = v_i + \Delta v_i$, соответствует криволинейный параллелограмм ΔS_i на поверхности S (см. рис. 3.8), ограниченный линиями

$$\vec{r} = \vec{r}(u_i, v), \quad \vec{r} = \vec{r}(u_i + \Delta u_i, v), \quad \vec{r} = \vec{r}(u, v_i), \quad \vec{r} = \vec{r}(u, v_i + \Delta v_i)$$

(линии $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ на рис. 3.8). Векторы

$$\frac{\partial \vec{r}(u_i, v_i)}{\partial u} = \vec{r}_u, \quad \frac{\partial \vec{r}(u_i, v_i)}{\partial v} = \vec{r}_v$$

направлены по касательным к соответствующим линиям, причем частные приращения

$$\Delta \vec{r}(u_i, v) = \vec{r}(u_i + \Delta u_i, v) - \vec{r}(u_i, v), \quad \Delta \vec{r}(u, v_i) = \vec{r}(u, v_i + \Delta v_i) - \vec{r}(u, v_i)$$

приближенно равны частным дифференциалам

$$\frac{\partial \vec{r}(u_i, v)}{\partial u} \Delta u_i, \quad \frac{\partial \vec{r}(u, v_i)}{\partial v} \Delta v_i.$$

Более точно, компоненты этих векторов – частные приращения координат и частные дифференциалы координат – эквивалентные бесконечно малые первого порядка по сравнению с Δu_i , Δv_i . Следовательно, криволинейный параллелограмм на рис. 3.8 при достаточно малых Δu_i , Δv_i практически не отличим от параллелограмма, построенного на векторах частных дифференциалов. Площадь параллелограмма равна модулю векторного произведения этих векторов. Можно доказать, что эта площадь является бесконечно малой, эквивалентной площади ΔS_i криволинейного параллелограмма, т.е.

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|_{(u_i, v_i)} \Delta u_i \Delta v_i \sim \Delta S_i.$$

Сделаем эквивалентную замену в интегральной сумме (3.1) и перейдя к пределу, получим представление потока в виде двойного интеграла

$$\Pi = \iint_S \vec{\alpha} \cdot \vec{n} dS = \iint_D (\vec{\alpha} \cdot \vec{n}) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| dudv.$$

Вектор $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ перпендикулярен касательной плоскости, что позволяет выразить орт нормали \vec{n}

$$\vec{n} = \pm \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}.$$

Здесь знак в правой части должен быть согласован со стороной поверхности S .

Подставляя \vec{n} в двойной интеграл и сокращая на $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|$, найдем окончательно

$$\Pi = \pm \iint_D \vec{\alpha} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dudv. \quad (3.11)$$

В (3.11) под интегралом стоит смешанное произведение векторов

$$\bar{\alpha} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Пример 3.1. Найти поток векторного поля $\bar{\alpha} = xy\bar{i} + yz\bar{j} + xz\bar{k}$ через часть внешней стороны сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, заключенной в первом октанте.

Решение 1. Поверхность S задана неявно уравнением $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. В этом случае по формуле (2.3)

$$\bar{n} = \pm(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \pm(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}).$$

Т.к. по условию поверхность S находится в первом октанте, и нормаль \bar{n} , согласованная со стороной поверхности, образует острый угол с осью Oz , получим $\cos(\bar{n}, x) = x \geq 0$, $\cos(\bar{n}, y) = y \geq 0$, $\cos(\bar{n}, z) = z \geq 0$.

По формулам (3.8), (3.3) – (3.5) с учетом обозначений $dS_x = dydz$, $dS_y = dzdx$, $dS_z = dxdy$ имеем

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_S (xy \cos(\bar{n}, x) + yz \cos(\bar{n}, y) + xz \cos(\bar{n}, z)) dS = \\ &= \iint_{D_x} xy dS_x + \iint_{D_y} yz dS_y + \iint_{D_z} xz dS_z = \iint_{D_x} xy dy dz + \iint_{D_y} yz dx dz + \iint_{D_z} xz dx dy. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Из уравнения сферы находим

$$z = z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad y = y(x, z) = \sqrt{1 - x^2 - z^2}, \quad x = x(y, z) = \sqrt{1 - y^2 - z^2}.$$

Подставляя эти выражения для x , y , z соответственно в третий, второй и первый интегралы правой части (3.12), получим

$$\Pi = \iint_{D_z} x \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy + \iint_{D_y} z \sqrt{1 - x^2 - z^2} dx dz + \iint_{D_x} y \sqrt{1 - y^2 - z^2} dy dz. \quad (3.13)$$

Вычислим первый интеграл, стоящий в правой части (3.13), переходя к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Т.к. D_z – четверть круга единичного радиуса с центром в начале координат, лежащая в первой четверти, то $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, $0 \leq \rho \leq 1$. Имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_z} x \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy = \iint_{D_z} \rho^2 \sqrt{1 - \rho^2} \cos \varphi d\varphi d\rho = \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1 - \rho^2} d\rho = \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1 - \rho^2} d\rho. \end{aligned}$$

В последнем интеграле положим $\rho = \sin t$, $d\rho = \cos t dt$. Получим

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \pi/16.$$

Второй и третий интегралы в формуле (3.13) вычисляются аналогично

$$I_2 = \iint_{D_y} z \sqrt{1-x^2-z^2} dz dx = \pi/16, \quad I_3 = \iint_{D_x} y \sqrt{1-y^2-z^2} dy dz = \pi/16.$$

Итак, искомый поток будет равен $\Pi = I_1 + I_2 + I_3 = 3\pi/16$.

Решение 2. Воспользуемся тем, что в сферических координатах

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ имеет вид $r = 1$. Отсюда следуют параметрические уравнения части сферы, заключенной в первом октанте

$$x = \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \cos \theta, \quad D = \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}.$$

В этом случае:

$$\bar{\alpha} = (xy, yz, xz) = (\sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi, \sin \theta \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \theta \cos \varphi),$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta),$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) = (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0).$$

Найдем векторное произведение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \sin^2 \theta \cos \varphi \bar{i} + \sin^2 \theta \sin \varphi \bar{j} + \cos \theta \sin \theta \bar{k}. \end{aligned}$$

Компоненты произведения положительны для углов $\theta \in (0, \pi/2)$, $\varphi \in (0, \pi/2)$.

Поэтому в формуле (3.11) берется знак "+", т.к. внешняя нормаль к сфере в первом октанте также имеет положительные компоненты.

Подынтегральная функция

$$\bar{\alpha} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} = \bar{\alpha} \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} \right) =$$

$$= \sin^4 \theta \cos^2 \varphi \sin \varphi + \sin^3 \theta \cos \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos \varphi.$$

Подставляя это соотношение в (3.11) и записывая двойной интеграл в виде двукратного, имеем

$$\Pi = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} (\sin^4 \theta \cos^2 \varphi \sin \varphi + \sin^3 \theta \cos \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos \varphi) d\varphi.$$

Т.к.

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi = 1/3, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (3 - 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta) d\theta = \pi/16,$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi/4, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta = 1/4,$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = 1, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \pi/16,$$

то окончательно $\Pi = \frac{3\pi}{16}$.

Пример 3.2. Вычислить поток векторного поля $\vec{\alpha} = (x + 2y - z)\vec{i}$ через боковую грань пирамиды $ABOC$ – треугольник ABC (рис. 3.9).

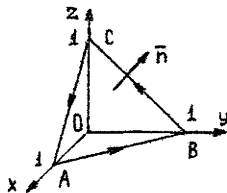


Рис. 3.9

Решение. Обозначим ΔABC посредством S_1 . По определению потока

$$\Pi = \iint_{S_1} \vec{\alpha} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} (x + 2y - z) \cos(\vec{n}, x) dS.$$

Уравнение плоскости, в которой лежит ΔABC , имеет вид $x + y + z = 1$, откуда $x = 1 - y - z$. Воспользуемся формулой (3.5) и получим

$$\Pi = + \iint_{D_x} ((1 - y - z) + 2y - z) dydz = \iint_{D_x} (1 + y - 2z) dydz.$$

Перед двойным интегралом стоит знак "+", т.к. угол между вектором \vec{n} и осью Ox острый, т.е. $\cos(\vec{n}, x) > 0$.

Учитывая, что D_x – треугольная область, ограниченная прямыми $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 1$, расставим пределы интегрирования в двойном интеграле и найдем поток

$$\Pi = \iint_{D_x} (1 + y - 2z) dydz = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (1 + y - 2z) dz = 1/3.$$

Пример 3.3. Вычислить поток векторного поля $\vec{\alpha} = (x + 2y - z)\vec{i}$ через полную поверхность S пирамиды $ABOC$ (см. рис. 3.9) в направлении внешней нормали к ее поверхности.

Решение. По определению потока

$$\Pi = \oiint_S \alpha_n dS = \oiint_S (x + 2y - z) \cos(\vec{n}, x) dS.$$

В нашем случае поверхность S состоит из четырех треугольных поверхностей: $S_1 - \Delta ABC$, $S_2 - \Delta OAB$, $S_3 - \Delta OBC$, $S_4 - \Delta OAC$. Поток запишется в виде суммы интегралов

$$\oiint_S \alpha_n dS = \oiint_{S_1} + \oiint_{S_2} + \oiint_{S_3} + \oiint_{S_4}.$$

Т.к. площади проекций поверхностей S_2 и S_4 на плоскость Oyz равны нулю, то

$$\iint_{S_2} \alpha_n dS = \iint_{S_2} (x + 2y - z) \cos(\vec{n}, x) dS = 0, \quad \iint_{S_4} \alpha_n dS = 0.$$

На поверхности S_3 внешняя нормаль параллельна оси Ox и противоположно ей направлена, т.е. $\cos(\vec{n}, x) = \cos \pi < 0$. Учитывая, что уравнение поверхности S_3 имеет вид $x = 0$, получим

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} (x + 2y - z) \cos(\vec{n}, x) dS &= - \iint_{D_x} (0 + 2y - z) dy dz = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (z - 2y) dz = -1/6, \\ \iint_{S_1} (x + 2y - z) dy dz &= 1/3, \end{aligned}$$

(см. пример 3.2). Окончательно получим $\Pi = 1/3 - 0 - 1/6 + 0 = 1/6$.

§ 3.4. Теорема Остроградского–Гаусса

Покажем, что поток векторного поля через замкнутую поверхность S может быть вычислен с помощью некоторого тройного интеграла по области V , ограниченной поверхностью S .

Теорема (Остроградского–Гаусса). Если функции $\alpha_x(x, y, z)$, $\alpha_y(x, y, z)$, $\alpha_z(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка во всех точках объема V и на его границе S , то справедлива следующая формула

$$\oiint_S (\alpha_x \cos(\vec{n}, x) + \alpha_y \cos(\vec{n}, y) + \alpha_z \cos(\vec{n}, z)) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} \right) dV,$$

где $\cos(\vec{n}, x)$, $\cos(\vec{n}, y)$, $\cos(\vec{n}, z)$ – направляющие косинусы внешней нормали к замкнутой поверхности S , ограничивающей объем V .

Доказательство. Пусть S – замкнутая поверхность, которая прямыми, параллельными координатным осям, пересекается не более чем в двух точках.

Формула Остроградского–Гаусса складывается из трех формул:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} dV &= \iint_S \alpha_x \cos(\bar{n}, x) dS, \\ \iiint_V \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} dV &= \iint_S \alpha_y \cos(\bar{n}, y) dS, \\ \iiint_V \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} dV &= \iint_S \alpha_z \cos(\bar{n}, z) dS. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Докажем последнюю из них (остальные доказываются аналогично).

Пусть область G есть проекция поверхности S (и области V) на плоскость Oxy (рис. 3.10).

