Министерство образования и науки Российской Федерации

Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)

519.1
П168

Препринт

ПАНЮКОВ А. В.

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧ КЛАССА $\mathcal{NP}$

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2014

УДК 519.172
П168

Панюков А. В.
Полиномиальная разрешимость задач класса $\mathcal{NP}$: препринт / А. В. Панюков. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – 10 с.

В работе построен алгоритм решения задачи "Гамильтонов цикл" с вычислительной сложностью $O(n^{20.5} \log_2 n \log_2 \log_2 n)$, где n – число вершин в исследуемом графе. Тем самым доказана полиномиальная разрешимость задач класса NP.

УДК 519.172

ISBN 978-5-696-04578-8

Введение

Одной из актуальных задач теории алгоритмов является проблема P *versus* NP отношения класса P задач, разрешимых за полиномиальное время на детерминированной машине, с классом NP задач распознавания, разрешимых за полиномиальное время на недетерминированной машине.

Фундамент теории NP-полных задач заложен в работе С. Кука [1], где были введены класс NP, понятия полиномиальной сводимости и NP-полной задачи, т.е. задачи к которой может быть сведена любая задача из класса NP за полиномиальное время. Позднее относительно широкого круга задач была доказана их NP-полнота, в частности, это относится и к рассматриваемой в статье задачи "Гамильтонов цикл". Наиболее полным руководством по теории NP-полноты является монография [3].

В настоящее время вопрос "Являются NP-полные задачи труднорешаемыми?" считается одним из основных вопросов современной математики [2]. Доказательство возможности решения полиномиальным алгоритмом хотя бы одной NP-полной задачи будет доказательством совпадения классов P и NP.

Задача "Гамильтонов цикл"

Условие задачи "Гамильтонов цикл" приведено во многих источниках, в частности в [3, с 66]:

- УСЛОВИЕ: Дан простой граф $G = (V, E)$.
- ВОПРОС: Верно ли, что G содержит гамильтонов цикл, т.е. такую последовательность $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n\rangle$ вершин графа G, что $n = |V(G)|$, $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$ для всех $i : 0 \leq i \leq n-2$ и $\{v_{n-1}, v_0\} \in E(G)$.

Существование полиномиального алгоритма для задачи "Гамильтонов цикл" является доказательством полиномиальной разрешимости задач класса NP. Известны неудачные попытки решения проблемы P *versus* NP [4] с использованием задачи "Гамильтонов цикл" [5]. В данной работе предложен полиномиальный алгоритм решения рассматриваемой задачи и доказана его результативность.

Задача размещения цикла на графе G

Пусть C есть простой цикл с множеством вершин

$$V(C) = \{c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}\}$$

и множеством ребер

$$E(C) = \left\{\{c_i, c_{(i+1)\%n}\} :\ i = 0, 1, \ldots, n-1\right\},$$

здесь $a\%b$ – остаток от деления целых чисел a и b.

Задача распознавания существования в графе G гамильтонова цикла равносильна задаче распознавания существования биекции

$$\varphi :\ V(C) \leftrightarrow V(G) :\ \{\varphi(c_i), \varphi(c_{(i+1)\%n})\} \in E(G).$$

Представление в виде задачи булевого квадратичного программирования

Пусть $\overline{G}$ – граф, дополнительный к графу G, т.е. имеет множество вершин $V(\overline{G}) = V(G)$ и множество ребер $E(\overline{G}) = (V(G))^2 \setminus E(G)$. Рассмотрим задачу булевой оптимизации

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{v,u:\,\{v,u\} \in E(\overline{G})} x_v^i x_u^{(i+1)\%n} \right) \ \to\ \min_{x \in D}, \tag{1}$$

где D определяется системой ограничений

$$(\forall i = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \left(\sum_{v \in V(G)} x_v^i = 1 \right), \tag{2}$$

$$(\forall v \in V(G)) \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_v^i = 1 \right), \tag{3}$$

$$(\forall i = 0, 1, 2, \ldots, n-1,\ \forall v \in V(G)) \left(x_v^i \in \{0, 1\} \right). \tag{4}$$

Пусть $\varphi : V(C) \to V(G)$. Определим x следующим образом

$$(\forall i = 0, 1, 2, \ldots, n-1,\ v \in V(G)) \left(x_v^i = \chi_{\{v\}}(\varphi(i)) \right), \tag{5}$$

где $\chi_X(\cdot)$ – характеристическая функция множества X.

Группа ограничений (2), при такой интерпретации переменных задачи представляет требование, что каждый элемент $c_i \in V(C)$ получит назначение. Группа ограничений (3) представляет требование, что каждому элементу $v \in V(G)$ назначен некоторый элемент $c_i \in V(C)$. Значение целевой функции $F(x)$ при этом равно количеству ребер из $E(\overline{G})$, имеющихся в образе $\varphi(C)$ размещаемого цикла C. Если граф G является гамильтоновым, и x^* есть оптимальное решение, то $F(x^*) = 0$, в противном случае $F(x^*) \geq 1$.

Релаксация условия целочисленности

Алгоритмический анализ комбинаторных задач зачастую существенно упрощается при переходе к непрерывным постановкам. Задачу квадратичного программирования программирования

$$F(x) \to \min_{x \in \tilde{D}}, \tag{6}$$

отличающуюся от задачи (1) ослаблением условий целочисленности (4) до условий принадлежности интервалу

$$(\forall i \in J,\ \forall v \in V) \left(x_v^i \in [0, 1] \right), \tag{7}$$

называют *релаксированной* задачей. Множество допустимых решений $\tilde{D}$ релаксированной задачи определяется ограничениями (2), (3) и (7), т.е. $\tilde{D}$ является политопом паросочетаний в полном двудольном графе K_{nn}. Каждой вершине политопа $\tilde{D}$ соответствует гамильтонов цикл в полном графе K_n, а значения целевой функции $F(\cdot)$ на любой вершине политопа $\tilde{D}$ равны количеству ребер из $E(\overline{G})$ в соответствующем ей гамильтоновом цикле.

Следовательно, если граф G является гамильтоновым, то, с учетом неотрицательности $F(x)$ для $x \in D$, оптимальное значение релаксированной задачи

$$\tilde{F} = \min\{F(x) :\ x \in \tilde{D}\} = 0.$$

Если же граф G негамильтонов, то

$$\tilde{F} = \min\{F(x) : \ x \in \mathrm{vertex}(\tilde{D})\} \geq 1, \tag{8}$$

где $\mathrm{vertex}(\tilde{D})$ множество вершин политопа $\tilde{D}$. Поскольку любая точка политопа может быть представлена выпуклой комбинацией его вершин, то для негамильтонова графа будем иметь

$$\tilde{F} = \min\{C(x) : \ x \in \tilde{D}\} =$$
$$\min\left\{C\left(\sum_{x\in\mathrm{vertex}(\tilde{D})} x\cdot\alpha(x)\right) : \sum_{x\in\mathrm{vertex}(\tilde{D})} \alpha(x) = 1,\ \alpha \geq 0\right\} \geq$$
$$\min\left\{\sum_{x\in\mathrm{vertex}(\tilde{D})} C\,(x)\cdot\alpha^2(x) : \sum_{x\in\mathrm{vertex}(\tilde{D})} \alpha(x) = 1,\ \alpha \geq 0\right\} \geq$$
$$\min\left\{\sum_{x\in\mathrm{vertex}(\tilde{D})} \alpha^2(x) : \sum_{x\in\mathrm{vertex}(\tilde{D})} \alpha(x) = 1,\ \alpha \geq 0\right\} \geq \frac{1}{n!}.$$

Первое неравенство в данной цепочке следует из того, что $F(\cdot)$ представляет квадратичную форму, матрица которой имеет неотрицательные элементы. Второе неравенство есть следствие неравенства (8). Наконец, третье неравенство есть следствие того, что

$$\arg\min\left\{\sum_{x\in\mathrm{vertex}(\tilde{D})} \alpha^2(x) : \sum_{x\in\mathrm{vertex}(\tilde{D})} \alpha(x) = 1,\ \alpha \geq 0\right\} =$$
$$\left\{\alpha(x) = \frac{1}{|\,\mathrm{vertex}(\tilde{D})|} = \frac{1}{n!} : \ x \in \mathrm{vertex}(\tilde{D})\right\}.$$

Изложенное выше доказывает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. *Оптимальное значение $\tilde{F}$ релаксированной задачи (1)-(7) является индикатором:*

- *если $\tilde{F} = 0$, то граф $G = (V, E)$ гамильтонов;*
- *если $\tilde{F} \geq \frac{1}{n!}$, то граф $G = (V, E)$ негамильтонов.*

Следствие 1. *Оптимальное значение $\tilde{F}$ достаточно вычислить с абсолютной погрешностью не более $1/(3n!)$. Для представления результата вычисления $\tilde{C}$ требуется не более $(2 + n\log_2 n)$ бит.*

Релаксированная задача, из-за ее многоэкстремальности, остается достаточно сложной для решения.