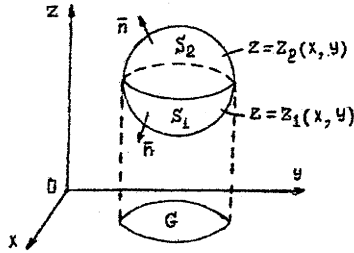


Рис. 3.10

Запишем уравнения нижней S_1 и верхней S_2 частей поверхности S

$$z = z_1(x, y), \quad z = z_2(x, y),$$

где $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ – непрерывные функции в области G . Преобразуем тройной

интеграл $\iiint_V \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} dV$ в поверхностный. Для этого сведем его к повторному интегралу и по формуле Ньютона–Лейбница выполним интегрирование по z . Получим

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} dx dy dz &= \iint_G dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} dz = \\ &= \iint_G \alpha_z(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_G \alpha_z(x, y, z_1(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Т.к. область G является проекцией на плоскость Oxy и поверхности S_2 , и поверхности S_1 , то двойные интегралы могут быть заменены равными им поверхностными интегралами, взятыми соответственно по верхней стороне поверхности $z = z_2(x, y)$ и верхней стороне поверхности $z = z_1(x, y)$, т.е.

$$\iiint_V \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} dx dy dz = \iint_{S_2} \alpha_z(x, y, z) dx dy - \iint_{S_1} \alpha_z(x, y, z) dx dy.$$

Меняя в интеграле по S_1 сторону поверхности, получаем

$$\iiint_V \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} dx dy dz = \iint_{S_2} \alpha_z(x, y, z) dx dy - \iint_{S_1} \alpha_z(x, y, z) dx dy = \iint_S \alpha_z(x, y, z) dx dy,$$

где S – внешняя сторона поверхности, ограничивающей область V . Учитывая, что $\cos(\vec{n}, z) dS = dx dy$, получим

$$\iiint_V \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} dV = \iint_S \alpha_z \cos(\vec{n}, z) dS.$$

Сложение трех формул (3.14) приводит к формуле Остроградского–Гаусса.

Замечание 1. Формула Остроградского–Гаусса верна для любой замкнутой пространственной области V , которую можно разбить на конечное число простых областей (т.е. таких областей, для которых любая прямая, параллельная какой-либо координатной оси и проходящая через внутренние точки области, пересекает границу области в двух точках). В самом деле, применяя формулу Остроградского–Гаусса к каждой из областей разбиения и складывая результаты, получим справа тройной интеграл по всей области V , а слева – поверхностный интеграл по поверхности S , ограничивающей область V , т.к. поверхностные интегралы по вспомогательным поверхностям берутся дважды по противоположным сторонам и при суммировании взаимно уничтожаются.

Замечание 2. Можно показать, что формула Остроградского–Гаусса справедлива для любой области V , ограниченной несколькими кусочно-гладкими поверхностями.

Пример 3.4. Вычислить, применяя формулу Остроградского–Гаусса, поток векторного поля

$$\vec{\alpha} = (x + 2y - z)\vec{i}$$

через полную поверхность S пирамиды $ABOC$ (см. рис. 3.9) в направлении внешней нормали к ее поверхности.

Решение. Здесь $\alpha_x = x + 2y - z$, $\alpha_y = \alpha_z = 0$, тогда

$$\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} = \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} = 0.$$

Применяя формулу Остроградского–Гаусса, получим

$$\Pi = \oiint_S \vec{\alpha} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V dx dy dz = V_{ABOC} = 1/6.$$

(сравни с примером 3.3).

§ 3.5. Дивергенция векторного поля

Если рассматривать векторное поле как поле скоростей движущейся жидкости, то положительное значение потока вектора $\vec{\alpha}$ через некоторую замкнутую поверхность S указывает, что внутри объема V , ограниченного поверхностью S , должны находиться источники поля, интенсивность которых характеризуется величиной потока векторного поля через поверхность S . Когда поток векторного поля отрицателен, то в этом случае внутри объема находятся стоки. Возможно,

что в обоих случаях внутри объема находятся и источники, и стоки, но при положительности потока общая обильность источников превосходит обильность стоков, а при отрицательности потока – наоборот. Т.е. величина потока характеризует обильность источников и стоков лишь суммарно.

Рассмотрим отношение потока вектора через поверхность S к объему V , ограниченному этой поверхностью

$$\frac{1}{V} \oiint_S \alpha_n dS.$$

Это отношение показывает среднее количество жидкости, поступающей из единицы объема внутри поверхности S за единицу времени при положительности потока. Если же поток отрицателен, то отношение определяет количество жидкости, поглощаемой в среднем единицей объема за единицу времени.

Для того, чтобы получить характеристику интенсивности источника (стока) в каждой отдельной точке, поступим следующим образом. Возьмем какую-либо точку M векторного поля $\vec{\alpha}$, окружим ее малым объемом V и вычислим поток вектора $\vec{\alpha}$ через поверхность S , ограничивающую объем V ; разделим его на V и перейдем к пределу, устремляя к нулю диаметр объема и стягивая при этом объем V к точке M . В результате получится некоторое число, зависящее от поведения $\vec{\alpha}$ вблизи точки M и характеризующее степень истечения из окрестности точки M .

Определение. Дивергенцией $\operatorname{div} \vec{\alpha}(M)$ векторного поля $\vec{\alpha}$ в точке M называется предел

$$\operatorname{div} \vec{\alpha}(M) = \lim_{\operatorname{diam} V \rightarrow 0 (M \in V)} \frac{1}{V} \oiint_S \alpha_n dS \quad (3.15)$$

отношения потока поля $\vec{\alpha}$ через некоторую замкнутую поверхность S к объему V , ограниченному поверхностью S , когда S стягивается в точку M .

Предполагается, что предел не зависит от вида объема, который стягивается к точке.

Обозначение $\operatorname{div} \vec{\alpha}$ происходит от латинского слова *divergere* (расходиться). Дивергенция поля называется еще расходимостью поля.

Из определения (3.15) следует, что дивергенция инвариантна относительно выбора системы координат.

Формула (3.15) показывает, что расхождение вектора $\vec{\alpha}$ есть отнесенный к единице объема поток вектора $\vec{\alpha}$ через поверхность достаточно малого объема, окружающего рассматриваемую точку.

При $\operatorname{div} \vec{\alpha}(M) > 0$ точка M представляет собой источник, а при $\operatorname{div} \vec{\alpha}(M) < 0$ – сток. В точках поля с положительной дивергенцией векторные линии начинаются, а в точках с отрицательной дивергенцией – кончаются. Интенсивность распределенного источника (стока) в точке M характеризуется дивергенцией поля в этой точке и может быть принята равной дивергенции или ей пропорциональной.

Выведем выражение для дивергенции поля в декартовой системе координат.

Теорема (о дивергенции поля). Если проекции вектора $\vec{\alpha}(M) = \alpha_x \vec{i} + \alpha_y \vec{j} + \alpha_z \vec{k}$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial \alpha_x}{\partial x}$, $\frac{\partial \alpha_y}{\partial y}$, $\frac{\partial \alpha_z}{\partial z}$, то дивергенция поля существует и справедлива следующая формула

$$\operatorname{div} \vec{\alpha} = \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_z}{\partial z}. \quad (3.16)$$

Доказательство. Докажем существование предела (3.15) для объема любой формы, стягивавшегося к точке M . Из теоремы Остроградского–Гаусса следует, что

$$\oiint_S \alpha_n dS = \iiint_V \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} \right) dV.$$

По теореме о среднем

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} \right) dV = V \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} \right)_Q,$$

где значение суммы в правой части берется в некоторой средней точке Q объема V . Следовательно,

$$\frac{1}{V} \oiint_S \alpha_n dS = \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} \right)_Q.$$

Будем стягивать объем V к точке M . При этом точка Q стремится к точке M .

По предположению производные $\frac{\partial \alpha_x}{\partial x}$, $\frac{\partial \alpha_y}{\partial y}$, $\frac{\partial \alpha_z}{\partial z}$ непрерывны, следовательно,

$$\lim_{\operatorname{diam} V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oiint_S \alpha_n dS = \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_z}{\partial z},$$

и формула (3.16) справедлива.

На основе полученного выражения для $\operatorname{div} \vec{\alpha}$ в декартовой системе координат теорема Остроградского–Гаусса может быть сформулирована в векторной форме.

Поток векторного поля через некоторую замкнутую поверхность равен тройному интегралу от дивергенции поля по объему V , ограниченному поверхностью S , т.е.

$$\oiint_S \alpha_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{\alpha} dV$$

(при этом предполагается непрерывность частных производных от координат вектора $\vec{\alpha}(M)$ во всех точках объема V , включая границу S).

Следствие. Если $\operatorname{div} \vec{\alpha} = 0$, то поток вектора $\vec{\alpha}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Пример 3.5. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{\alpha} = x^2 \vec{i} + y^3 \vec{j} + z^4 \vec{k}$.

Решение. Согласно определению, имеем

$$\operatorname{div} \bar{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x} x^2 + \frac{\partial}{\partial y} y^3 + \frac{\partial}{\partial z} z^4 = 2x + 3y^2 + 4z^3.$$

Пример 3.6. Доказать, что дивергенция суммы векторных полей равна сумме дивергенций слагаемых, т.е.

$$\operatorname{div}(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) = \operatorname{div} \bar{\alpha} + \operatorname{div} \bar{\beta}.$$

Решение 1 (координатный способ). Пусть

$$\bar{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z), \quad \bar{\beta} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z), \quad \bar{\alpha} + \bar{\beta} = (\alpha_x + \beta_x, \alpha_y + \beta_y, \alpha_z + \beta_z).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) &= \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_x + \beta_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_y + \beta_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_z + \beta_z) = \\ &= \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \frac{\partial \beta_z}{\partial z} \right) = \operatorname{div} \bar{\alpha} + \operatorname{div} \bar{\beta}. \end{aligned}$$

Решение 2 (инвариантный способ). Согласно определению, дивергенция есть предел поверхностного интеграла. Интеграл и предел обладают свойством линейности. Поэтому и дивергенция – линейная операция. В частности, дивергенция суммы равна сумме дивергенций.

Глава 4. ВИХРЬ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

§ 4.1. Криволинейный интеграл I рода

Пусть в каждой точке M кривой L конечной длины l задана скалярная функция $\varphi(M)$. Разобьем кривую на m частей. Обозначим через Δs_i длину части с номером i , а через λ – наибольшую из длин частей. Выберем на каждой части произвольную точку M_i и рассмотрим предел интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^m \varphi(M_i) \Delta s_i \quad (4.1)$$

при $\lambda \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$). Если предел существует и если он не зависит от способа разбиения кривой и выбора точек M_i , то этот предел называется криволинейным интегралом I рода и обозначается

$$\int_L \varphi(M) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)} \sum_{i=1}^m \varphi(M_i) \Delta s_i.$$

Криволинейный интеграл I рода называется также интегралом по длине дуги. В силу определения криволинейный интеграл I рода не зависит от ориентации кривой.

Криволинейный интеграл I рода существует, если функция $\varphi(M)$ непрерывна, а кривая L – гладкая или кусочно-гладкая. Если кривая L кусочно-гладкая, то

$$\int_L \varphi(M) ds = \sum_{i=1}^k \int_{L_i} \varphi(M) ds,$$

где L_i , $i=1, 2, \dots, k$ – гладкие кривые (указанное позволяет в дальнейшем ограничиться рассмотрением гладких кривых).

К вычислению криволинейного интеграла I рода сводится, например, задача вычисления заряда кривой L , если известна плотность $\varphi(M)$ распределения заряда вдоль L .