Представление в виде задачи булевого линейного программирования

Легко убедиться, что задача (1) эквивалентна задаче булевого линейного программирования

$$F_L(x,y) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{v,u:\,\{v,u\}\in E(\overline{G})} y_{v\,u}^{i\,(i+1)\%n} \to \min_{(x,y)\in D\cap Y}, \tag{9}$$

где Y определяется системой ограничений

$$(\forall i = 0,1,2,\ldots,n-1,\ \forall v \in V)$$
$$\left(\sum_{u\in V} y_{v\,u}^{i\,(i+1)\%n} = x_v^i,\ \sum_{u\in V} y_{u\,v}^{i\,(i+1)\%n} = x_v^{(i+1)\%n}\right). \tag{10}$$

$$(\forall i = 0,1,2,\ldots,n-1,\ \forall v,u \in V)\left(y_{u\,v}^{i\,(i+1)\%n} \in [0,1]\right). \tag{11}$$

Группы ограничений (10)-(11) и (2)-(4) дают

$$(\forall i = 0,1,2,\ldots,n-1,\ \forall v,u \in V)\left(y_{u\,v}^{i\,(i+1)\%n} = x_v^i x_u^{(i+1)\%n}\right). \tag{12}$$

Обратно, с учетом ограничений (2), имеем

$$(\forall i = 0,1,2,\ldots,n-1,\ \forall v,u \in V)\left(y_{u\,v}^{i\,(i+1)\%n} = x_v^i x_u^{(i+1)\%n}\right) \Rightarrow$$
$$\left(\sum_{u\in V} y_{v\,u}^{i\,(i+1)\%n} = x_v^i \sum_{u\in V} x_u^{(i+1)\%n} = x_v^i,\right.$$
$$\left.\sum_{u\in V} y_{u\,v}^{i\,(i+1)\%n} = x_v^{(i+1)\%n} \sum_{u\in V} x_u^i = x_v^{(i+1)\%n}\right). \tag{13}$$

Таким образом, правило (12) дает способ построения по оптимальному решению задач квадратичного программирования (1) и (6) соответствующего решения для задачи линейного программирования.

Релаксация условия целочисленности

Рассмотрим задачу линейного программирования

$$F_L(x,y) \to \min_{(x,y)\in\tilde{D}\cap Y}, \tag{14}$$

отличающуюся от задачи (9) ослаблением условий целочисленности (4) до условий принадлежности интервалу (7).

Покажем возможность применения оптимального значения $\tilde{F}_L$ задачи (14) для распознавания наличия гамильтонова цикла в графе G.

$$\begin{aligned}\tilde{F} = \min_{x\in\tilde{D}} F(x) = \min_{x\in\tilde{D}} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{v,u\colon \{v,u\}\in E(\overline{G})} x_v^i x_u^{(i+1)\%n} \right) \leq \\ \min_{(x,y)\in\tilde{D}\cap Y} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{v,u\colon \{v,u\}\in E(\overline{G})} x_v^i x_u^{(i+1)\%n} \right) = \\ \min_{(x,y)\in\tilde{D}\cap Y} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{v,u\colon \{v,u\}\in E(\overline{G})} y_{v\,u}^{i\,(i+1)\%n} \right) = \tilde{F}_L\end{aligned}$$

Первое неравенство в данной цепочке есть следствие сужения области допустимых решений, а следующее за ним равенство есть следствие (13).

Изложенное выше доказывает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2. *Оптимальное значение $\tilde{F}_L$ задачи задачи линейного программирования (14) является индикатором:*

- *если $\tilde{F}_L = 0$, то граф $G = (V, E)$ гамильтонов;*
- *если $\tilde{F}_L \geq \frac{1}{n!}$, то граф $G = (V, E)$ негамильтонов.*

Замечание 1. Если граф $G = (V, E)$ является гамильтоновым, то существует оптимальное решение задачи задачи линейного программирования (14), соответствующее гамильтонову циклу.