Аналитически криволинейный интеграл вычисляется при помощи определенного интеграла. Пусть кривая L задана параметрически $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, где s – естественный параметр (длина дуги, отсчитываемая от одного из концов кривой до переменной точки M), $0 \leq s \leq l$. Обозначив через Δs_i длину части с номером i , а через s'_i – значения s , определяющие точку $M_i = (x(s'_i), y(s'_i), z(s'_i))$ (точка M_i принадлежит части i), видим, что интегральная сумма для криволинейного интеграла

$$\sum_{i=1}^m \varphi(M_i) \Delta s_i = \sum_{i=1}^m \varphi(x(s'_i), y(s'_i), z(s'_i)) \Delta s_i$$

является в тоже время интегральной суммой для обыкновенного определенного интеграла, так что сразу имеем

$$\int_L \varphi(M) ds = \int_0^l \varphi(s) ds.$$

Часто кривая L задается параметрически в декартовых координатах $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где параметр t изменяется в пределах $t_1 \leq t \leq t_2$ (t_1 – начало кривой L , t_2 – конец кривой L), а функция $\varphi(M)$ явно зависит от координат точки $\varphi = \varphi(x, y, z)$. В этом случае криволинейный интеграл представляется в виде определенного интеграла по параметру. Действительно, по формуле (1.5) имеем

$$ds = \frac{ds}{dt} dt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt,$$

откуда

$$\int_L \varphi(M) ds = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

§ 4.2. Линейный интеграл векторного поля

Задача (о работе силового поля). Пусть в области Ω задано векторное поле $\vec{F}(M)$ сил, действующих на материальную точку. Требуется вычислить работу силового поля при движении материальной точечки вдоль гладкой линии L от точки A до точки B .

Обозначим $\vec{\tau} = \vec{\tau}(M)$, $M \in L$, орт касательной к кривой L в направлении ее ориентации от A к B . Разобьем кривую на m достаточно мелких частей $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_m$, каждую из которых приближенно можно считать прямолинейной и направленной вдоль касательной $\vec{\tau}(M_i)$ в некоторой промежуточной точке M_i . Сила \vec{F} на малом участке Δs_i незначительно отличается от величины $\vec{F}(M_i)$; рис. 4.1.

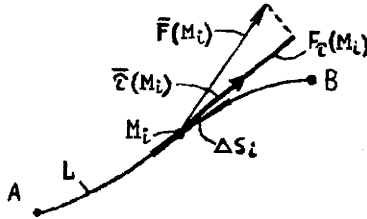


Рис. 4.1

Работа ΔA_i при прохождении участка Δs_i приближенно равна произведению касательной проекции $F_\tau(M_i)$ силы $\vec{F}(M_i)$ на путь Δs_i

$$\Delta A_i \approx F_\tau(M_i) \Delta s_i.$$

Здесь $F_\tau(M_i) = \vec{F}(M_i) \cdot \vec{\tau}(M_i)$. Работа вдоль всего пути равна сумме работ на отдельных участках

$$A = \sum_{i=1}^m \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^m F_\tau(M_i) \Delta s_i.$$

Предел этой интегральной суммы при $m \rightarrow \infty$ и $\max_i \Delta s_i \rightarrow 0$ существует, если касательная проекция силы $F_\tau(M)$ непрерывна на L , и равен криволинейному интегралу, который и принимается в качестве работы

$$A = \int_L F_\tau(M) ds.$$

Определение. Линейным интегралом I от вектора $\vec{\alpha}(M)$ вдоль ориентированной кривой L называется криволинейный интеграл

$$I = \int_L \alpha_\tau ds = \int_L \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau} ds. \quad (4.2)$$

Здесь $\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}$ – скалярное произведение вектора поля и орта касательной к кривой L , равное касательной составляющей α_τ вектора $\vec{\alpha}$.

Линейный интеграл зависит от направления обхода кривой, т.к. при смене направления касательной меняет знак проекция α_τ , а вместе с ней и интеграл (4.2).

Циркуляцией или контурным интегралом \mathcal{C} векторного поля называют линейный интеграл вектора по замкнутой ориентированной кривой L и обозначают кружочком на знаке интеграла

$$\mathcal{C} = \oint_L \alpha_r ds.$$

В декартовой системе координат возможны различные формы записи линейного интеграла от вектора.

Выражая касательную проекцию α_r через координаты векторов $\bar{\alpha}$ и \bar{r} , получим

$$I = \int_L (\alpha_x \cos(\bar{r}, x) + \alpha_y \cos(\bar{r}, y) + \alpha_z \cos(\bar{r}, z)) ds.$$

Раскрывая скобки и используя формулы $dx = \cos(\bar{r}, x) ds$, $dy = \cos(\bar{r}, y) ds$, $dz = \cos(\bar{r}, z) ds$ (см. (1.4)), найдем

$$I = \int_L \alpha_x dx + \int_L \alpha_y dy + \int_L \alpha_z dz.$$

Здесь справа принято оставлять знак интегрирования только перед первым слагаемым, не ставя скобок

$$I = \int_L \alpha_x dx + \alpha_y dy + \alpha_z dz. \quad (4.3)$$

Интеграл (4.3) называют криволинейным интегралом II рода или криволинейным интегралом по координатам. Этот интеграл можно было бы определить и как предел интегральной суммы (аналогично сумме (4.1)).

Вычисление линейного интеграла обычно производится с помощью параметрических уравнений кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Пусть изменение параметра t от t_1 до t_2 соответствует непрерывному движению точки вдоль всей кривой L в положительном направлении. Тогда линейный интеграл равен определенному интегралу

$$I = \int_L \alpha_x dx + \alpha_y dy + \alpha_z dz = \int_{t_1}^{t_2} (\alpha_x(t)x'(t) + \alpha_y(t)y'(t) + \alpha_z(t)z'(t)) dt, \quad (4.4)$$

где введены обозначения $\alpha_x(t) = \alpha_x(x(t), y(t), z(t))$, $\alpha_y(t) = \alpha_y(x(t), y(t), z(t))$, $\alpha_z(t) = \alpha_z(x(t), y(t), z(t))$.

Пример 4.1. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{\alpha} = (x + 2y - z)\bar{i}$ по контуру треугольника $ABCA$, где $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ (см. рис.3.9).

Решение. По определению циркуляции \mathcal{C} , имеем

$$\mathcal{C} = \oint_{ABCA} \alpha_r ds = \oint_{ABCA} (x + 2y - z) dx.$$

Разбивая путь интегрирования на части, можем записать

$$\int_{ABCA} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}.$$

Составим параметрическое уравнение прямой AB : $\overline{AB} = (-1, 1, 0)$, $x = 1 - t$, $y = t$, $z = 0$, $dx = -dt$; точке A соответствует значение параметра $t = 0$, точке B —

$t=1$. По формуле (4.4) найдем линейный интеграл векторного поля \vec{a} вдоль отрезка AB

$$\int_{AB} (x+2y-z)dx = -\int_0^1 ((1-t)+2t)dt = -\int_0^1 (1+t)dt = -\left. \frac{1+t^2}{2} \right|_0^1 = -3/2.$$

Параметрические уравнения прямой BC : $\overline{BC} = (0, -1, -1)$, $x=0$, $y=1-t$, $z=t$, $dx=0$, $0 \leq t \leq 1$. Следовательно,

$$\int_{BC} (x+2y-z)dx = 0.$$

Уравнения CA : $\overline{CA} = (1, 0, -1)$, $x=t$, $y=0$, $z=1-t$, $dx=dt$, $0 \leq t \leq 1$. Найдем

$$\int_{CA} (x+2y-z)dx = \int_0^1 (t-(1-t))dt = \int_0^1 (2t-1)dt = 0.$$

Окончательно получаем $C = -3/2$.

Пример 4.2. Вычислить контурный интеграл $\oint_L ydx$ в предположении, что

контур L однозначно проектируется на координатную плоскость Oxy .

Решение. Рассмотрим проекцию L_z контура L на плоскость Oxy (рис. 4.2).

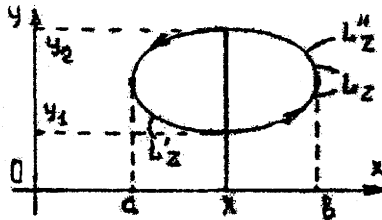


Рис. 4.2

Ориентация контура L_z определяется однозначным соответствием точек кривых L и L_z при их обходе. Очевидно,

$$\oint_L ydx = \oint_{L_z} ydx,$$

т.к. в соответствующих точках L и L_z координаты x и y одни и те же, а от координаты z подынтегральные выражения не зависят.

На рис. 4.2 указана одна из двух возможных ориентаций проекции L_z , которой соответствует обход против часовой стрелки.

Пусть a – наименьшее значение абсциссы x на кривой L_z , b – наибольшее значение x , и в интервале $a < x < b$ прямая, параллельная оси Oy , пересекает кривую L_z только в двух точках с ординатами y_1 и y_2 , $y_1 < y_2$ (см. рис. 4.2). Разобьем L_z на две части: нижнюю кривую L'_z с уравнением $y = y_1(x)$ и верхнюю

L_z' с уравнением $y = y_2(x)$. Представим криволинейные интегралы по L_z' и L_z'' в виде определенных по переменной x , возрастающей от a до b вдоль L_z' и убывающей от b до a вдоль L_z'' . Тогда

$$\begin{aligned} \oint_{L_z} y dx &= \int_{L_z'} y dx + \int_{L_z''} y dx = \int_a^b y_1(x) dx + \int_b^a y_2(x) dx = \\ &= \int_a^b y_1(x) dx - \int_a^b y_2(x) dx = - \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx. \end{aligned}$$

Последний интеграл равен площади S плоской области, ограниченной контуром L_z , следовательно,

$$\oint_{L_z} y dx = -S.$$

Можно показать, что этот результат остается в силе для произвольного кусочно-гладкого контура L_z , ориентированного при обходе против часовой стрелки.

Если ориентация L_z противоположная, то следует изменить знак правой части. Обозначим посредством S_z величину, равную площади S , если L_z обходит эту площадь против часовой стрелки, и равную $-S$ при обратном обходе. Величину S_z называют ориентированной площадью. Тогда для любой ориентации L_z

$$\oint_L y dx = -S_z. \quad (4.5)$$

Рассуждая аналогично, можно найти следующие интегралы

$$\oint_L x dy = S_z, \quad \oint_L y dz = - \oint_L z dy = S_x, \quad \oint_L z dx = - \oint_L x dz = S_y, \quad (4.6)$$

где S_x (S_y) – ориентированная площадь области внутри проекции L на плоскость Oyz (Ozx).

§ 4.3. Вихрь векторного поля

Пусть в точке M задано направление с помощью орта \bar{n} . Проведем через точку M гладкую ориентированную поверхность σ таким образом, чтобы орт \bar{n} совпал с нормалью к поверхности в точке M . На поверхности σ выберем контур L , содержащий внутри точку M и имеющий ориентацию, согласованную с ориентацией σ . Обозначим S – площадь части поверхности σ , ограниченной контуром L .

Определение. Вихрем векторного поля \bar{a} в точке M называется вектор $\text{rot} \bar{a}$, проекция которого $\text{rot}_n \bar{a}$ на каждое направление \bar{n} равна пределу отношения циркуляции вектора \bar{a} по контуру L к площади S ограниченной этим контуром части гладкой поверхности σ , проходящей через точку M и имеющей в ней нормаль \bar{n} , когда контур L стягивается в точку

$$\operatorname{rot}_n \bar{\alpha} = \lim_{\operatorname{diam} L \rightarrow 0 (S \rightarrow 0)} \frac{1}{S} \oint_L \alpha_\tau d\tau. \quad (4.7)$$

Обозначение $\operatorname{rot} \bar{\alpha}$ происходит от латинского слова *rotor* (вращатель). Вихрь векторного поля называется еще вихревым вектором или ротором.

Формула (4.7) показывает, что при неизменной величине площади циркуляция векторного поля по контуру плоской площадки зависит от ориентировки последней относительно направления вихря векторного поля $\bar{\alpha}$ и будет наибольшей, когда эта площадка перпендикулярна вихревому вектору. В этом случае проекция вектора $\operatorname{rot} \bar{\alpha}$ наибольшая и равна модулю вихря. Можно сказать, что вихрь дает по модулю циркуляцию векторного поля, приходящуюся на единицу площади поверхности, и ориентирован так, чтобы эта циркуляция была наибольшей.

Следующая теорема обосновывает эти утверждения и дает выражение для вихря векторного поля в декартовой системе координат.