Полиномиальная разрешимость задач класса NP

Для решения задачи линейного программирования известны полиномиальные алгоритмы: метод эллипсоидов [6, 7] с вычислительной сложностью $O(N^6L^2 \log_2 L \log_2 \log_L)$ и метод внутренней точки [8] с вычислительной сложностью $O(N^{3.5}L^2 \log_2 L \log_2 \log_2 L)$, где N – максимальный из размеров матрицы задачи, L – число бит, требуемое для кодирования условия задачи линейного программирования.

Матрица задачи (6) имеет $2n$ строк и n^2 столбцов. Матрица ограничений области Y в условиях задач (9) и (14) имеет n^2 строк и n^3 столбцов, поэтому в нашем случае $N = n^2 + n^3 = O(n^3)$. Матрица условий задачи является $0-1$-матрицей, для кодирования ее одного элемента достаточно одного бита, следовательно $L = (2n + n^2)(n^2 + n^3) = O(n^5)$. Таким образом вычислительная сложность задачи линейного программирования (14) не превосходит $O(n^{20.5} \log_2 n \log_2 \log_2 n)$.

Теорема 1. *Вычислительная сложность задачи "Гамильтонов цикл" для графа $G = (V, E) : |V| = n$ не превосходит*

$$O(n^{20.5} \log_2 n \log_2 \log_2 n).$$

Существование полиномиального алгоритма для задачи "Гамильтонов цикл" и NP-полнота даной задачи дают доказательство полиномиальной разрешимости всех задач класса NP [1, 3].

Теорема 2. $P = NP$.

Заключение

Целью работы являлось построение более простого доказательства полиномиальной разрешимости задач класса NP, а не построение наиболее эффективного алгоритма. Очевидно, что для построения более эффективных алгоритмов следует более полно использовать специфику задачи, а не универсальный алгоритм линейного программирования.

Пример более эффективного алгоритма решения NP-трудной квадратичной задачи о назначении вершин древовидной сети приведен в докладах [9, 10].

Список литературы

[1] Cook S. A., "The complexity of theorem-proving procedures", *Proc. 3-rd Ann. ACM Symp. on Theory of Computing*, Association of Computing Machinary, New York, 1971, 151-158.

[2] *http://www.claymath.org/millenium-problems/p-vs-np-problem.*

[3] Гэри М., Джонсон Д., *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*, Пер. с англ., Мир, М., 1982.

[4] *http://www.win.tue.nl/ gwoegi/P-versus-NP.htm?* .

[5] Yannakakis M., "Expressing Combinatorial Optimization Problems by Linear Programs", *Journal of Computer and System Sciences*, **43** (1991,), 441–466. http://dx.doi.org/10.1016/0022-0000(91)90024-Y.

[6] Хачиян Л. Г., "Полиномиальный алгоритм в линейном программировании", *ДАН СССР*, **244**:5, 1093-1096.

[7] Grötschel M., Lovász L., Schrijver A., "The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization", *Combinatorica*, **1**:2 (1981), 169–197.

[8] Karmarkar N., "A new polynomial-time algorithm for linear programming", *Combinatorica*, **4**:4 (1984), 373-395.

[9] Панюков А. В., "Оптимальное размещение вершин дерева в конечном множестве и полиномиальная разрешимость задач класса NP", *Modelare matematica, optimizare Si tehnologii informationale conf. intern. (4; 2014; Chisinau) / red. Dumitru Solomon.*, Evrica, Chisinau, 2014 http://www.aticmd.md/wp-content/uploads/2014/04/Cuprins_MMOTI_IV_II__2014.pdf.

[10] Панюков А. В., "Оптимальное размещение дерева в конечном множестве и полиномиальная разрешимость задач класса NP", *Информационные технологии и системы [Электронный ресурс] : тр. Третьей междунар. науч. конф., Банное, Россия, 26 февр.- 2 марта 2014 г. (ИТиС - 2014) : науч. электр. изд. / отв. ред. Ю. С. Попков, А. В. Мельников*, Изд-во Челяб. гос. ун-та, Челябинск, 2014 http://eu.iit.csu.ru/file.php/1/iit_csu/text/itis2014/ITiS_2014.pdf.

Панюков Анатолий Васильевич

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ
ЗАДАЧ КЛАССА $\mathcal{NP}$

Препринт

Техн. редактор *А. В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 01.08.2014. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 0,70. Тираж 100 экз. Заказ 307/402.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ
454080, г.Челябинск, пр. им. В.И.Ленина, 76.