Теорема (о вихре поля). Если координаты вектора

$$\bar{\alpha}(M) = \alpha_x \bar{i} + \alpha_y \bar{j} + \alpha_z \bar{k}$$

имеют непрерывные частные производные первого порядка, то справедлива следующая формула:

$$\operatorname{rot} \bar{\alpha} = \left(\frac{\partial \alpha_z}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_y}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_z}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \right) \bar{k}. \quad (4.8)$$

Доказательство. Фиксируем точку пространства $M(x_0, y_0, z_0)$. Зададим в точке M направление с помощью орта \bar{n}_0 . Предположим, что орт \bar{n}_0 не коллинеарен ортам \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} . Рассмотрим гладкую ориентированную поверхность σ , проходящую через точку M и имеющую в ней нормаль \bar{n}_0 .

Пусть L – контур на поверхности σ , содержащий внутри точку M , причем положительное направление обхода L совершается против часовой стрелки, если смотреть с той стороны поверхности, в которую направлена нормаль \bar{n}_0 . Обозначим S площадь части поверхности σ , ограниченной контуром L .

Вычислим значение следующего предела

$$\lim_{\operatorname{diam} L \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_L \alpha_\tau ds = \lim_{\operatorname{diam} L \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_L \alpha_x dx + \alpha_y dy + \alpha_z dz,$$

когда контур L стягивается к точке M .

Найдем вначале

$$\lim_{\operatorname{diam} L \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_L \alpha_x(x, y, z) dx.$$

Для этого разложим $\alpha_x(x, y, z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки M , ограничиваясь членами первой степени

$$\alpha_x(x, y, z) = \alpha_x(x_0, y_0, z_0) + \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) + |\Delta \bar{F}| \varepsilon(x, y, z),$$

где

$$|\Delta \bar{F}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

$\varepsilon(x, y, z)$ – бесконечно малая при $|\Delta \bar{F}| \rightarrow 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \oint_L \alpha_x(x, y, z) dx &= \frac{\alpha_x(x_0, y_0, z_0)}{S} \oint_L dx + \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x}\right)_0 \frac{1}{S} \oint_L (x - x_0) dx + \\ &+ \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial y}\right)_0 \frac{1}{S} \oint_L y dx - \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial y}\right)_0 \frac{y_0}{S} \oint_L dx + \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial z}\right)_0 \frac{1}{S} \oint_L z dx - \\ &- \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial z}\right)_0 \frac{z_0}{S} \oint_L dx + \frac{1}{S} \oint_L |\Delta \bar{F}| \varepsilon dx. \end{aligned}$$

Вычислим интегралы, входящие в правую часть последнего выражения. Очевидно, что

$$\oint_L (x - x_0) dx = \int_{x_1}^{x_1} (x - x_0) dx = \frac{(x - x_0)^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_1} = 0,$$

где x_1 – абсцисса фиксированной точки на L (поскольку контур L замкнутый, то координаты начальной и конечной точек совпадают). Аналогично

$$\oint_L dx = \int_{x_1}^{x_1} dx = 0.$$

Далее по формулам (4.5), (4.6)

$$\oint_L y dx = -S_z, \quad \oint_L z dx = S_y,$$

где, например, S_z – ориентированная площадь проекции на плоскость Oxy части поверхности σ , ограниченной контуром L . Знак S_z определяется направлением обхода проекции кривой L , зависящим от угла наклона орта \bar{n}_0 к оси Oz , точнее, знак S_z совпадает со знаком $\cos(\bar{n}_0, z)$. Итак,

$$\begin{aligned} \lim_{\text{diam} L \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_L \alpha_x dx &= - \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial y}\right)_0 \lim_{\text{diam} L \rightarrow 0} \frac{S_z}{S} + \\ &+ \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial z}\right)_0 \lim_{\text{diam} L \rightarrow 0} \frac{S_y}{S} + \lim_{\text{diam} L \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_L |\Delta \bar{F}| \varepsilon dx. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Для вычисления первого предела в правой части выражения (4.9) воспользуемся соотношением эквивалентности (3.2), которое в обозначениях данного параграфа примет вид $S \cos(\bar{n}_0, z) \sim S_z$, откуда

$$\lim_{\text{diam}L \rightarrow 0} \frac{S_z}{S} = \cos(\bar{n}_0, z).$$

Аналогично,

$$\lim_{\text{diam}L \rightarrow 0} \frac{S_y}{S} = \cos(\bar{n}_0, y).$$

Рассмотрим последнее слагаемое в (4.9). Очевидно,

$$|\Delta \bar{F}| < \text{diam}L, \quad |\varepsilon| \leq \max_L |\varepsilon|, \quad |dx| = |\cos(\bar{\tau}, x) ds| \leq ds.$$

Поэтому

$$\left| \frac{1}{S} \oint_L |\Delta \bar{F}| \varepsilon dx \right| < \frac{1}{S} \text{diam}L \cdot \max_L |\varepsilon| \cdot \oint_L ds = \frac{l_L \cdot \text{diam}L}{S} \max_L |\varepsilon|,$$

где l_L – длина контура L . Потребуем, чтобы соотношение $(l_L \cdot \text{diam}L)/S$ было ограниченным некоторой константой C . Это требование естественно для контура, стягиваемого в точку; и означает, что контур L имеет не очень много рукавов (аппендиксов) небольшой длины по сравнению с $\text{diam}L$ и заключает в себе площадь, соизмеримую с $(\text{diam}L)^2$ (т.е. не слишком сильно отличается от контуров типа окружности, для которой $C=4$; границы квадрата ($C=4\sqrt{2}$), правильной шестиугольной звезды ($C=8$) и т.п.). Тогда последний предел в (4.9) равен нулю, поскольку $\max |\varepsilon|$ – бесконечно малая при $\text{diam}L \rightarrow 0$.

В результате получим

$$\lim_{\text{diam}L \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_L \alpha_x dx = - \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \right)_0 \cos(\bar{n}_0, z) + \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial z} \right)_0 \cos(\bar{n}_0, y). \quad (4.10)$$

Аналогично выводятся следующие две формулы

$$\lim_{\text{diam}L \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_L \alpha_y dy = - \left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial z} \right)_0 \cos(\bar{n}_0, x) + \left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial x} \right)_0 \cos(\bar{n}_0, z), \quad (4.11)$$

$$\lim_{\text{diam}L \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_L \alpha_z dz = - \left(\frac{\partial \alpha_z}{\partial x} \right)_0 \cos(\bar{n}_0, y) + \left(\frac{\partial \alpha_z}{\partial y} \right)_0 \cos(\bar{n}_0, x). \quad (4.12)$$

Сложим выражения (4.10) – (4.12) и отбросим значок "0", тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\text{diam}L \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_L \alpha_z ds &= \left(\frac{\partial \alpha_z}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_y}{\partial z} \right) \cos(\bar{n}, x) + \\ &+ \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_z}{\partial x} \right) \cos(\bar{n}, y) + \left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \right) \cos(\bar{n}, z). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Можно показать, что эта формула справедлива и для орта, параллельного координатной оси.

Сопоставляя (4.8) и (4.13), видим, что справа в (4.13) стоит скалярное произведение орта \bar{n} и вектора $\text{rot}\bar{\alpha}$ с координатами, определяемыми формулой (4.8). Т.к. слева в (4.13) находится инвариантное выражение, то и вектор $\text{rot}\bar{\alpha}$ с координатами (4.8) не зависит от выбора системы координат.

Теорема доказана.

Декартовы координаты вихря напоминают векторное произведение двух векторов, в котором проекции на оси координат первого сомножителя заменены знаками дифференцирования по x , y , z . Это позволяет $\text{rot}\bar{\alpha}$ символически записать в виде

$$\text{rot}\bar{\alpha} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \end{vmatrix}.$$

Пример 4.3. Найти вихрь векторного поля

$$\bar{\alpha} = (x + 3y + 2z)\bar{i} + (2x + z)\bar{j} + (x - y)\bar{k}.$$

Решение. Воспользуемся символическим обозначением вихря векторного поля

$$\begin{aligned} \text{rot}\bar{\alpha} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + 3y + 2z & 2x + z & x - y \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(x - y) - \frac{\partial}{\partial z}(2x + z) \right) \bar{i} + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - y) - \frac{\partial}{\partial z}(x + 3y + 2z) \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(2x + z) - \frac{\partial}{\partial y}(x + 3y + 2z) \right) \bar{k} = -2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}. \end{aligned}$$

Пример 4.4. Доказать, что вихрь суммы векторных полей равен сумме вихрей слагаемых, т.е.

$$\text{rot}(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) = \text{rot}(\bar{\alpha}) + \text{rot}(\bar{\beta}).$$

Решение 1 (координатный способ). Пусть $\bar{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$, $\bar{\beta} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)$, $\bar{\alpha} + \bar{\beta} = (\alpha_x + \beta_x, \alpha_y + \beta_y, \alpha_z + \beta_z)$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{rot}(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \alpha_x + \beta_x & \alpha_y + \beta_y & \alpha_z + \beta_z \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \beta_x & \beta_y & \beta_z \end{vmatrix} = \text{rot}(\bar{\alpha}) + \text{rot}(\bar{\beta}). \end{aligned}$$

Решение 2 (инвариантный способ). Линейность операции rot следует также непосредственно из определения (4.7), поскольку свойством линейности обладают циркуляция (как линейный интеграл), предел и операция нахождения проекции вектора.

§ 4.4. Физический смысл понятия вихря

Рассмотрим произвольное движение твердого тела. Из кинематики известно, что для любого момента времени поле скорости \vec{V} точек тела определяется формулой

$$\vec{V} = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

где O – фиксированная в теле точка, \vec{V}_O скорость точки O (поступательная скорость), $\vec{\omega}$ – мгновенная угловая скорость вращения, \vec{r} – радиус-вектор, соединяющий точку O с произвольной точкой тела M (рис. 4.3).

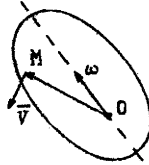


Рис. 4.3

Проекции вектора \vec{V} на оси декартовой системы координат $Oxyz$ будут

$$V_x = V_{Ox} + \omega_y z - \omega_z y, \quad V_y = V_{Oy} + \omega_z x - \omega_x z, \quad V_z = V_{Oz} + \omega_x y - \omega_y x,$$

где $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$.

Найдем вихрь вектора \vec{V}

$$\text{rot}_x \vec{V} = \frac{\partial}{\partial y} V_z - \frac{\partial}{\partial z} V_y = \omega_x + \omega_x = 2\omega_x, \quad \text{rot}_y \vec{V} = 2\omega_y, \quad \text{rot}_z \vec{V} = 2\omega_z.$$

Следовательно, $\text{rot} \vec{V} = 2\vec{\omega}$, т.е. в случае произвольного движения твердого тела $\text{rot} \vec{V}$ представляет удвоенную угловую скорость вращения твердого тела.

Можно рассмотреть поле скоростей жидкости и показать, что $(\text{rot} \vec{V})/2$ будет угловой скоростью вращения бесконечно малого объема, окружающего точку M , в предположении, что в рассматриваемый момент времени этот объем жидкости внезапно отвердел. Этим объясняется и наименование "вихрь" векторного поля, потому что в обычном представлении вихри связаны с интенсивным вращательным движением частиц жидкости.

§ 4.5. Теорема Стокса

Рассмотрим теорему, связанную с понятием вихря вектора и позволяющую преобразовать циркуляцию в поверхностный интеграл.

Теорема (Стокса). Циркуляция вектора по замкнутому контуру L равна потоку вихря вектора через поверхность S , ограниченную данным контуром

$$\oint_L \alpha_\tau ds = \iint_S \operatorname{rot}_n \bar{\alpha} dS. \quad (4.14)$$

Здесь предполагается, что нормаль \bar{n} к поверхности S согласована с ориентацией контура L , а проекции $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ вместе со своими частными производными непрерывны на поверхности S .

Доказательство. Разобьем поверхность S на m малых частей, ограниченных контурами L_1, L_2, \dots, L_m и не имеющих общих внутренних точек (рис. 4.4). Пусть ΔS_k – площадь площадки, ограниченной контуром L_k . В силу определения (4.7) для каждой площадки следующие выражения эквивалентны при $\operatorname{diam} L_k \rightarrow 0$:

$$\oint_{L_k} \alpha_\tau ds \sim (\operatorname{rot}_n \bar{\alpha})_k \Delta S_k, \quad (4.15)$$

где проекция вихря берется в некоторой точке M_k k -й площадки.

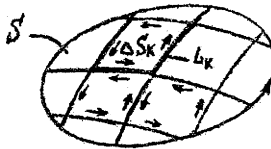


Рис. 4.4

Составим суммы по $k=1, 2, \dots, m$ выражений слева и справа в (4.15). В сумме контурных интегралов

$$\sum_{k=1}^m \oint_{L_k} \alpha_\tau ds = \oint_L \alpha_\tau ds \quad (4.16)$$

интегралы по внутренним контурам взаимно уничтожаются и остаются только линейные интегралы по отдельным частям контура L , которые в сумме дают циркуляцию вектора $\bar{\alpha}$ по контуру L . Суммы выражений справа в (4.15)

$$\sum_{k=1}^m (\operatorname{rot}_n \bar{\alpha})_k \Delta S_k \quad (4.17)$$

есть интегральная сумма, стремящаяся при $m \rightarrow \infty$ и $\max_k \operatorname{diam} L_k \rightarrow 0$ к поверхностному интегралу

$$\iint_S \operatorname{rot}_n \bar{\alpha} dS,$$

поскольку функция $\operatorname{rot}_n \bar{\alpha}$ – непрерывна на поверхности S .

В силу эквивалентности бесконечно малых (4.15) пределы сумм (4.16) и (4.17) при $m \rightarrow \infty$ и $\max_k \operatorname{diam} L_k \rightarrow 0$ равны между собой.

Теорема Стокса доказана.

Представленную выше формулировку теоремы будем называть теоремой Стокса в векторной форме. Учитывая формулы (3.8), (4.3), (4.8), запишем теорему Стокса в координатной форме.

Если функции $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на поверхности S , ограниченной замкнутым контуром L , то справедлива формула

$$\oint_L \alpha_x dx + \alpha_y dy + \alpha_z dz = \iint_S \left(\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \alpha_z}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_y}{\partial z} \right) \cos(\bar{n}, x) + \\ &+ \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_z}{\partial x} \right) \cos(\bar{n}, y) + \\ &+ \left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \right) \cos(\bar{n}, z) \end{aligned} \right) dS, \quad (4.18)$$

где \bar{n} – нормаль к поверхности S , причем направление нормали определяется так, чтобы со стороны нормали обход контура L казался происходящим против хода часовой стрелки.

Следствие 1. Поток вихря векторного поля через замкнутую поверхность равен нулю.

По теореме Стокса поток вихря вектора не зависит от вида поверхности S , натянутой на контур L , и равен циркуляции вектора \bar{a} по кривой L . Поэтому, если натянуть на контур L две поверхности S и S_1 , то

$$\iint_S \text{rot}_n \bar{a} dS = \iint_{S_1} \text{rot}_n \bar{a} dS.$$

Поверхности S и S_1 ограничивают некоторый объем V (рис. 4.5).

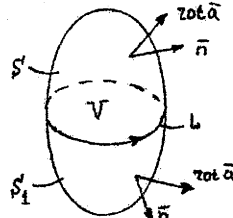


Рис. 4.5

Без уменьшения общности можно считать, что нормаль к поверхности S_1 (S) направлена внутрь (наружу) объема V . Меняя направление нормали к поверхности S_1 на противоположное, т.е. на внешнее по отношению к V , получим

$$\iint_S \text{rot}_n \bar{a} dS = - \iint_{S_1} \text{rot}_n \bar{a} dS,$$

или

$$\iint_{S+S_1} \text{rot}_n \bar{a} dS = 0, \quad (4.19)$$

что и требовалось доказать.

Вспоминая определение дивергенции из формулы (4.19) сразу заключаем, что

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\alpha} = 0, \quad (4.20)$$

т.е. векторное поле вихрей любого вектора $\vec{\alpha}$ свободно от источников и стоков. Соотношение (4.20) можно также проверить непосредственным вычислением, т.к.

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \alpha_z}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \right) = 0.$$

Следствие 2. Если в некоторой области повсюду $\operatorname{rot} \vec{\alpha} = 0$, то циркуляция вектора $\vec{\alpha}$ по любому замкнутому контуру L в этой области равна нулю.

Действительно, по формуле (4.14)

$$\oint_L \alpha_\tau ds = 0.$$

Докажем обратное утверждение. Если циркуляция векторного поля по любой замкнутой кривой равна нулю, то $\operatorname{rot} \vec{\alpha} = 0$.

Предположим, что в некоторой точке M поля вихревой вектор отличен от нуля. Тогда в силу непрерывности α_x , α_y , α_z вместе со своими частными производными найдется малая поверхность S , содержащая точку M и ориентированная в пространстве так, чтобы везде на ней $\operatorname{rot}_n \vec{\alpha} > 0$. Для этой поверхности

$$\iint_S \operatorname{rot}_n \vec{\alpha} dS > 0.$$

Из теоремы Стокса будет следовать, что циркуляция вдоль кривой, ограничивающей S , также больше нуля. Полученное противоречие и доказывает приведенное утверждение.

Пример 4.5. Решить пример 4.1, используя теорему Стокса.

Решение. Ясно, что $\alpha_x = x + 2y - z$, $\alpha_y = \alpha_z = 0$. Найдем компоненты вихря векторного поля

$$\operatorname{rot} \vec{\alpha} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+2y-z & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Применяя теорему Стокса, получим

$$C = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{\alpha}) \cdot \vec{n} dS = \iint_S (-\cos(\vec{n}, y) - 2\cos(\vec{n}, z)) dS.$$

По условию, вектор нормали составляет с осями Oy и Oz острые углы, т.е. $\cos(\vec{n}, y) > 0$ и $\cos(\vec{n}, z) > 0$ (см. рис. 3.9). Используя формулы (3.3), (3.4), имеем

$$C = \iint_{D_y} (-1) dx dz + \iint_{D_z} (-2) dx dy = (-1)S_{\Delta OAC} + (-2)S_{\Delta OAB} = -3/2.$$

§ 4.6. Формула Грина

Покажем, что циркуляция векторного поля вдоль замкнутого плоского контура может быть подсчитана с помощью некоторого двойного интеграла по области, ограниченной этим контуром.

Теорема (формула Грина). Если L – граница области S , лежащей в плоскости Oxy , и функции α_x , α_y вместе со своими частными производными $\frac{\partial \alpha_y}{\partial x}$, $\frac{\partial \alpha_x}{\partial y}$ непрерывны в замкнутой области S (включая границу L), то справедлива формула Грина

$$\oint_L \alpha_x dx + \alpha_y dy = \iint_S \left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \right) dx dy, \quad (4.21)$$

причем обход контура L выбирается так, что область S остается слева.

Доказательство. Формула Грина есть частный случай формулы Стокса. Действительно, если поверхность S есть область на плоскости Oxy ($z=0$), то проекции S на координатные плоскости Oxz , Oyz имеют нулевую площадь, и поэтому в правой части формулы (4.18) останется лишь последний член. Т.к. $dz=0$, то в левой части этой формулы будет отсутствовать последнее слагаемое, и формула Стокса примет вид (4.21).

§ 4.7. Вычисление площадей плоских областей

Положим в формуле Грина $\alpha_x = 0$, $\alpha_y = x$, тогда $\frac{\partial \alpha_y}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial \alpha_x}{\partial y} = 0$. Получим соотношение

$$\oint_L x dy = \iint_S dx dy.$$

Но двойной интеграл в правой части дает площадь Q области S , поэтому

$$Q = \oint_L x dy. \quad (4.22)$$

Аналогично, положив в формуле Грина $\alpha_x = -y$, $\alpha_y = 0$, приходим к равенству

$$Q = -\oint_L y dx. \quad (4.23)$$

Часто бывает удобной формула, получающаяся сложением (4.22) и (4.23)

$$Q = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \quad (4.24)$$

Пример 4.6. Найти площадь, ограниченную астроидой $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ (рис. 4.6).

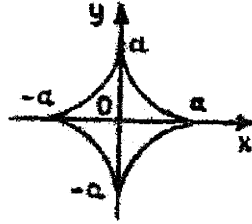


Рис. 4.6

Решение. Воспользуемся формулой (4.24)

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\alpha (\cos^3 t) 3\alpha \sin^2 t \cos t + \alpha (\sin^3 t) 3\alpha \cos^2 t \sin t \right) dt = \\
 &= \frac{3}{4} \alpha^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3}{4} \pi \alpha^2.
 \end{aligned}$$

Глава 5. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПОЛЯ

§ 5.1. Потенциальные векторные поля

Определение. Векторное поле $\vec{\alpha}$ называется потенциальным, если существует скалярное поле φ такое, что

$$\vec{\alpha} = \text{grad} \varphi.$$

Функция $\varphi(M)$ в таком случае называется потенциалом (потенциальной функцией), а вектор $\vec{\alpha}$ – потенциальным вектором.

Ясно, что потенциальная функция определяется полем не единственным образом. Любая функция, отличающаяся от φ постоянным слагаемым, имеет тот же градиент, что и φ , и поэтому также может рассматриваться как потенциал поля $\vec{\alpha}$.

Основной особенностью потенциального векторного поля $\vec{\alpha}(x, y, z)$ является то, что потенциальное векторное поле вполне определяется одной скалярной функцией φ – его потенциалом, тогда как для задания произвольного векторного поля требуется задание трех скалярных функций $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ – проекций вектора $\vec{\alpha}(x, y, z)$ на оси координат.

Теорема (необходимое и достаточное условие потенциальности поля в произвольной области). Для того, чтобы векторное поле $\vec{\alpha}$, заданное в области Ω , имело потенциал, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих двух условий:

- 1) линейный интеграл векторного поля по любому замкнутому (кусочно-гладкому) контуру Γ , принадлежащему Ω , равен нулю;
- 2) линейный интеграл по любому (кусочно-гладкому) пути $\Gamma \subset \Omega$, соединяющему любые две точки Ω , не зависит от пути интегрирования.

Доказательство. Докажем эквивалентность свойств 1) и 2). Произвольно выберем две точки $A, B \in \Omega$, и соединим их двумя различными кривыми L_1 и L_2 (рис. 5.1).

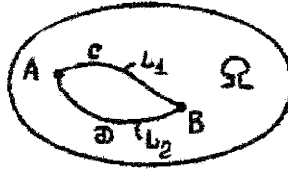


Рис. 5.1

В силу свойства 1)

$$\oint_{ADBCA} \alpha_r ds = 0.$$

Следовательно,

$$\oint_{ADB} \alpha_r ds + \oint_{BCA} \alpha_r ds = 0.$$

Переносим второй интеграл в правую часть

$$\oint_{ADB} \alpha_r ds = - \oint_{BCA} \alpha_r ds = \oint_{ACB} \alpha_r ds$$

видим, что свойство 2) справедливо.

Обратно, в силу свойства 2),

$$\oint_{ADB} \alpha_r ds = \oint_{ACB} \alpha_r ds.$$

Следовательно,

$$\oint_{ADB} \alpha_r ds - \oint_{ACB} \alpha_r ds = \oint_{ADB} \alpha_r ds + \oint_{BCA} \alpha_r ds = \oint_{ADBCA} \alpha_r ds = 0,$$

что доказывает справедливость свойства 1).

Докажем необходимость условий теоремы. Пусть векторное поле $\vec{\alpha}$ имеет в области Ω потенциальную функцию $\varphi(x, y, z)$. Зададим в Ω точки $A = A(x_a, y_a, z_a)$ и $B = B(x_b, y_b, z_b)$. Соединим A с B ориентированной от A к B непрерывной кусочно-гладкой кривой $L = \{x = x(t), y = y(t), z = z(t), t_a \leq t \leq t_b\}$. На основании теоремы о производной сложной функции в точках гладкости L имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Следовательно, линейный интеграл

$$\begin{aligned} \int_L \alpha_r ds &= \int_L \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z'(t) \right) dt = \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \frac{d}{dt} \varphi(x(t), y(t), z(t)) dt = \varphi(x(t), y(t), z(t)) \Big|_{t_a}^{t_b} = \end{aligned}$$

$$= \varphi(x(t_b), y(t_b), z(t_b)) - \varphi(x(t_a), y(t_a), z(t_a)) = \varphi(B) - \varphi(A)$$

равен разности значений функции φ в точках A и B . Т.е. не зависит от пути, соединяющего любые две точки. А это и есть свойство 2).

Докажем достаточность условий теоремы. По условию линейный интеграл

$$\int_{AB} \alpha_\tau ds$$

не зависит от пути интегрирования, а зависит только от положения его концов A и B . Пусть начальная точка A фиксирована, а конечная точка $M(x, y, z)$ является произвольной точкой поля (рис. 5.2).

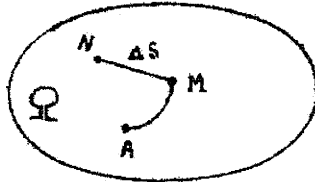


Рис. 5.2

Рассмотрим функцию

$$\varphi(M) = \int_{AM} \alpha_\tau ds,$$

которая является функцией точки M . При переходе от точки M к точке N (см. рис. 5.2) функция φ получит приращение

$$\Delta\varphi = \int_{MN} \alpha_\tau ds.$$

На основании теорема о среднем $\Delta\varphi = (\alpha_\tau)|_Q \Delta s$, где Δs – длина отрезка MN , $(\alpha_\tau)|_Q$ – значение α_τ в некоторой точке $Q \in MN$. Отсюда вытекает, что

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = (\alpha_\tau)|_M.$$

Итак, производная от функции φ по направлению \overline{MN} равна проекции вектора $\vec{\alpha}$ на это направление, следовательно, $\vec{\alpha} = \text{grad} \varphi$. Теорема доказана.

Следствие. Если φ – потенциальная функция векторного поля $\vec{\alpha}$, то

$$\int_{AB} \alpha_\tau ds = \varphi(B) - \varphi(A),$$

где $AB \subset \Omega$.

Ясно, что интеграл от потенциального вектора по замкнутому пути равен нулю.

Свойство потенциальности широко используется при решении физических задач. Так, если силовое поле имеет потенциал, то вычисление работы сводится просто к определению разности потенциалов в начальной и конечной точках пути.

Формулировку необходимого и достаточного условия потенциальности можно упростить, если рассматривать векторное поле в областях специального вида.

Область Ω пространства называется односвязной (поверхностно односвязной), если произвольная замкнутая линия, лежащая в Ω , может быть стянута в точку непрерывным образом, не задевая границ области. Другими словами, на замкнутую кривую может быть натянута некоторая поверхность, целиком лежащая в области Ω .

Односвязными областями в пространстве являются, например, куб, шар, все пространство. Примером не односвязной области может служить все пространство, из которого исключены все точки некоторой прямой, скажем, оси Oz (рис. 5.3). Любая кривая L , охватывающая ось Oz , не может быть стянута в точку, не задевая границ области. Иначе, любая поверхность σ , натянутая на L , пересекает границу области (прямую Oz). Другим примером не односвязной области является внутренность тора (рис. 5.4). Если для области (см. рис. 5.3) ось Oz окружить цилиндром малого радиуса, исключив его внутреннюю часть, и одновременно провести полуплоскость Oxz , считая ее стороны границами области, то полученная область будет односвязной (контуры, окружающие ось Oz будут запрещены). Для области (см. рис. 5.4) для превращения ее в односвязную достаточно провести поверхность S .

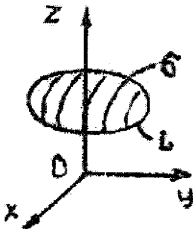


Рис. 5.3

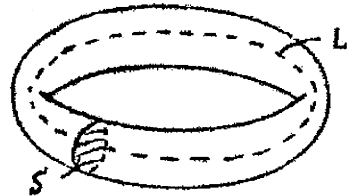


Рис. 5.4

Теорема (необходимое и достаточное условие потенциальности поля в односвязной области). Необходимым и достаточным условием того, чтобы в односвязной области векторное поле \vec{a} было потенциальным, является выполнение равенства

$$\text{rot} \vec{a} = 0. \quad (5.1)$$

(Другими словами, координаты вектора \vec{a} должны иметь непрерывные частные производные первого порядка, которые удовлетворяют следующим равенствам

$$\frac{\partial \alpha_x}{\partial y} = \frac{\partial \alpha_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial \alpha_x}{\partial z} = \frac{\partial \alpha_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \alpha_y}{\partial z} = \frac{\partial \alpha_z}{\partial y}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\vec{a} = \text{grad} \varphi$. Предположив, что потенциал поля $\varphi = \varphi(x, y, z)$ имеет непрерывные первые и вторые частные производные, т.е. что $\text{rot} \vec{a}$ существует, равенство (5.1) следует непосредственно из выражений для вихря и градиента, т.к.

$$\operatorname{rot}_x \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \equiv 0,$$

$$\operatorname{rot}_y \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \equiv 0,$$

$$\operatorname{rot}_z \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \equiv 0.$$

Следовательно, всякое потенциальное поле является полем безвихревым независимо от связности области.

Достаточность. Если область односвязна, то любой замкнутый контур, принадлежащий области, ограничивает некоторую поверхность, лежащую целиком в этой области. Иначе говоря, какой бы замкнутый контур мы ни взяли, всегда на этот контур можно "натянуть" поверхность, которая будет целиком оставаться в области. Но тогда для произвольного замкнутого контура L и ограниченной им поверхности S применима формула Стокса. В силу следствия 2 из теоремы Стокса для любого замкнутого контура $\oint_L \alpha_r ds = 0$. Следовательно, по

достаточному условию потенциальности поля в произвольной области, поле $\bar{\alpha}$ потенциально.

Идея доказательства достаточного условия потенциальности поля в произвольной области может быть применена при нахождении потенциала φ векторного поля $\bar{\alpha} = \operatorname{grad} \varphi$. Для отыскания функции φ воспользуемся тем, что путь интегрирования можно брать по произволу. Чаще всего удобным оказывается такой путь интегрирования (рис. 5.5). Сначала идем из точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно оси Ox до точки $M_1(x, y_0, z_0)$; на этом пути $dy = dz = 0$, и поэтому

$$\int_{M_0 M_1} \alpha_r ds = \int_{x_0}^x \alpha_x(x, y_0, z_0) dx.$$

Затем идем из точки $M_1(x, y_0, z_0)$ параллельно оси Oy до точки $M_2(x, y, z_0)$; на этом пути $dx = dz = 0$ и поэтому

$$\int_{M_1 M_2} \alpha_r ds = \int_{y_0}^y \alpha_y(x, y, z_0) dy.$$

Наконец, из точки $M_2(x, y, z_0)$ идем параллельно оси Oz до точки $M(x, y, z)$; на этом пути $dx = dy = 0$, и поэтому

$$\int_{M_2 M} \alpha_r ds = \int_{z_0}^z \alpha_z(x, y, z) dz.$$

В результате, интегрируя по пути $M_0 M_1 M_2 M$, приходим к следующему выражению для функции φ

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & \varphi(x_0, y_0, z_0) + \int_{x_0}^x \alpha_x(x, y_0, z_0) dx + \\ & + \int_{y_0}^y \alpha_y(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z \alpha_z(x, y, z) dz. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Для того, чтобы определить потенциал единственным образом, необходимо задать начальное значение потенциала $\varphi(x_0, y_0, z_0)$.

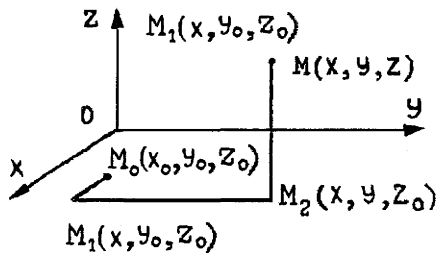


Рис. 5.5

Пример 5.1. Показать, что поле

$$\vec{\alpha} = (2xy + z^2)\vec{i} + (2yz + x^2)\vec{j} + (2xz + y^2)\vec{k}$$

является потенциальным. Найти его потенциал.

Решение. Находим

$$\frac{\partial \alpha_x}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial \alpha_x}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial \alpha_z}{\partial x} = 2z, \quad \frac{\partial \alpha_y}{\partial z} = 2y, \quad \frac{\partial \alpha_z}{\partial y} = 2y.$$

Следовательно, выполняются необходимые и достаточные условия потенциальности векторного поля (5.1). Потенциал поля $\varphi(x, y, z)$ находим по формуле (5.2), полагая $x_0 = y_0 = z_0 = 0$,

$$\varphi(x, y, z) = \int_0^y x^2 dy + \int_0^z (2zx + y^2) dz = x^2 y + z^2 x + y^2 z + C,$$

где $C = \text{const}$.

§ 5.2. Некоторые примеры потенциальных векторных полей

Поступательное течение жидкости. Рассмотрим поступательное течение жидкости с постоянной скоростью u_0 вдоль оси Ox . В этом случае $\alpha_x = u_0$, $\alpha_y = \alpha_z = 0$. Для потенциала φ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

откуда $\varphi = u_0 x + \text{const}$.

Электростатическое поле. В электростатике напряжение электрического поля, т.е. сила, действующая на единичный положительный заряд, тоже является, как

установлено из опытных данных, вектором потенциальным

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi,$$

где φ называется потенциалом электростатического поля.

Поток тепла внутри тела. Изучая явление теплопроводности, рассматривают поле температуры T . Если в теле, в котором изучается поток тепла, провести малую площадку dS , направление нормали к которой есть \vec{n} , то принимают, что через эту площадку проходит в каждую единицу времени количество теплоты, равное

$$k \frac{\partial T}{\partial n} dS,$$

где k – коэффициент теплопроводности, который в различных точках тела может иметь разное значение, т.е. является функцией точки, но не зависит (в случае изотропного тела) от ориентации площадки dS . Отсюда видно, что поток тепла внутри тела характеризуется вектором $\text{grad}T$.

§ 5.3. Соленоидальные векторные поля

Определение. Если во всех точках M некоторой области G дивергенция векторного поля, заданного в области G , равна нулю

$$\text{div}\vec{\alpha}(M) = 0,$$

то говорят, что поле соленоидально в этой области.

Таким образом, по определению, соленоидальное поле не имеет источников и стоков. В таком поле векторные линии не могут ни начинаться, ни кончаться, они могут быть либо замкнутыми, либо иметь концы на границе поля.

Пример 5.2. Проверить, будет ли векторное поле

$$\vec{\alpha} = x(z^2 - y^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(y^2 - x^2)\vec{k}$$

соленоидальным.

Решение. Находим

$$\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} = z^2 - y^2, \quad \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} = x^2 - z^2, \quad \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} = y^2 - x^2.$$

Воспользуемся формулой (3.9) и получим

$$\text{div}\vec{\alpha} = (z^2 - y^2) + (x^2 - z^2) + (y^2 - x^2) = 0,$$

следовательно, данное векторное поле соленоидально.

Глава 6. ОПЕРАТОРЫ ГАМИЛЬТОНА И ЛАПЛАСА

При рассмотрении вектора

$$\text{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$$

было указано, что этот вектор можно получить формальным применением оператора "набла"

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$$

к скалярной функции φ . Проекции символического вектора – оператора Гамильтона – таковы

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Следует помнить, что ∇ не является вектором – он не имеет ни величины, ни направления. Символический вектор ∇ приобретает определенный смысл лишь в комбинациях со скалярными и векторными функциями.

Дивергенцию вектора \bar{a} можно формально рассматривать как скалярное произведение символического вектора ∇ на вектор $\bar{a} = \alpha_x \bar{i} + \alpha_y \bar{j} + \alpha_z \bar{k}$. В самом деле, произведя перемножение по формуле скалярного произведения двух векторов $\bar{b} \cdot \bar{a} = b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z$ и полагая $b_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $b_y = \frac{\partial}{\partial y}$, $b_z = \frac{\partial}{\partial z}$ получим

$$\nabla \cdot \bar{a} = \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} = \text{div} \bar{a}.$$

Очень часто вихрь вектора \bar{a} записывают как векторное произведение оператора Гамильтона ∇ и вектора \bar{a}

$$\text{rot} \bar{a} = \nabla \times \bar{a}.$$

Действительно, составляя векторное произведение по формуле

$$\bar{b} \times \bar{a} = (b_y a_z - b_z a_y) \bar{i} + (b_z a_x - b_x a_z) \bar{j} + (b_x a_y - b_y a_x) \bar{k},$$

где $b_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $b_y = \frac{\partial}{\partial y}$, $b_z = \frac{\partial}{\partial z}$, легко найдем

$$\nabla \times \bar{a} = \left(\frac{\partial \alpha_z}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_y}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_z}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \right) \bar{k} = \text{rot} \bar{a}.$$

Составим расхождение потенциального вектора $\text{div grad} \varphi$. Очевидно,

$$\text{div grad} \varphi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right),$$

или

$$\text{div grad} \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Выражение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$$

называют оператором Лапласа, а уравнение $\Delta \varphi = 0$ – уравнением Лапласа. Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называют гармоническими функциями.

В символической форме имеем

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = (\nabla \cdot \nabla) \varphi.$$

Но скалярное произведение $\nabla \cdot \nabla$, которое чаще обозначают через ∇^2 , очевидно, равно Δ

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta.$$

Оператор Гамильтона позволяет многие другие операции векторного анализа в декартовых координатах записать в сокращенной форме.

Глава 7. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

Часто положение точки M выгодно определять не тремя декартовыми координатами x , y , z , а тремя другими, более отвечающими рассматриваемой задаче, числами q_1 , q_2 , q_3 . Каждой такой тройке чисел q_1 , q_2 , q_3 отвечает свой радиус-вектор \vec{r} и, следовательно, некоторая точка M .

Величины q_1 , q_2 , q_3 называют криволинейными координатами точки M .

Каждой точке M отвечают три координаты q_1 , q_2 , q_3 , и каждая из этих координат является функцией от радиус-вектора \vec{r}

$$q_1(\vec{r}) = q_1(x, y, z),$$

$$q_2(\vec{r}) = q_2(x, y, z),$$

$$q_3(\vec{r}) = q_3(x, y, z).$$

Т.к. радиус-вектор \vec{r} любой точки пространства определяется заданием трех чисел q_1 , q_2 , q_3 , то \vec{r} является функцией от этих переменных $\vec{r}(q_1, q_2, q_3)$, следовательно, и компоненты этого вектора x , y , z будут функциями q_1 , q_2 , q_3

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3). \quad (7.1)$$

Уравнения

$$q_1(\vec{r}) = \operatorname{const},$$

$$q_2(\vec{r}) = \operatorname{const},$$

$$q_3(\vec{r}) = \operatorname{const},$$

определяют поверхности уровня функций $q_1(\vec{r})$, $q_2(\vec{r})$, $q_3(\vec{r})$ соответственно. Назовем эти поверхности координатными поверхностями. Будем предполагать, что через каждую точку пространства, за исключением, быть может, нескольких изолированных точек, проходит по одной координатной поверхности каждого семейства, т.е. функции q_1 , q_2 , q_3 — однозначные функции x , y , z (рис. 7.1). Координатные поверхности попарно пересекаются по координатным линиям. Например, на координатной линии q_1 меняется только координата q_1 , а координаты q_2 , q_3 сохраняют неизменное значение.

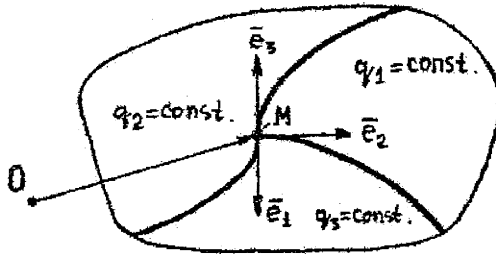


Рис. 7.1

В качестве примера рассмотрим цилиндрические и сферические координаты. В цилиндрических координатах (рис. 7.2) положение точки определяется тремя координатами

$$q_1 = \rho, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z.$$

Формулы (7.1) имеют вид

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty). \quad (7.2)$$

Координатные поверхности: $\rho = \text{const}$ – цилиндры с осью Oz ; $\varphi = \text{const}$ – полуплоскости, ограниченные осью Oz ; $z = \text{const}$ – плоскости, перпендикулярные оси Oz . Координатными линиями являются: линии, перпендикулярные оси Oz и начинающиеся на этой оси (линии ρ); окружности с центром на оси Oz , лежащие в плоскостях, перпендикулярных этой оси (линии φ); прямые, параллельные оси Oz (линии z).

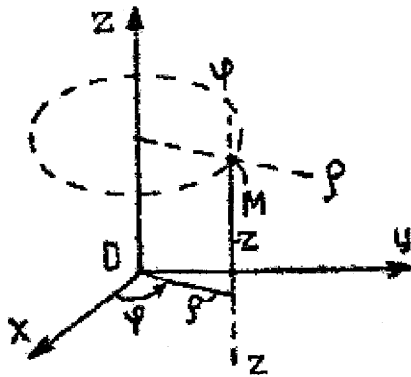


Рис. 7.2

В сферических координатах (рис. 7.3) положение точки определяется координатами

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \varphi.$$

Формулы (7.1) имеют вид

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad (7.3)$$

$$(0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi).$$

Координатными поверхностями являются: $r = \text{const}$ – сферы с центром O ; $\theta = \text{const}$ – полуконусы с осью Oz ; $\varphi = \text{const}$ – полуплоскости, ограниченные осью Oz . Координатные линии: радиальные лучи (линии r); меридианы (линии θ); параллели (линии φ).

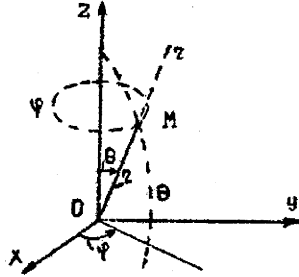


Рис. 7.3

Вернемся к общим криволинейным координатам q_1, q_2, q_3 . Будем предполагать, что в каждой точке координатные линии взаимно перпендикулярны, т.е. касательные к координатным линиям в каждой точке образуют попарно прямые углы. Такие координаты называют криволинейными ортогональными координатами. Введем в рассмотрение единичные векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, направленные по касательным к координатным линиям в точке M в сторону возрастания, соответственно, переменных q_1, q_2, q_3 (см. рис. 7.1). Очевидно, $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i = 1, \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0 (i \neq j)$.

Теперь рассмотрим радиус-вектор $\bar{r}(q_1, q_2, q_3)$ и составим производную $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}$.

Т.к. при дифференцировании q_2 и q_3 считаются постоянными, то вектор $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}$ направлен по касательной к координатной линии q_1 , т.е.

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} = H_1 \bar{e}_1,$$

где H_1 – длина вектора $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}$.

Учитывая, что \bar{e}_1 – единичный вектор, из предыдущего равенства легко получить

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \right)^2,$$

или, т.к.

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \bar{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \bar{k},$$

то

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^2.$$

Рассуждая аналогично, получим формулы

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} = H_1 \bar{e}_1, \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} = H_2 \bar{e}_2, \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3} = H_3 \bar{e}_3,$$

где

$$H_i^2 = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Величины H_1, H_2, H_3 называются коэффициентами Ламе.

Разложим вектор $\bar{\alpha}$ по трем некопланарным векторам $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$

$$\bar{\alpha} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3.$$

В частности, для вектора $d\bar{r}$ получим разложение

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3} dq_3 = H_1 dq_1 \bar{e}_1 + H_2 dq_2 \bar{e}_2 + H_3 dq_3 \bar{e}_3. \quad (7.4)$$

Возведем обе части равенства (7.4) в квадрат и заметив, что

$$(d\bar{r})^2 = (ds)^2, \quad \bar{e}_i \cdot \bar{e}_i = 1, \quad \bar{e}_i \cdot \bar{e}_k = 0 \quad (i \neq k),$$

получим формулу

$$(ds)^2 = H_1^2 (dq_1)^2 + H_2^2 (dq_2)^2 + H_3^2 (dq_3)^2.$$

Пусть $d\bar{r} = \overline{MN}$, где N очень близкая к M точка. Проведем через точку N три координатные поверхности, которые вместе с тремя координатными поверхностями, проходящими через точку M , образуют очень малый криволинейный параллелепипед (рис. 7.4).

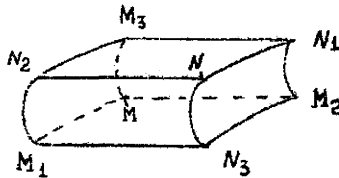


Рис. 7.4

Ребра этого параллелепипеда Δs_i с точностью до бесконечно малых высшего порядка можно заменить дифференциалами ds_i

$$ds_1 = H_1 dq_1, \quad ds_2 = H_2 dq_2, \quad ds_3 = H_3 dq_3. \quad (7.5)$$

Площади координатных поверхностей и объем выразятся, соответственно, формулами

$$d\sigma_1 = H_2 H_3 dq_2 dq_3, \quad d\sigma_2 = H_3 H_1 dq_3 dq_1, \\ d\sigma_3 = H_1 H_2 dq_1 dq_2, \quad dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

Несложно проверить, что цилиндрические и сферические координаты являются ортогональными. Принимая во внимание формулу координатных линий в цилиндрических координатах, можно легко видеть, что ребрами малого криволинейного параллелепипеда являются

$$ds_1 = d\rho, ds_2 = \rho d\varphi, ds_3 = dz.$$

Сравнение с формулами (7.5) показывает, что для цилиндрических координат

$$H_\rho = 1, H_\varphi = \rho, H_z = 1. \quad (7.6)$$

Таким же образом для сферических координат имеем

$$ds_1 = dr, ds_2 = r d\theta, ds_3 = r \sin\theta d\varphi,$$

поэтому

$$H_r = 1, H_\theta = r, H_\varphi = r \sin\theta. \quad (7.7)$$

Выразим основные величины векторного поля в криволинейных ортогональных координатах.

1. Начнем с рассмотрения $\text{grad}\varphi(q_1, q_2, q_3)$. Проекцией $\text{grad}\varphi$ на ось q_i криволинейных координат по самому определению является $\frac{\partial\varphi}{\partial s_i}$, но т.к.

$ds_i = H_i dq_i$, имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s_i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}, \quad i=1,2,3.$$

Следовательно,

$$\text{grad}\varphi = \frac{1}{H_1} \frac{\partial\varphi}{\partial q_1} \bar{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial\varphi}{\partial q_2} \bar{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial\varphi}{\partial q_3} \bar{e}_3. \quad (7.8)$$

Пример 7.1. Вычислить $\text{grad}\psi$ в цилиндрических координатах.

Решение. Воспользуемся формулами (7.6) и (7.8), получим

$$\text{grad}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \bar{e}_\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z} \bar{e}_z.$$

Пример 7.2. Вычислить $\text{grad}\psi$ в сферических координатах.

Решение. Подставим формулы (7.7) в (7.8), получим

$$\text{grad}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r} \bar{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \bar{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \bar{e}_\varphi.$$

2. Рассмотрим $\text{div}\bar{\alpha}$. Для вычисления $\text{div}\bar{\alpha}$ в криволинейных координатах удобно применить формулу (3.15)

$$\text{div}\bar{\alpha}(M) = \lim_{\text{diam}V \rightarrow 0 (M \in V)} \frac{1}{V} \iiint_S \alpha_n dS,$$

взяв за V объем криволинейного параллелепипеда (см. рис. 7.4), одной из вершин которого является точка M , в которой ищется значение $\text{div}\bar{\alpha}$.

Будем считать, что $\overline{MM_1}$ направлен в сторону возрастающих значений q_1 , тогда внешняя нормаль к грани $MM_2N_1M_3$ направлена в противоположную

сторону, и нормальная составляющая к рассматриваемой грани вектора $\vec{\alpha}$ равна $-\alpha_1$, поэтому поток через грань $MM_2N_1M_3$ с точностью до бесконечно малой высшего порядка будет равен $-\alpha_1 d\sigma_1 = -\alpha_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3$. Противоположная грань $M_1N_3NN_2$ отличается от грани $MM_2N_1M_3$ тем, что ей отвечает значение $q_1 + dq_1$ координаты q_1 , а значения двух других координат на этих двух гранях одни и те же. Поэтому поток через грань $M_1N_3NN_2$ будет равен

$$\left(\alpha_1 H_2 H_3 + \frac{\partial}{\partial q_1} (\alpha_1 H_2 H_3) dq_1 \right) dq_2 dq_3.$$

Складывая потоки через две грани $MM_2N_1M_3$ и $M_1N_3NN_2$ получим выражение

$$\frac{\partial(\alpha_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} dq_1 dq_2 dq_3.$$

Рассуждая аналогично для потока через грани $MM_1N_2M_3$ и $M_2N_3NN_1$, получим

$$\frac{\partial(\alpha_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} dq_1 dq_2 dq_3,$$

и через грани $MM_1N_3M_2$ и $M_3N_2NN_1$

$$\frac{\partial(\alpha_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} dq_1 dq_2 dq_3.$$

Сумма всех трех выражений дает полный поток.

Разделим полный поток на объем параллелепипеда $V = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3$, получим окончательно

$$\operatorname{div} \vec{\alpha} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial(\alpha_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\alpha_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(\alpha_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right). \quad (7.9)$$

Пример 7.3. Вычислить $\operatorname{div} \vec{\alpha}$ в цилиндрических координатах.

Решение. Подставим формулы (7.6) в (7.9), будем иметь

$$\operatorname{div} \vec{\alpha} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \alpha_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \alpha_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \alpha_z}{\partial z}.$$

3. Рассмотрим $\operatorname{rot} \vec{\alpha}$. Воспользуемся определением (4.7)

$$\operatorname{rot}_n \vec{\alpha} = \lim_{\operatorname{diam} \lambda \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_L \alpha_\tau d\tau.$$

Найдем проекцию вектора $\operatorname{rot} \vec{\alpha}$ на координатную линию q_1 . Для этого вычислим циркуляцию вектора $\vec{\alpha}$ вдоль контура $MM_2N_1M_3M$. Прежде всего с точностью до бесконечно малой высшего порядка

$$\int_{MM_2} \alpha_\tau ds = \alpha_2 ds_2 = \alpha_2 H_2 dq_2.$$

Интеграл

$$\int_{M_3N_1} \alpha_r ds.$$

отличается от предыдущего интеграла только тем, что в нем координата q_3 имеет значение $q_3 + dq_3$, а значения других координат те же. Поэтому

$$\int_{M_3N_1} \alpha_r ds = \left(\alpha_2 H_2 + \frac{\partial(\alpha_2 H_2)}{\partial q_3} dq_3 \right) dq_2.$$

Так же можно вычислить

$$\int_{MM_3} \alpha_r ds = \alpha_3 H_3 dq_3,$$

$$\int_{M_2N_1} \alpha_r ds = \left(\alpha_3 H_3 + \frac{\partial(\alpha_3 H_3)}{\partial q_2} dq_2 \right) dq_3.$$

Следовательно,

$$\oint_{MM_2N_1M_3M} \alpha_r ds = \int_{MM_2} + \int_{M_2N_1} - \int_{M_3N_1} - \int_{MM_3} = \left(\frac{\partial(\alpha_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(\alpha_2 H_2)}{\partial q_3} \right) dq_2 dq_3.$$

Разделив полученное выражение на $d\sigma_1 = H_2 H_3 dq_2 dq_3$, получим искомое выражение

$$(\operatorname{rot} \bar{\alpha})_{q_1} = \frac{1}{H_2 H_3} \left(\frac{\partial(\alpha_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(\alpha_2 H_2)}{\partial q_3} \right). \quad (7.10)$$

Проекция вектора $\operatorname{rot} \bar{\alpha}$ на координатные линии q_2 и q_3 находятся аналогично

$$(\operatorname{rot} \bar{\alpha})_{q_2} = \frac{1}{H_3 H_1} \left(\frac{\partial(\alpha_1 H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(\alpha_3 H_3)}{\partial q_1} \right), \quad (7.11)$$

$$(\operatorname{rot} \bar{\alpha})_{q_3} = \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial(\alpha_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(\alpha_1 H_1)}{\partial q_2} \right). \quad (7.12)$$

Пример 7.4. Вычислить $\operatorname{rot} \bar{\alpha}$ в цилиндрических координатах.

Решение. Подставим формулы (7.6) в (7.10) – (7.12) и получим

$$\operatorname{rot}_\rho \bar{\alpha} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \alpha_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \alpha_\varphi}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}_\varphi \bar{\alpha} = \frac{\partial \alpha_\rho}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_z}{\partial \rho},$$

$$\operatorname{rot}_z \bar{\alpha} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\alpha_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \alpha_\rho}{\partial \varphi}.$$

Пример 7.5. Вычислить $\operatorname{rot} \bar{\alpha}$ в сферических координатах.

Решение. Подставляя (7.7) в формулы (7.10) – (7.12), получим искомые выражения

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}_r \bar{\alpha} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\alpha_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \alpha_\theta}{\partial \varphi}, \\ \operatorname{rot}_\theta \bar{\alpha} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \alpha_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r \alpha_\varphi)}{\partial r}, \\ \operatorname{rot}_\varphi \bar{\alpha} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r \alpha_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha_r}{\partial \theta}.\end{aligned}\quad (7.13)$$

4. Рассмотрим оператор Лапласа $\Delta \psi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi$. Воспользуемся формулами (7.8) и (7.9), и сразу получим выражение оператора Лапласа в криволинейных координатах

$$\Delta \psi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) \right).$$

Например, в цилиндрических координатах будем иметь

$$\Delta \psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2},$$

а в сферических

$$\Delta \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}.$$

5. Нахождение потенциала и проверка потенциальности поля. Разберем пример с использованием криволинейных координат.

Пример 7.6. Вектор $\bar{\alpha}$ задан своими проекциями на оси сферических координат r, θ, φ

$$\alpha_r = \frac{2k \cos \theta}{r^3}, \quad \alpha_\theta = \frac{k \sin \theta}{r^3}, \quad \alpha_\varphi = 0,$$

где k – постоянное число. Выяснить, является ли вектор $\bar{\alpha}$ потенциальным, и если $\bar{\alpha} = \operatorname{grad} \psi$, найти ψ .

Решение. Составим по формулам (7.13) $\operatorname{rot} \bar{\alpha}$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}_r \bar{\alpha} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(0 \cdot \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{k \sin \theta}{r^3} \right) = 0, \\ \operatorname{rot}_\theta \bar{\alpha} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{2k \cos \theta}{r^3} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot 0)}{\partial r} = 0, \\ \operatorname{rot}_\varphi \bar{\alpha} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{rk \sin \theta}{r^3} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{2k \cos \theta}{r^3} \right) = 0.\end{aligned}$$

Т.к. $\operatorname{rot} \bar{\alpha} = 0$, то $\bar{\alpha}$ – потенциальный вектор. Для того, чтобы найти ψ , составляем

$$\alpha_r ds = \alpha_r dr + \alpha_\theta r d\theta + \alpha_\varphi r \sin \theta d\varphi = \frac{2k \cos \theta dr}{r^3} + \frac{k \sin \theta d\theta}{r^2} = -d \left(\frac{k \cos \theta}{r^2} \right).$$

Следовательно,

$$\vec{\alpha} = \text{grad} \left(-\frac{k \cos \theta}{r^2} \right).$$

Окончательно имеем

$$\psi = -\frac{k \cos \theta}{r^2} + C,$$

где $C = \text{const}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алапашвили, Г.Д. Основы векторного анализа и элементы теории поля / Г.Д. Алапашвили. – М.: Высшая школа, 1962. – 79 с.
2. Борисенко, А.И. Векторный анализ и начала тензорного исчисления / А.И. Борисенко, И.Е. Тарапов. – Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьковском университете, 1986. – 216 с.
3. Бугров, Я.С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Дрофа, 2004. – Т. 2. – 509 с.
4. Бугров, Я.С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Дрофа, 2004. – Т. 3. – 511 с.
5. Будак, Б.М. Кратные интегралы и ряды / Б.М. Будак, С.В. Фомин. – М.: Физматлит, 2002. – 511 с.
6. Гольдфайн, И.А. Векторный анализ и теория поля / И.А. Гольдфайн. – М.: Наука, 1968. – 128 с.
7. Гришкевич, А.А. Теории поля: учебное пособие / А.А. Гришкевич, Л.В. Данилова, А.Е. Дыхнов. – Челябинск: ЧГТУ, 1991. – 56 с.
8. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. – М.: Оникс: Мир и образование, 2009. – Ч. 2. – 448 с.
9. Зельдович, Я.Б. Элементы прикладной математики / Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис. – М.; СПб.: Лань, 2002. – 592 с.
10. Картан, А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы / А. Картан. – М.: Мир, 1971. – 392 с.
11. Кочин, Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н.Е. Кочин. – М.: Наука, 1965. – 426 с.
12. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2004. – Т. 2. – 720 с.
13. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2009. – 688 с.
14. Смирнов, В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – Т. 2. – 848 с.
15. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Лань, 2009. – Т. 3. – 656 с.
16. Шарина, Л.В. Элементы теории поля: учебное пособие для студентов-

заочников / Л.В. Шарина. – Челябинск: ЧПИ, 1985. – 53 с.

17. Шнейдер, В.Е. Краткий курс высшей математики / В.Е. Шнейдер, А.И. Слущкий, А.С. Шумов. – М.: Высшая школа, 1978. – Т. 2. – 328 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Скалярное и векторное поле	
§ 1.1. Скалярное и векторное поле	4
§ 1.2. Поверхности уровня	5
§ 1.3. Векторные линии	6
Глава 2. Градиент скалярного поля	
§ 2.1. Производная скалярного поля по направлению	8
§ 2.2. Градиент скалярного поля	11
Глава 3. Дивергенция векторного поля	
§ 3.1. Ориентация поверхности	13
§ 3.2. Поверхностный интеграл I рода	15
§ 3.3. Поток векторного поля через поверхность	17
§ 3.4. Теорема Остроградского–Гаусса	26
§ 3.5. Дивергенция векторного поля	28
Глава 4. Вихрь векторного поля	
§ 4.1. Криволинейный интеграл I рода	31
§ 4.2. Линейный интеграл векторного поля	32
§ 4.3. Вихрь векторного поля	36
§ 4.4. Физический смысл понятия вихря	41
§ 4.5. Теорема Стокса	41
§ 4.6. Формула Грина	45
§ 4.7. Вычисление площадей плоских областей	45
Глава 5. Специальные поля	
§ 5.1. Потенциальные векторные поля	46
§ 5.2. Некоторые примеры потенциальных векторных полей	51
§ 5.3. Соленоидальные векторные поля	52
Глава 6. Операторы Гамильтона и Лапласа	52
Глава 7. Криволинейные координаты	54
Библиографический список	62

Техн. редактор А.В. Миних

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 19.03.2012. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 3,72. Тираж 25 экз. Заказ 56/160. Цена С.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.